

一维双曲守恒律方程的保极值间断有限体积元方法

陈浩, 高巍

内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特
Email: Chenhao2209@126.com

收稿日期: 2020年10月25日; 录用日期: 2020年11月11日; 发布日期: 2020年11月18日

摘要

本文利用间断有限体积元方法求解双曲守恒律方程。为克服传统TVD限制器的精度损失问题, 本文采用了保极值限制器。时间离散上采用了三阶的SSP Runge-Kutta方法。经典算例结果验证了本方法计算的有效性和精度。

关键词

间断有限体积元方法, 斜率限制器, Runge-Kutta时间离散, 双曲守恒律

A Maximum-Principle Satisfying Discontinuous Finite Volume Element Scheme for One-Dimensional Hyperbolic Conservation Laws

Hao Chen, Wei Gao

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: Chenhao2209@126.com

Received: Oct. 25th, 2020; accepted: Nov. 11th, 2020; published: Nov. 18th, 2020

Abstract

In the article, we present a discontinuous finite volume element method for solving hyperbolic

conservation laws. A maximum-principle satisfying limiter is adopted to keep accuracy. The time discretization is based on third order SSP Runge-Kutta scheme. Typical test cases show the effectiveness and accuracy of the present scheme.

Keywords

Discontinuous Finite Volume Element Method, Slope Limiter, Runge-Kutta Time Discretization, Hyperbolic Conservation Laws

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

双曲方程作为偏微分方程中的一类重要方程, 其解中往往出现间断, 因此对于数值方法提出很大挑战。针对双曲守恒律方程, 一系列的格式被提出和发展, 例如 Godunov 格式[1], Lax-Friedrichs 格式[2], 总变差递减(Total Variation Diminishing, TVD) [3] [4], 总变差有界(Total Variation Bounded, TVB) [5], 加权本质无震荡格式(Weighted Essentially Non-Oscillatory, WENO) [6]等。

间断有限体积元方法最早在 2004 年[7]中被 YeXiu 提出, 作者将有限体积元方法与 DG 方法结合, 针对椭圆问题提出了间断有限体积元方法。之后, 毕春加将此方法推广到了抛物问题及双曲问题[8] [9]。该方法不仅构造简单, 还具备保持物理量间局部守恒、可以处理复杂边界、可并行计算等优点, 发展前景广阔。在 2009 年, 陈大伟等借鉴了控制体积有限元方法与龙格-库塔间断有限元方法, 提出龙格-库塔控制体积间断有限元方法(Runge-Kutta Control Volume Discontinuous Finite Element Method, RKCVD FEM), 保证了数值解的局部守恒性且可以很好的处理激波间断问题。但 RKCVD FEM 使用了 minmod 限制器, 由于该限制器中参数 M 的选取依赖于不同的问题, 从而限制了方法的适用范围。

区别于传统的间断有限体积元方法[10] [11] [12] [13] [14], 本文基于 SSP Runge-Kutta 时间离散方法, 采用 MPS (Maximum-principle-satisfying)的高阶精度限制器, 构造了保极值间断有限体积元方法来求解双曲守恒律方程, 并通过经典数值算例来验证方法的可行性与高效性。

2. 格式的构造

2.1. 空间离散

一维守恒律方程

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases}$$

这里的 f 是流通量函数。剖分定义域, 令 $x_{i-1/2}$ 为剖分节点, 第 i 个单元记为 $I_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, 单元长度为 $h = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ 。在每个控制单元 I_i 上依次选取 3 个插值节点, 分别记为 $x_{i-1/2}, x_i, x_{i+1/2}$, 围绕插值节点选取控制体积, 三个控制单元分别记为 $I_{i-1/2}^* = (x_{i-1/2}, x_{i-1/4})$, $I_i^* = (x_{i-1/4}, x_{i+1/4})$, $I_{i+1/2}^* = (x_{i+1/4}, x_{i+1/2})$, 试探函数空间 U_h 选为线性元空间, 相应的基函数选取为 Lagrange 基函数。选取的基函数记为 $\varphi_j^{(l)}$, 则单元形状函数 u_h 为

