Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(8), 1115-1123**
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.98131

Hans汉斯

The Generalized Inverse Computing Method of a Class of Block Matrixequations

Jinfeng Lai, Tangwei Liu, Amin Tang, Shuo Chen

East China University of Technology, Nanchang Jiangxi
Email: 2425849163@qq.com, 595109035@qq.com

Received: Jul. 15th, 2020; accepted: Jul. 28th, 2020; published: Aug. 4th, 2020

Abstract

In this paper, the generalized inverse of a class of block matrix is discussed. By using the minus inverse of block matrix, the solution formula of a special matrix equation is given. Based on the properties of the minus inverse and the block matrix operation, the calculation process of the generalized inverse of a class of 2 × 2 block matrices is presented. And the method of solving the generalized inverse of a kind of block matrix by elementary transformation method is discussed. Then the method is applied to solving the equations. Finally, a numerical example is discussed, and the generalized inverse of 2 × 2 block matrix is extended to a special case of 4 × 4 block matrix.

Keywords

Partitioned Matrix, Generalized Inverse Matrix, Computing Method, Equations, Elementary Transformation

一类分块矩阵方程的广义逆求解方法

赖金凤，刘唐伟，唐阿敏，陈　硕

东华理工大学，江西　南昌
Email: 2425849163@qq.com, 595109035@qq.com

收稿日期：2020年7月15日；录用日期：2020年7月28日；发布日期：2020年8月4日

摘　要

本文讨论了一类分块矩阵的广义逆，利用分块矩阵的减号逆，给出了一类特殊矩阵方程的求解公式。基于减号逆的性质，结合分块矩阵的运算，给出了一类2 × 2分块矩阵的广义逆的计算过程，探讨了利用初

文章引用：赖金凤，刘唐伟，唐阿敏，陈硕．一类分块矩阵方程的广义逆求解方法[J]．应用数学进展，2020，9(8): 1115-1123. DOI: 10.12677/aam.2020.98131

等变换法求解一类分块矩阵的广义逆的方法，并应用于方程组的求解。最后给出了数值计算例子，并将 2 × 2分块矩阵的广义逆的计算方法推广应用到了一类特殊的4 × 4分块矩阵的情形。

关键词

分块矩阵，广义逆矩阵，计算方法，方程组，初等变换

1. 引言

在微分方程数值求解及优化问题求解中，经常会出现分块矩阵方程，广义逆矩阵在分块矩阵方程的求解中具有重要作用，分块矩阵的广义逆的求解具有重要意义[1]。在已有研究中，很多学者对分块矩阵的一些广义逆给出了不同表达式[2] [3]。但是，某些特殊块矩阵的广义逆仍然很难计算[4]。本文探讨了 2 × 2 分块矩阵的广义逆的计算，推导了有效的计算公式，并应用于分块矩阵方程的求解，该方法能较大地降低矩阵方程求解的计算量。

2. 一类 2 × 2 分块矩阵的广义逆

2.1. 逆矩阵的基本概念

块矩阵[5]的逆矩阵有多种，例如减号逆，加号逆[6]，最小二乘广义逆[7]，自反广义逆和最小范数广义逆[8]。在本文中，我们考虑四分块矩阵的减号逆[9]。

对于矩阵 $A \in F^{m\times n}$，我们考虑以下公式：

$$AXA = A, \forall A \in F^{m\times n} \tag{1}$$

对于一个 $m\times n$ 的矩阵 A，如果存在一个矩阵 X 满足(1)，那么矩阵 X 称为 A 矩阵的减号逆 A^{-1}，对任意的 $A \in F^{m\times n}$，A^{-1} 存在。

2.2. 2 × 2 分块矩阵减号逆

在求解如下离散方程组(2)时[10]，会涉及到分块矩阵的求逆问题[11]

$$\begin{bmatrix} A & C^{\mathrm{T}} \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U \\ -P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \tag{2}$$

