**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2021, 10(4), 1032-1038
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104112

Hans汉斯

# 中心对称矩阵的广义中心对称{1, 4}逆的迭代算法

**陈世军**

阳光学院基础教研部，福建 福州
Email: 2101751487@qq.com

收稿日期：2021年3月19日；录用日期：2021年4月6日；发布日期：2021年4月22日

## 摘 要

广义逆在矩阵理论分析中有着重要的作用。文中讨论了中心对称矩阵*A*的广义中心对称{1, 4}逆的一种迭代算法，首先将广义{1, 4}逆转化为单变量线性矩阵方程组，然后建立求线性矩阵方阵组中心对称{1, 4}逆的修正共轭梯度算法(MCG算法)，证明了MCG算法的收敛性。数值算例表明，该算法具有很高的计算效率。

## 关键词

广义{1, 4}逆，中心对称解，修正共轭梯度算法，Moore-Penrose

# Iterative Algorithm for Generalized Centrosymmetric {1, 4} Inverse of Centrosymmetric Matrix

**Shijun Chen**

Department of Basic Teaching and Research, Yango University, Fuzhou Fujian
Email: 2101751487@qq.com

Received: Mar. 19th, 2021; accepted: Apr. 6th, 2021; published: Apr. 22nd, 2021

## Abstract

**Generalized inverses play an important role in the analysis of matrix theory. In this paper, an iterative algorithm for generalized centrosymmetric {1, 4} inverse of centrosymmetric matrix is discussed. Firstly, the generalized {1, 4} inverse is transformed into a system of univariate linear ma-**

文章引用：陈世军．中心对称矩阵的广义中心对称{1, 4}逆的迭代算法[J]．应用数学进展, 2021, 10(4): 1032-1038.
DOI: 10.12677/aam.2021.104112

**trix equations. Then, a modified conjugate gradient algorithm (MCG algorithm) is established for solving centrosymmetric {1, 4} inverses of linear matrices. The convergence of MCG algorithm is proved. Numerical examples show that the algorithm has high computational efficiency.**

## Keywords

**Generalized {1, 4} Inverse, Centrosymmetric Solution, Modified Conjugate Gradient Algorithm, Moore-Penrose**



## 1. 引言

E. H. Moore 在 1920 年首次提出了广义逆矩阵的概念，R. Penrose 明确给出了 Moore 广义逆矩阵定义，广义逆矩阵的研究进入了全新的时期。伴随计算科学的发展，广义逆矩阵在数理统计、系统理论、优化计算和控制论领域应用逐渐为人们所认识，因而大大推动了对广义逆的理论与应用的研究，使得广义逆理论得到迅速发展[1]-[9]，刘红伟在文[1]中提出一种新算法求广义逆，该算法在某种条件下运算速度优于奇异值分解求广义逆算法；郭志荣在文[2]中从纯代数角度研究了代数广义逆的可加性与广义逆表示问题；梁少辉在文[3]中讨论了 Quantale 矩阵 M-P 广义逆的若干性质，给出了 Quantale 矩阵 M-P 广义逆的具体形式；柯圆圆在文[4]中给出环上(b, c)可逆元的一些等价刻画，并考虑环上 $2\times 2$ 矩阵的(B, C)逆的存在性和表达式；欧阳光在文[5]中讨论了广义逆矩阵及其性质且给出加号逆矩阵的一种切实可用的计算方法。MCG 算法不同于通常的共轭梯度算法，它不要求系数矩阵正定、可逆或者列满秩，因此总是可行的。本文讨论实中心对称矩阵 Moore-Penrose 广义中心对称{1, 4}逆问题，将 Moore-Penrose 广义中心对称{1, 4}逆问题转换为求单变量线性矩阵方程组的中心对称解，然后建立 MCG 算法求线性矩阵方程组的中心对称解。

## 2. 问题提出

**定义 1** 设 $n$ 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$，称 $n$ 矩阵 $\boldsymbol{S}_n=(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{e}_1)$ 为次单位矩阵。

若矩阵 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 满足 $\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_n=\boldsymbol{X}$，称 $\boldsymbol{X}$ 为中心对称矩阵，用 $\boldsymbol{CSR}^{n\times n}$ 表示中心对称矩阵集合。

**定义 2** 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，若 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A},\ (\boldsymbol{XA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{XA} \tag{1}$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个{1, 4}逆，记为 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}$。特别地，若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{CSR}^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_n=\boldsymbol{X}$，则称 $\boldsymbol{X}$ 为中心对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个中心对称{1, 4}逆。根据广义逆矩阵的性质，矩阵的{1, 4}逆不是唯一的。