$$u_h(x, t) = \sum_{l=1}^3 u_j^{(l)} \varphi_j^{(l)}(x)$$

选取检验函数为控制单元 I^* 上的分片常数函数, 相应的基函数

$$\psi_j^l = \begin{cases} 1, \forall x \in I^* \\ 0, \text{其它} \end{cases}, l = 1, 2, 3$$

从原方程出发进行空间离散。先在方程两边同时乘以检验函数 v , 并在一个单元 I_i 上做积分, u 用 u_h 来代替

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\int_{I_{i-1/2}^*} \varphi_j^{(1)} dx * u_j^{(1)} + \int_{I_{i-1/2}^*} \varphi_j^{(2)} dx * u_j^{(2)} + 0 \right) = f_{i-1/2} - f_{i-1/4} \\ \frac{d}{dt} \left(\int_{I_i^*} \varphi_j^{(1)} dx * u_j^{(1)} + \int_{I_i^*} \varphi_j^{(2)} dx * u_j^{(2)} + \int_{I_i^*} \varphi_j^{(3)} dx * u_j^{(3)} \right) = f_{i-1/4} - f_{i+1/4} \\ \frac{d}{dt} \left(0 + \int_{I_{i+1/2}^*} \varphi_j^{(2)} dx * u_j^{(2)} + \int_{I_{i+1/2}^*} \varphi_j^{(3)} dx * u_j^{(3)} \right) = f_{i+1/4} - f_{i+1/2} \end{cases}$$

其中 $f_{i\pm 1/4} = f(u_h(x_{i\pm 1/4}, t))$, 即 $f_{i\pm 1/4}$ 就是把 $x_{i\pm 1/4}$ 带入单元形状函数 u_h 中求得, 而又由于 $f_{i\pm 1/2}$ 无定义, 故本文采用 Lax-Friedrichs 数值流通量来定义 $f_{i\pm 1/2}$

$$f \langle u^-, u^+ \rangle = \frac{1}{2} [f(u^-) + f(u^+) - C(u^+ - u^-)]$$

其中 $C = \max_u |f'(u)|$ 。整理方程组得

$$A * \frac{du_h}{dt} = g, \quad u_h = \begin{pmatrix} u_j^{(1)} \\ u_j^{(2)} \\ u_j^{(3)} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \frac{f_{i-1/2} - f_{i-1/4}}{h} \\ \frac{f_{i-1/4} - f_{i+1/4}}{h} \\ \frac{f_{i+1/4} - f_{i+1/2}}{h} \end{pmatrix}$$

当基函数取线性元与二次元分别对应的矩阵 A 如下

$$A_{(p^1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}, \quad A_{(p^2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{48} & \frac{-1}{48} \\ \frac{1}{48} & \frac{11}{24} & \frac{1}{48} \\ \frac{-1}{48} & \frac{5}{48} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

2.2. 斜率限制器

保极值的限制器

为了抑制数值振荡, 引入 MPS (Maximum-principle-satisfying) 高阶精度限制器。

$$\tilde{u}_j(x) = \theta(u_j(x) - \bar{u}_j) + \bar{u}_j, \quad \theta = \min \left\{ \left| \frac{u_{\max} - \bar{u}_j}{M_j - \bar{u}_j} \right|, \left| \frac{u_{\min} - \bar{u}_j}{m_j - \bar{u}_j} \right|, 1 \right\}$$

$$M_j = \max_{x \in I_j} u_j(x), \quad m_j = \min_{x \in I_j} u_j(x)$$

其中 $\bar{u}_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} u_j(x) dx = \sum_{\delta=1}^N \omega_\delta u_j(x)$, 设 ω_δ 是区间 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上的正交权重, 可以令 $\sum_{\delta=1}^N \omega_\delta = 1$ 。