我们考虑以下 2×2 块矩阵的广义逆，设系数矩阵 T 为

$$T = \begin{bmatrix} A & C^{\mathrm{T}} \\ C & B \end{bmatrix} \tag{3}$$

设矩阵 T 减号逆为

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$$

方程(2)中 U，P 未知，系数矩阵 T 和右端项 F 已知，有

$$\begin{cases} AU - C^{\mathrm{T}}P = 0, \\ CU - BP = F. \end{cases} \tag{4}$$

根据减号逆的性质有

$$\begin{bmatrix} A & C^{\mathrm{T}} \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C^{\mathrm{T}} \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C^{\mathrm{T}} \\ C & B \end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{cases} AX_1A + AX_2C + C^{\mathrm{T}}X_3A + C^{\mathrm{T}}X_4C = A, \\ AX_1C^{\mathrm{T}} + AX_2B + C^{\mathrm{T}}X_3C^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}}X_4B = C^{\mathrm{T}}, \\ CX_1A + CX_2C + BX_3A + BX_4C = C, \\ CX_1C^{\mathrm{T}} + CX_2B + BX_3C^{\mathrm{T}} + BX_4B = B. \end{cases} \tag{5}$$

在(5)中的第1、3个等式左右同乘以U，第2、4个等式左右同乘以P有

$$\begin{cases} AX_1AU + AX_2CU + C^{\mathrm{T}}X_3AU + C^{\mathrm{T}}X_4CU = AU, \\ AX_1C^{\mathrm{T}}P + AX_2BP + C^{\mathrm{T}}X_3C^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}X_4BP = C^{\mathrm{T}}P, \\ CX_1AU + CX_2CU + BX_3AU + BX_4CU = CU, \\ CX_1C^{\mathrm{T}}P + CX_2BP + BX_3C^{\mathrm{T}}P + BX_4BP = BP. \end{cases} \tag{6}$$

因为 $AU - C^{\mathrm{T}}P = 0$， $CU - BP = F$， 可得

$$\begin{cases} AX_1C^{\mathrm{T}}P + AX_2CU + C^{\mathrm{T}}X_3C^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}X_4CU = AU, \\ AX_1C^{\mathrm{T}}P + AX_2BP + C^{\mathrm{T}}X_3C^{T}P + C^{\mathrm{T}}X_4BP = C^{\mathrm{T}}P, \\ CX_1C^{\mathrm{T}}P + CX_2CU + BX_3C^{\mathrm{T}}P + BX_4CU = CU, \\ CX_1C^{\mathrm{T}}P + CX_2BP + BX_3C^{\mathrm{T}}P + BX_4BP = BP. \end{cases} \tag{7}$$

在(7)中第一个等式减去第二个等式，第三个等式减去第四个等式得

$$\begin{cases} AX_2F + C^{\mathrm{T}}X_4F = 0, \\ CX_2F + BX_4F = 0. \end{cases} \tag{8}$$

化成矩阵形式得

$$\begin{pmatrix} A & C^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & B \end{pmatrix}\begin{bmatrix} X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \tag{9}$$

下面讨论$\begin{pmatrix} A & C^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & B \end{pmatrix}^{-}$的求解：

设 $A \in C^{p\times m}$， $C \in C^{q\times m}$，形如$\left(A \vdots C^{\mathrm{T}}\right)$的矩阵叫做列分块矩阵，以下讨论列分块矩阵的减号逆。对矩阵$\left(A \vdots C^{\mathrm{T}}\right)$作初等变换[7]有

$$\begin{pmatrix} A^{-} \\ E_m \end{pmatrix}\left(A \vdots C^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} E_p & -A^{-}C^{\mathrm{T}} \\ 0 & E_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-}A & A^{-}\left(E_n - A^{-}A\right)C^{\mathrm{T}} \\ A & \left(E_n - A^{-}A\right)C^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

令

$$D_1=\left(E_n-A^-A\right)C^{\mathrm{T}}，\quad H=\begin{pmatrix} A^-A & A^-\left(E_n-A^-A\right)C^{\mathrm{T}} \\ A & \left(E_n-A^-A\right)C^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

有 $AA^-D_1=D_1=AA^-\left(E_n-AA^-\right)C^{\mathrm{T}}=\left(AA^--AA^-AA^-\right)C^{\mathrm{T}}=\left(AA^--AA^-\right)C^{\mathrm{T}}=0$，