令

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{O}_{m\times m},\ \boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{O}_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{I}_n,\ \boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{C}_2=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{I}_m,\ \boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{O}_{m\times m},$$

则(1)式可以改为

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{F}_1\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{F}_2\end{cases} \tag{2}$$

**问题的提出**：任意给出中心对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，求方程组(2)的中心对称解 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的中心对称广义 $\{1,4\}$逆就是矩阵 $\boldsymbol{X}$。

本文通过建立求线性矩阵方程组(2)中心对称解的 MCG 算法，给出了 MCG 算法的性质证明该算法是收敛的，给出了算法收敛性定理。最后给出了算例，验证了 MCG 算法求中心对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的中心对称 $\{1,4\}$逆是有效的。

## 3. 建立求矩阵方程组(2)中心对称解的 MCG 算法

结合共轭梯度算法原理以及中心对称矩阵的特点，建立求矩阵方程组(2)的 MCG 算法如下：

第 1 步：任意给定初始矩阵 $\boldsymbol{X}_1 \in \boldsymbol{CSR}^{n\times n}$，置 $k:=1$，计算

$$\boldsymbol{R}_k^{(i)} = \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_i \ (i=1,2),\ \ \boldsymbol{R}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_k^{(1)} \\ \boldsymbol{R}_k^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{R}}_k = \sum_{i=1}^{2}\left(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{(i)}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{D}_i\left(\boldsymbol{R}_k^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_i\right),\ \ \boldsymbol{P}_k = \frac{1}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{R}}_k + \boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{R}}_k\boldsymbol{S}\right)$$

第 2 步：若 $\boldsymbol{R}_k^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{R}_k^{(2)}$ 均为零矩阵，停止计算；否则，计算

$$\alpha_k = \frac{\|\boldsymbol{R}_k\|^2}{\|\boldsymbol{P}_k\|^2},\ \ \boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{X}_k + \alpha_k\boldsymbol{P}_k$$

第 3 步：计算

$$\boldsymbol{R}_{k+1}^{(i)} = \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_{k+1}\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_i \ (i=1,2),$$

$$\tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1} = \sum_{i=1}^{2}\left(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{k+1}^{(i)}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{D}_i\left(\boldsymbol{R}_{k+1}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_i\right),$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\|\boldsymbol{R}_{k+1}\|^2}{\|\boldsymbol{R}_k\|^2},\ \ \boldsymbol{P}_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1} + \boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{R}}_{k+1}\boldsymbol{S}\right) + \beta_{k+1}\boldsymbol{P}_k$$

易见，MCG 算法中的矩阵 $\boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{P}_k \in \boldsymbol{CSR}^{n\times n}$，下面给出 MCG 算法的基本性质，证明 MCG 算法在有限步计算之后停止。

**性质 1** MCG 算法中的矩阵 $\boldsymbol{R}_i$，$\boldsymbol{P}_i$，$\tilde{\boldsymbol{R}}_i$ 满足

$$tr\left(\boldsymbol{R}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) = tr\left(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) - \beta_{j-1}tr\left(\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}_j\right)$$

**证明** 由 MCG 算法可得

$$\begin{aligned}
tr\left(\boldsymbol{R}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) &= tr\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_{i+1}^{(1)} \\ \boldsymbol{R}_{i+1}^{(2)} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) \\
&= tr\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{X}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}_{i+1}\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{X}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) \\
&= tr\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_i^{(1)} - \alpha_i\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1\right) \\ \boldsymbol{R}_i^{(2)} - \alpha_i\left(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2\right) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) \\
&= tr\left(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) - \alpha_i tr\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= tr\left(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) - \alpha_i tr\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_j^{(1)} \\ \boldsymbol{R}_j^{(2)} \end{pmatrix}\right) \\
&= tr\left(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) - \alpha_i tr\left(\sum_{k=1}^{2}\left(\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k + \boldsymbol{D}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{R}_j^{(k)}\right) \\
&= tr\left(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) - \alpha_i tr\left(\sum_{k=1}^{2}\left(\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j^{(k)}\boldsymbol{B}_k + \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{R}_j^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_k^{\mathrm{T}}\right)\right) \\
&= tr\left(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) - \alpha_i tr\left(\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}_j\right)
\end{aligned}
$$