在该限制器中 u_j 表示在 t_n 时刻单元上的数值解, 其单元平均值 \bar{u}_j 属于区间 $[u_{\min}, u_{\max}]$, 参考[15][16]。Shu 在[17]中证明了该限制器不会破坏高阶的精度。

2.3. 时间离散

半离散后得到常微分方程组, 使用 SSP Runge-Kutta 格式[18]

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t \cdot L(u^n) \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \cdot L(u^{(1)}) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \cdot L(u^{(2)}) \end{aligned}$$

3. 算例

3.1. 算例 1 线性对流方程

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(\pi x) \end{cases}$$

计算讨论在周期边界条件下的该算例在相同时间下, 基函数分别为线性元、二次元时, 它们的误差与收敛阶。计算结果见表 1 和表 2。

Table 1. $t = 0.1, p^1$

表 1. 线性元下算例 1 的数值误差和收敛阶

Scheme	Grids	L_1 error	L_1 order	L_∞ error	L_∞ order
p^1	40	7.7464×10^{-4}	—	6.0693×10^{-4}	—
	80	1.9424×10^{-4}	1.9961	1.5255×10^{-4}	1.9926
	160	4.6004×10^{-5}	2.0784	3.6124×10^{-5}	2.0786
	320	1.1500×10^{-5}	2.0005	9.0394×10^{-6}	1.9993
	640	3.0174×10^{-6}	1.9306	2.3641×10^{-6}	1.9349

Table 2. $t = 0.1, p^2$

表 2. 二次元下算例 1 的数值误差和收敛阶

Scheme	Grids	L_1 error	L_1 order	L_∞ error	L_∞ order
p^2	40	7.8257×10^{-4}	—	1.2529×10^{-3}	—
	80	9.7962×10^{-5}	2.9985	1.5995×10^{-4}	2.9702
	160	1.2319×10^{-5}	2.9919	2.0824×10^{-5}	2.9418
	320	1.5768×10^{-6}	2.9664	2.8129×10^{-6}	2.8887
	640	2.1549×10^{-6}	2.8719	4.0568×10^{-7}	2.7942

通过例子可以看出, 对于 p^1 元, 实际计算可以达到二阶精度, 而对 p^2 元, 计算可以达到三阶精度。

3.2. 算例 2 Burgers 方程

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(\pi x) \end{cases}$$

边界条件选取周期边界条件, 在 $t = \frac{1}{\pi} \approx 0.3183$ 时出现激波。由图 1~2 可知当 $t = 0.3$ 时结果没有激波出现, 由图 3~6 可知当 $t = \frac{2}{\pi}$ 和 $t = 1.1$ 时, 结果出现激波。可以看到数值解在间断附近有好的分辨率。