令 $X=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -D_1^-A & D_1^- \end{pmatrix}$，有

$$\begin{aligned}
HXH&=\begin{pmatrix} A^-A & A^-\left(E_n-AA^-\right)C^{\mathrm{T}} \\ A & \left(E_n-AA^-\right)C^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -D_1^-A & D_1^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^-A & A^-\left(E_n-AA^-\right)C^{\mathrm{T}} \\ A & \left(E_n-AA^-\right)C^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} A^-A & A^-D_1 \\ A & D_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -D_1^-A & D_1^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^-A & A^-D_1 \\ A & D_1 \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} \left(A^-A-A^-D_1D_1^-A\right)A^-A+A^-D_1D_1^-A & \left(A^-A-A^-D_1D_1^-A\right)A^-D_1+A^-D_1D_1^-D_1 \\ \left(A-D_1D_1^-A\right)A^-A+D_1D_1^-A & \left(A-D_1D_1^-A\right)A^-D_1+D_1D_1^-D_1 \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} A^-A & A^-D_1 \\ A & D_1 \end{pmatrix}=H
\end{aligned}$$

又 $\begin{pmatrix} A^- \\ E_m \end{pmatrix}$ 为列满秩阵，$\begin{pmatrix} E_p & -A^-C^{\mathrm{T}} \\ 0 & E_q \end{pmatrix}$ 为可逆阵。

又有

$$\left(A\vdots C^{\mathrm{T}}\right)\begin{pmatrix} E_p & -A^-C^{\mathrm{T}} \\ 0 & E_q \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} A^- \\ E_m \end{pmatrix}\left(A\vdots C^{\mathrm{T}}\right)=\left(A\vdots C^{\mathrm{T}}\right), \tag{11}$$

所以有

$$\left(A\vdots C^{\mathrm{T}}\right)^-=\begin{pmatrix} E_p & -A^-C^{\mathrm{T}} \\ 0 & E_q \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} A^- \\ E_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^--A^-C^{\mathrm{T}}D_1^-\left(E_m-AA^-\right) \\ D_1^-\left(E_m-AA^-\right) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

同理有

$$\left(C\vdots B\right)^-=\begin{pmatrix} C^--C^-BD_2^-\left(E_m-CC^-\right) \\ D_2^-\left(E_m-CC^-\right) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中 $D_1=\left(E_n-AA^-\right)C^{\mathrm{T}}$，$D_2=\left(E_n-CC^-\right)B$。

然后有

$$\begin{bmatrix} A & C^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & B \end{bmatrix}^-=\begin{bmatrix} \left(A \quad C^{\mathrm{T}}\right)^- & 0 \\ 0 & \left(C \quad B\right)^- \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} A & C^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & B \end{bmatrix}^-=\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A^--A^-C^{\mathrm{T}}D_1^-\left(E_m-AA^-\right) \\ D_1^-\left(E_m-AA^-\right) \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} C^--C^-BD_2^-\left(E_m-CC^-\right) \\ D_2^-\left(E_m-CC^-\right) \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

同理得

$$\begin{bmatrix} F & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix}^{-} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ F \end{bmatrix}^{-} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} F \\ F \end{bmatrix}^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{-} & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} F^{-} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

因此有

$$\begin{bmatrix} X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A & C^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & B \end{pmatrix}^{-} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix}^{-}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A^{-} - A^{-}C^{\mathrm{T}}D_1^{-}\left(E_m - AA^{-}\right) \\ D_1^{-}\left(E_m - AA^{-}\right) \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} C^{-} - C^{-}BD_2^{-}\left(E_m - CC^{-}\right) \\ D_2^{-}\left(E_m - CC^{-}\right) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{-} & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} F^{-} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

设 $X_2 = \left(C^{-} - C^{-}BD_2^{-}\left(E_m - CC^{-}\right)\right)FF^{-}$， $X_4 = \left(D_2^{-}\left(E_m - CC^{-}\right)\right)FF^{-}$。