**性质 2** 当$k \ge 2$时，对于 MCG 算法中的矩阵$\boldsymbol{R}_i$，$\boldsymbol{P}_i$和$\tilde{\boldsymbol{R}}_i$，有

$$
tr\left(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j\right) = 0,\quad tr\left(\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\right) = 0,\quad \left(i \ne j, i, j = 1,2,3,\cdots,k\right) \tag{3}
$$

**证明** 采用数学归纳法，对于$k = 2$，由性质 1 可知，

$$
\begin{aligned}
tr\left(\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\right) &= tr\left(\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\right) - \frac{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}{\|\boldsymbol{P}_1\|^2} tr\left(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}_1\right) \\
&= \|\boldsymbol{R}_1\|^2 - \frac{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}{\|\boldsymbol{P}_1\|^2} tr\left(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\frac{\tilde{\boldsymbol{R}}_1 + \boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{R}}_1\boldsymbol{S}}{2}\right) \\
&= \|\boldsymbol{R}_1\|^2 - \frac{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}{\|\boldsymbol{P}_1\|^2} tr\left(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
tr\left(\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\right) &= tr\left(\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{R}}_2 + \boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{R}}_2\boldsymbol{S}}{2} + \frac{\|\boldsymbol{R}_2\|^2}{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}\boldsymbol{P}_1\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\right) = tr\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{R}}_2 + \boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{R}}_2\boldsymbol{S}}{2}\boldsymbol{P}_1\right) + \frac{\|\boldsymbol{R}_2\|^2}{\|\boldsymbol{R}_1\|^2} tr\left(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\right) \\
&= tr\left(\tilde{\boldsymbol{R}}_2\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\right) + \frac{\|\boldsymbol{R}_2\|^2}{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}\|\boldsymbol{P}_1\|^2 = \frac{\|\boldsymbol{P}_1\|^2}{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}\left(tr\left(\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\right) - tr\left(\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\right)\right) + \frac{\|\boldsymbol{R}_2\|^2}{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}\|\boldsymbol{P}_1\|^2 \\
&= -\frac{\|\boldsymbol{P}_1\|^2}{\|\boldsymbol{R}_1\|^2} tr\left(\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2\right) + \frac{\|\boldsymbol{R}_2\|^2}{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}\|\boldsymbol{P}_1\|^2 = 0
\end{aligned}
$$

假设$k = s\left(s \ge 2\right)$时(3)式成立，则当$k = s + 1\left(s \ge 2\right)$时，由性质 1 可得

$$
\begin{aligned}
tr\left(\boldsymbol{R}_{s+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_s\right) &= tr\left(\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_s\right) - \frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{P}_s\|^2} tr\left(\boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}_s\right) \\
&= tr\left(\boldsymbol{R}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_s\right) - \frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{P}_s\|^2} tr\left(\boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}\frac{\tilde{\boldsymbol{R}}_s + \boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{R}}_s\boldsymbol{S}}{2}\right) \\
&= \|\boldsymbol{R}_s\|^2 - \frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{P}_s\|^2} tr\left(\boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{P}_s - \frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{R}_{s-1}\|^2}\boldsymbol{P}_{s-1}\right)\right) \\
&= \|\boldsymbol{R}_s\|^2 - \frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{P}_s\|^2}\left(tr\left(\boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_s\right) - \frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{R}_{s-1}\|^2} tr\left(\boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{s-1}\right)\right) \\
&= \|\boldsymbol{R}_s\|^2 - \frac{\|\boldsymbol{R}_s\|^2}{\|\boldsymbol{P}_s\|^2} tr\left(\boldsymbol{P}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_s\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$tr\left(P_{s+1}^{\mathrm{T}}P_s\right)=tr\left(\left(\frac{\tilde{R}_{s+1}+S\tilde{R}_{s+1}S}{2}+\frac{\|R_{s+1}\|^2}{\|R_s\|^2}P_s\right)^{\mathrm{T}}P_s\right)$$
$$=tr\left(\frac{\left(\tilde{R}_{s+1}+S\tilde{R}_{s+1}S\right)^{\mathrm{T}}}{2}P_s\right)+\frac{\|R_{s+1}\|^2}{\|R_s\|^2}tr\left(P_s^{\mathrm{T}}P_s\right)$$
$$=tr\left(\tilde{R}_{s+1}P_s^{\mathrm{T}}\right)+\frac{\|R_{s+1}\|^2}{\|R_s\|^2}tr\left(P_s^{\mathrm{T}}P_s\right)=0$$