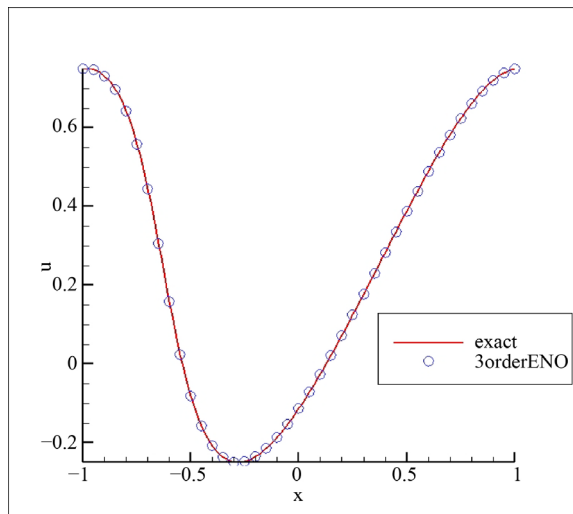


Figure 1. $t = 0.3, \Delta x = \frac{1}{30}$

图 1. 剖分 60 份时的示意图, $t = 0.3$

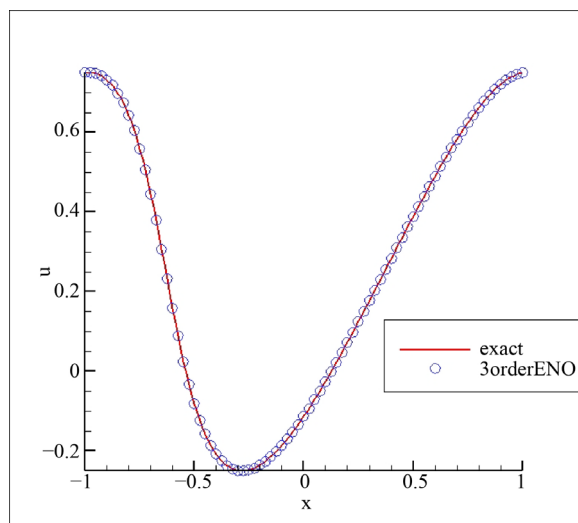


Figure 2. $t = 0.3, \Delta x = \frac{1}{50}$

图 2. 剖分 100 份时的示意图, $t = 0.3$

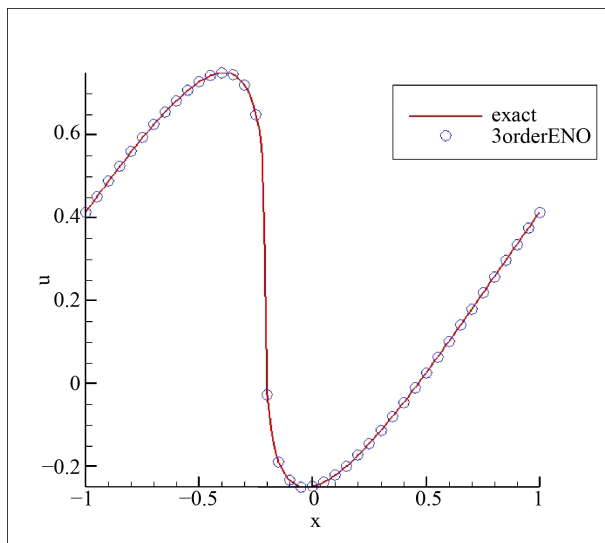


Figure 3. $t = \frac{2}{\pi}$, $\Delta x = \frac{1}{30}$

图 3. 剖分 60 份时的示意图, $t = \frac{2}{\pi}$

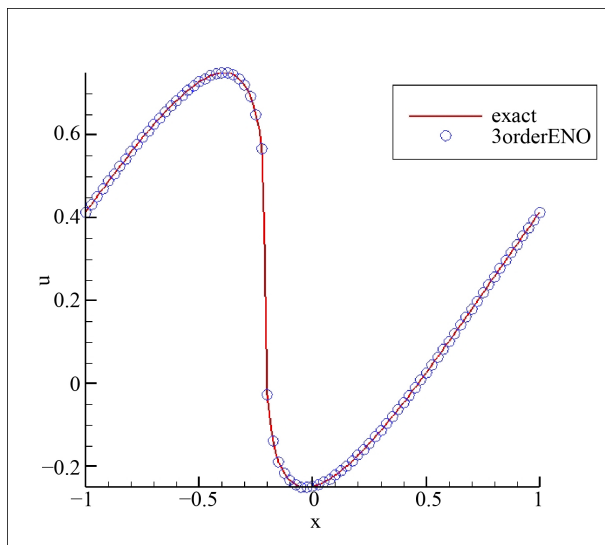


Figure 4. $t = \frac{2}{\pi}$, $\Delta x = \frac{1}{50}$

图 4. 剖分 100 份时的示意图, $t = \frac{2}{\pi}$

3.3. 算例 3 Buckley-Leverett 方程

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{4u^2}{4u^2 + (1-u)^2} \right)_x = 0 \\ u_0 = \begin{cases} 1 & -0.5 < x < 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \end{cases}$$