当 $j=1$ 时，有

$$tr\left(R_{s+1}^{\mathrm{T}}R_1\right)=tr\left(R_s^{\mathrm{T}}R_1\right)-\frac{\|R_s\|^2}{\|P_s\|^2}tr\left(P_s^{\mathrm{T}}\tilde{R}_1\right)$$
$$=0-\frac{\|R_s\|^2}{\|P_s\|^2}tr\left(P_s^{\mathrm{T}}\frac{\tilde{R}_1+S\tilde{R}_1S}{2}\right)$$
$$=-\frac{\|R_s\|^2}{\|P_s\|^2}tr\left(P_s^{\mathrm{T}}P_1\right)=0$$

当 $j=2,3,4,\cdots,s-1$ 时，有

$$tr\left(R_{s+1}^{\mathrm{T}}R_j\right)=tr\left(R_s^{\mathrm{T}}R_j\right)-\frac{\|R_s\|^2}{\|P_s\|^2}tr\left(P_s^{\mathrm{T}}\tilde{R}_j\right)$$
$$=0-\frac{\|R_s\|^2}{\|P_s\|^2}tr\left(P_s^{\mathrm{T}}\frac{\tilde{R}_j+S\tilde{R}_jS}{2}\right)$$
$$=-\frac{\|R_s\|^2}{\|P_s\|^2}tr\left(P_s^{\mathrm{T}}\left(P_j-\frac{\|R_j\|^2}{\|R_{j-1}\|^2}P_{j-1}\right)\right)$$
$$=-\frac{\|R_s\|^2}{\|P_s\|^2}\left(tr\left(P_s^{\mathrm{T}}P_j\right)-\frac{\|R_j\|^2}{\|R_{j-1}\|^2}tr\left(P_s^{\mathrm{T}}P_{j-1}\right)\right)=0$$

$$tr\left(P_{s+1}^{\mathrm{T}}P_j\right)=tr\left(\left(\frac{\tilde{R}_{s+1}+S\tilde{R}_{s+1}S}{2}+\frac{\|R_{s+1}\|^2}{\|R_s\|^2}P_s\right)^{\mathrm{T}}P_j\right)$$
$$=tr\left(\tilde{R}_{s+1}P_j^{\mathrm{T}}\right)+\frac{\|R_{s+1}\|^2}{\|R_s\|^2}tr\left(P_s^{\mathrm{T}}P_j\right)$$
$$=tr\left(\tilde{R}_{s+1}P_j^{\mathrm{T}}\right)=tr\left(P_j^{\mathrm{T}}\tilde{R}_{s+1}\right)$$
$$=\frac{\|P_j\|^2}{\|R_j\|^2}\left(tr\left(R_j^{\mathrm{T}}R_{s+1}\right)-tr\left(R_{j+1}^{\mathrm{T}}R_{s+1}\right)\right)=0$$

根据矩阵迹的性质可得

$$tr\left(R_j^{\mathrm{T}}R_{s+1}\right)=tr\left(R_{s+1}^{\mathrm{T}}R_j\right)=0,\quad tr\left(P_j^{\mathrm{T}}P_{s+1}\right)=tr\left(P_{s+1}^{\mathrm{T}}P_j\right)=0$$

所以当 $k=s+1$ 时(3)式也成立。由归纳法原理可得 $1\le j<i\le k$ 时(3)式成立。

**性质 3** 设 $\boldsymbol{X}$ 是问题的任意一组解，则由算法得到的矩阵 $\boldsymbol{X}^{(k)}$， $\boldsymbol{P}_k$ 及 $\boldsymbol{R}_k$ 满足

$$tr\left(\boldsymbol{P}_k^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{(k)}\right)\right)=\left\|\boldsymbol{R}_k\right\|^2 \quad (k=1,2,3,\cdots).$$

**定理 1** 若中心对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在中心对称{1, 4}逆，则对任意初始矩阵 $\boldsymbol{X}_1\in \boldsymbol{CSR}^{n\times n}$，MCG 算法可在有限步计算后得到 $\boldsymbol{A}$ 中心对称{1, 4}逆。若方阵 $\boldsymbol{A}$ 无中心对称{1, 4}逆，则在 MCG 算法中存在正整数 $k$，使得 $\boldsymbol{R}_k\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{Q}_k=\boldsymbol{O}$。

## 4. 数值算例

下面给出两个算例，在例 1 中，给出两个方阵说明文中建立的 MCG 算法是可行的。在例 2 中给出不可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 在不同阶数下计算结果，说明 MCG 算法具有很高的效率，且都能求出矩阵方程组(2)广义中心对称{1, 4}逆解。