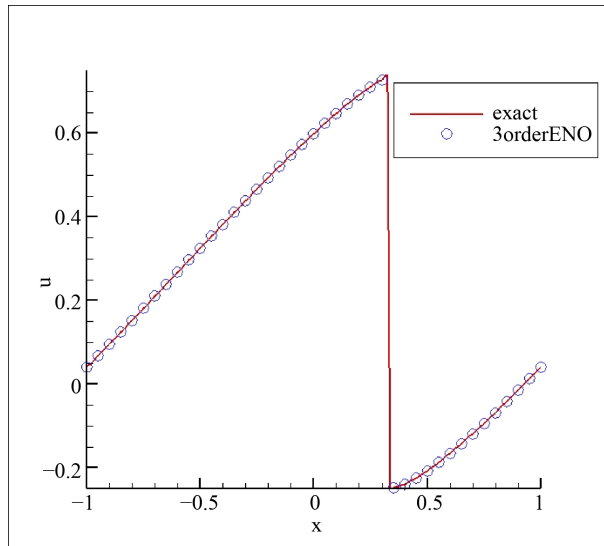


Figure 5. $t = 1.1$, $\Delta x = \frac{1}{30}$

图 5. 剖分 60 份时的示意图, $t = 1.1$

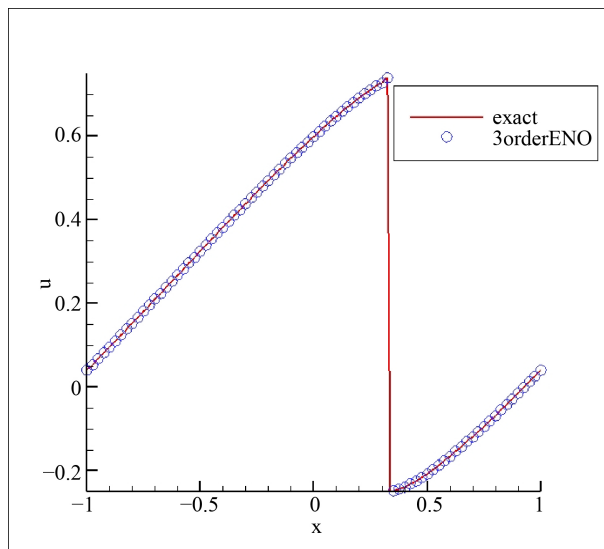


Figure 6. $t = 1.1$, $\Delta x = \frac{1}{50}$

图 6. 剖分 100 份时的示意图, $t = 1.1$

由图 7~8 可知, 通过比较数值解与五阶 WENO 格式下的参考解可以发现, 保极值间断有限体积元方法下的数值解在大梯度处无震荡, 而且与参考解有完全类似地良好计算效果。

3.4. 算例 4 交通流问题

考虑一段 20 km 长的公路, 入口的密度是 50 veh/km。(入口密度用单位长度路段内的车辆总数来表示)对于所给出的初值条件, 我们考虑入口条件变化。在两个小时段分析, 最初 10 分钟入口关闭, 10 分钟到 30 分钟, 提高到入口密度 75 veh/km, 30 分钟后入口密度恢复到 50 veh/km。初值条件见图 9。

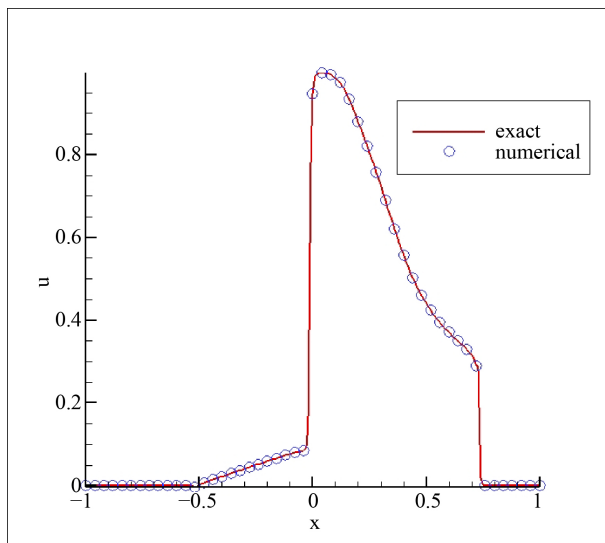


Figure 7. $t = 0.6, \Delta x = \frac{1}{20}$

图 7. 剖分 40 份时的示意图, $t = 0.6$

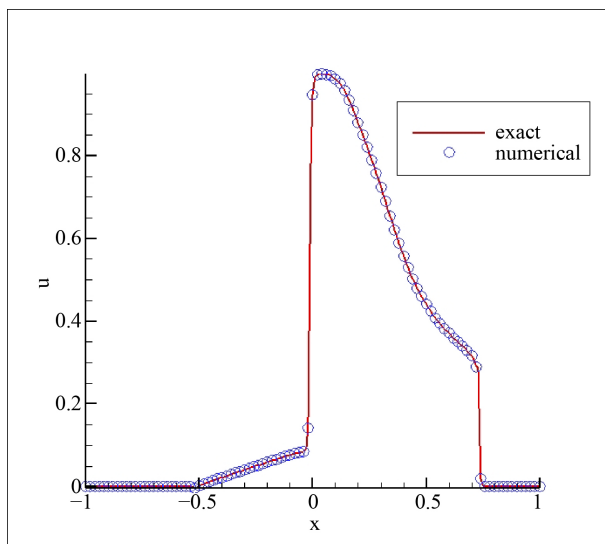


Figure 8. $t = 0.6, \Delta x = \frac{1}{40}$

图 8. 剖分 80 份时的示意图, $t = 0.6$

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u_0 = \begin{cases} 50 & 0 \leq x < 10 \\ 350 & 10 \leq x < 15 \\ 1400 - 70x & 15 \leq x < 20 \end{cases} \\ f(u) = \begin{cases} -0.4u^2 + 100u & 0 \leq u < 50 \\ -0.1u^2 + 15u + 3500 & 50 \leq u < 100 \\ -0.024u^2 - 5.2u + 4760 & 100 \leq u < 350 \end{cases} \end{cases}$$

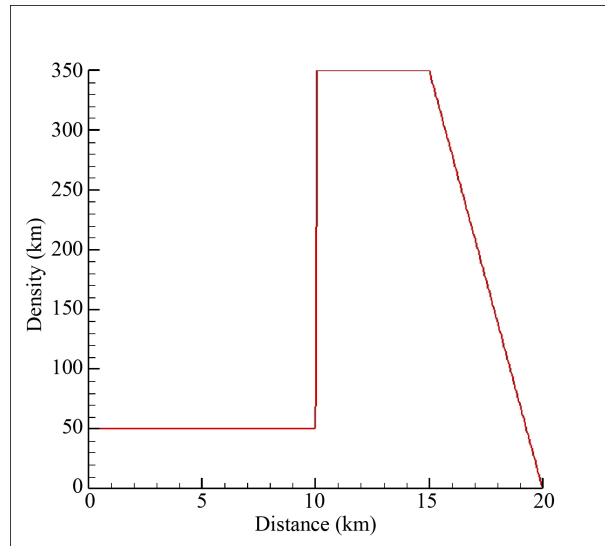


Figure 9. $t = 0$, $\Delta x = \frac{1}{5}$
图 9. 算例 4 的初始条件

计算结果见图 10~13, 在本算例中, 分析了 90 分钟内因入口条件变化导致的交通流问题, 通过将各个时间节点的车流密度变化图与该算例的准确解作对比, 可以看出吻合情况较好。