文中计算时间(秒)、矩阵阶数、MCG 算法迭代次数、MCG 算法中断次数、实际误差的范数依次用 time、$n$、$k_1$、$k_{12}$ 和 error 表示。为避免迭代次数过分增加，设定 MCG 算法迭代次数上限为 2999 次，MCG 算法终止准则为 $\varepsilon=10^{-12}$，初始矩阵 $\boldsymbol{X}_1$ 均为零矩阵。

例 1 用 MCG 算法求中心对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个广义中心对称{1, 4}逆，在本例中，中心对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分别取可逆方阵和不可逆方阵。结果如下

1) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&5&13\\3&-4&3\\13&5&6\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A}^{(1,4)}=\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-0.0526&0.0472&0.0903\\0.0283&-0.1792&0.0283\\0.0903&0.0472&-0.0526\end{pmatrix}$。

2) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&3&5\\7&8&7\\5&3&5\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}=\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}0.1053&-0.0789&0.1053\\-0.1842&0.2632&-0.1842\\0.1053&-0.0789&0.1053\end{pmatrix}$。

从(1)中可以看出，当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，由 MCG 算法求得的广义中心对称{1, 4}逆就是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵；从(2)中可以看出，当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时，则 MCG 算法能在 2 步迭代计算求得 $\boldsymbol{A}$ 广义中心对称{1, 4}逆。

例 2 取矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如下，按 MCG 算法计算步骤求得矩阵方程组(2)的广义中心对称{1, 4}逆，结果如表 1 (Matlab 软件 2016 版-PIV3.0GHZ 微机)：

$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(a_{ij}\right)$，其中 $a_{ij}=\left(i-j\right)^2,\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$， $\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S}$

**Table 1.** The results of the generalized centrosymmetry {1, 4} inverse of equations (2)
**表 1.** 方程组(2)的广义中心对称{1, 4}逆计算结果

| $n$ | time | $k_1$ | $k_{12}$ | error |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9.2000e−05 | 3 | 0 | 3.7904e−20 |
| 30 | 1.9140e−04 | 3 | 0 | 6.5706e−16 |
| 50 | 4.5270e−04 | 3 | 0 | 9.2889e−13 |
| 70 | 4.9270e−04 | 3 | 0 | 7.1152e−13 |

从表 1 结果可以看出，文中建立的 MCG 算法求广义中心对称{1, 4}逆具有很高的计算效率。

## 5. 小结

广义逆求解算法多种多样，如对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩分解、奇异值分解等，也可以建立求广义逆递归计算公式，各种算法在满足某些条件下均能求出矩阵的广义逆。本文建立的求中心对称矩阵{1, 4}逆的 MCG 算

法无意与其他算法做比较，只是给出一种求中心对称矩阵中心对称{1, 4}逆的迭代算法，该算法使用范围广，对矩阵 ***A*** 限制条件少，修改算法中某些矩阵，也可以建立方阵其他特殊解的 MCG 算法。

## 基金项目

2019 年福建省教育厅中青年教师教育科研项目：(JAT190410)。

## 参考文献

[1] 刘红伟. 求对称矩阵广义逆的新算法[J]. 贵州大学学报(自然科学版), 2013, 30(1): 10-12.

[2] 郭志荣, 黄强联, 张莉. 线性空间中代数广义逆的最简表示[J]. 数学杂志, 2017, 37(5): 1013-1021.

[3] 梁少辉, 赵彬. Quantale 矩阵的广义逆及其正定性[J]. 模糊系统与数学, 2009, 23(5): 41-47.

[4] 柯圆圆, 陈建龙. (b, c)-逆及其应用[J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, 55(1): 70-73.

[5] 欧阳光. 广义逆矩阵及其计算方法[J]. 湘南学院学报, 2020, 41(2): 1-4.

[6] 何楚宁, 欧阳柏玉. [A, B]行块矩阵 penrose 型广义逆的充要条件[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(21): 190-196.

[7] Stanimirovic, P.S., Roy, F., Gupta, D.K. and Srivastava, S. (2020) Computing the Moore-Penrose Inverse Using Its Error Bounds. *Applied Mathematics and Computation*, **371**, 124957. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124957

[8] Beltrametti, M.C., Sendra, J.R., Sendra, J. and Torrente, M. (2020) Moore-Penrose Approach in the Hough Transform Framework. *Applied Mathematics and Computation*, **375**, 125083. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125083

[9] Sendra, J.R. and Sendra, J. (2017) Computation of Moore-Penrose Generalized Inverses of Matrices with Meromorphic Function Entries. *Applied Mathematics and Computation*, **313**, 355-366. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.06.007