4. 结论

本文研究了保极值的间断有限体积元方法, 通过使用 MPS 的限制器使其保持高阶精度, 守恒的同时又能满足极值原理。通过计算结果进行对比分析, 证实了该保极值的间断有限体积元方法具有其理论设计的高精度和对间断高分辨率的特性。

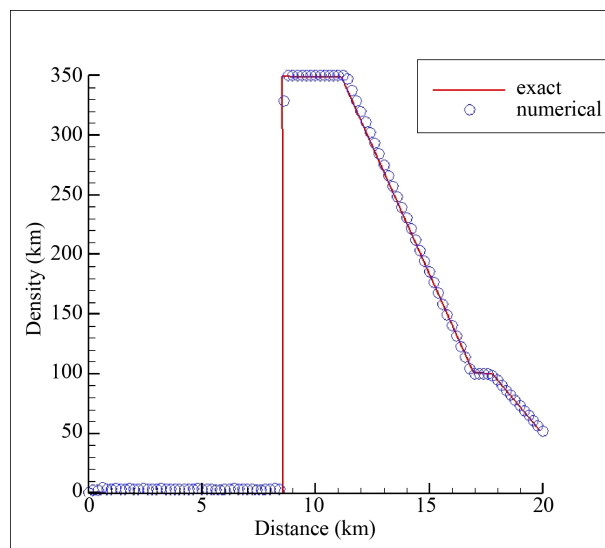


Figure 10. $t = 10 \text{ min}$, $\Delta x = \frac{1}{5}$
图 10. $t = 10 \text{ min}$ 时的示意图

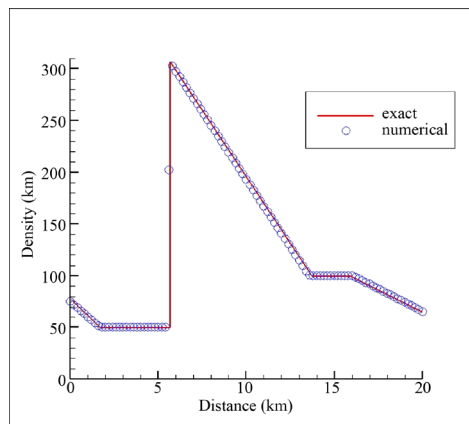


Figure 11. $t = 30 \text{ min}$, $\Delta x = \frac{1}{5}$

图 11. $t = 30 \text{ min}$ 时的示意图

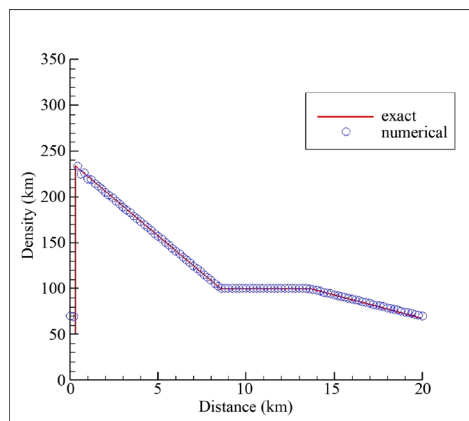


Figure 12. $t = 60 \text{ min}$, $\Delta x = \frac{1}{5}$

图 12. $t = 60 \text{ min}$ 时的示意图

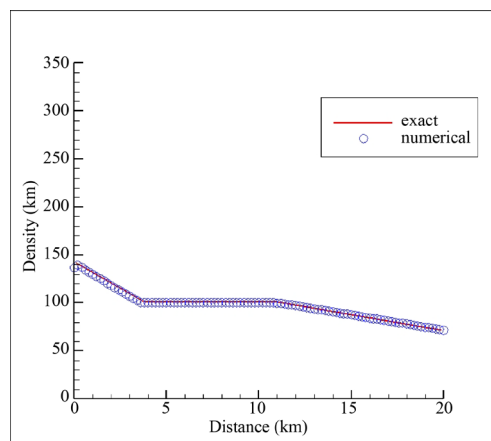


Figure 13. $t = 90 \text{ min}$, $\Delta x = \frac{1}{5}$

图 13. $t = 90 \text{ min}$ 时的示意图

基金

内蒙古大学科研发展基金(21100-5187133); 内蒙古自治区人才开发基金项目(12000-1300020240)。

参考文献

- [1] Godunov, S.K. (1959) A Difference Method for Numerical Calculation of Discontinuous Solutions of the Equations of Hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik*, **89**, 271-306.
- [2] Friedrichs, K.O. and Lax, P.D. (1971) Systems of Conservation Equations with a Convex Extension. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **68**, 1686-1688. <https://doi.org/10.1073/pnas.68.8.1686>
- [3] Cockburn, B. and Shu, C. (1989) TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws II: General Framework I. *Mathematics of Computation*, **52**, 411-435. <https://doi.org/10.2307/2008474>
- [4] 王文龙, 李桦, 刘枫, 等. 基于 TVD 思想的高阶迎风紧致格式[J]. 国防科技大学学报, 2013, 35(6): 9-14.
- [5] Shu, C.W. (1987) TVB Uniformly High-Order Schemes for Conservation Laws. *Mathematics of Computation*, **49**, 105-121. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1987-0890256-5>
- [6] Liu, X., Osher, S. and Chan, T. (1994) Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes. *Journal of Computational Physics*, **115**, 200-212. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187>
- [7] Ye, X. (2004) A New Discontinuous Finite Volume Method for Elliptic Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **42**, 1062-1072. <https://doi.org/10.1137/S0036142902417042>
- [8] Bi, C.J. and Geng, J.Q. (2009) Discontinuous Finite Volume Element Method for Parabolic Problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **26**, 367-383. <https://doi.org/10.1002/num.20437>
- [9] 耿家强, 毕春加. 二阶双曲方程的间断有限体积元方法[J]. 烟台大学学报, 2009, 22(2): 97-101.
- [10] 陈大伟. 求解双曲守恒律的龙格 - 库塔控制体积间断有限元方法(RKCVDFEM) [D]: [硕士学位论文]. 绵阳: 中国工程物理研究院, 2009:11-40.
- [11] 李珍珍, 蔚喜军, 赵国忠, 等. RKDG 有限元法求解一维拉格朗日形式的 Euler 方程[J]. 计算物理, 2014, 31(1): 1-10.
- [12] 朱倩倩, 范丽丽. 一维水击方程的间断有限元方法[J]. 武汉工业学院学报, 2013, 32(3): 61-63+73.
- [13] 张筱筱. 对流扩散方程的迎风间断体积元模拟[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东师范大学, 2010.
- [14] 胡健伟, 田春松. 对流 - 扩散问题的 Galerkin 部分迎风有限元方法[J]. 计算数学, 1992(4): 446-459.
- [15] 任晓栋, 顾春伟. 基于间断有限元方法的紧致限制器研究[J]. 工程热物理学报, 2013, 34(9): 1635-1639.
- [16] 魏少华, 张绪久. 基于 Runge-Kutta 不连续 Galerkin 方法的斜率限制器[J]. 科学技术与工程, 2017, 17(24): 112-115.
- [17] 舒其望. 计算流体力学中的间断 Galerkin 方法述评(英文) [J]. 力学进展, 2013, 43(6): 541-554.
- [18] 孟雄, 舒其望, 杨扬. 发展型偏微分方程间断有限元方法的超收敛性献给林群教授 80 华诞[J]. 中国科学: 数学, 2015, 45(7): 1041-1060.