然后有

$$\begin{bmatrix} A & C^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & C^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & C^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & C^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(C^{-} - C^{-}BD_2^{-}\left(E_m - CC^{-}\right)\right)FF^{-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_2^{-}\left(E_m - CC^{-}\right)FF^{-} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

$$= \begin{bmatrix} A - AX_2C - C^{\mathrm{T}}X_4C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{\mathrm{T}} - AX_2B - C^{\mathrm{T}}X_4B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C - CX_2C - BX_4C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B - CX_2B - BX_4B \end{bmatrix}$$

用同样的方法有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ 0 & X_3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}A & C^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\left(A-AX_2C-C^{\mathrm{T}}X_4C\right)\begin{bmatrix}A\\ A\end{bmatrix}^{-}\\ &=\begin{pmatrix}A^{-}-A^{-}C^{\mathrm{T}}D_1^{-}\left(E_m-AA^{-}\right)\\ D_1^{-}\left(E_m-AA^{-}\right)\end{pmatrix}\left(A-AX_2C-C^{\mathrm{T}}X_4C\right)\begin{bmatrix}A^{-} & 0\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\left(A^{-}-A^{-}C^{\mathrm{T}}D_1^{-}\left(E_m-AA^{-}\right)\right)\left(A-AX_2C-C^{\mathrm{T}}X_4C\right)A^{-} & 0\\ \left(D_1^{-}\left(E_m-AA^{-}\right)\right)\left(A-AX_2C-C^{\mathrm{T}}X_4C\right)A^{-} & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{16}$$

然后设

$$\begin{aligned}X_1 &= \left(A^{-}-A^{-}C^{\mathrm{T}}D_1^{-}\left(E_m-AA^{-}\right)\right)\left(A-AX_2C-C^{\mathrm{T}}X_4C\right)A^{-}\\ &= M\left(A-A\left(C^{-}-C^{-}BD_2^{-}\left(E_m-CC^{-}\right)\right)FF^{-}C-C^{\mathrm{T}}\left(D_2^{-}\left(E_m-CC^{-}\right)\right)FF^{-}C\right)A^{-}\end{aligned} \tag{17}$$

$$X_3=0,$$

其中 $M=\left(A^{-}-A^{-}C^{\mathrm{T}}D_1^{-}\left(E_m-AA^{-}\right)\right)$。

因此，有以下公式

$$\begin{bmatrix}A & C^{\mathrm{T}}\\ C & B\end{bmatrix}^{-}=\begin{bmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1 & \left(C^{-}-C^{-}BD_2^{-}\left(E_m-CC^{-}\right)\right)FF^{-}\\ 0 & \left(D_2^{-}\left(E_m-CC^{-}\right)\right)FF^{-}\end{bmatrix} \tag{18}$$

其中

$$X_1=\left(A^{-}-A^{-}C^{\mathrm{T}}D_1^{-}\left(E_m-AA^{-}\right)\right)\left(A-A\left(C^{-}-C^{-}BD_2^{-}\left(E_m-CC^{-}\right)\right)FF^{-}C-C^{\mathrm{T}}\left(D_2^{-}\left(E_m-CC^{-}\right)\right)FF^{-}C\right)A^{-}$$

$$D_1=\left(E_n-AA^{-}\right)C^{\mathrm{T}},\quad D_2=\left(E_n-CC^{-}\right)B,$$

从而可得

$$\begin{bmatrix}U\\ -P\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & C^{\mathrm{T}}\\ C & B\end{bmatrix}^{-}\begin{bmatrix}0\\ F\end{bmatrix}。$$

2.3. 初等变换法[12]

对于任意一个分块矩阵 A，它的减号逆 A^{-} 总存在，不一定唯一，并且

$$A^{-}=\begin{cases}A^{\mathrm{T}}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)^{-1}, & \text{当}R(A)=m;\\ \left(AA^{\mathrm{T}}\right)^{-1}A^{\mathrm{T}}, & \text{当}R(A)=n;\\ C^{\mathrm{T}}\left(CC^{\mathrm{T}}\right)\left(DD^{-1}\right)D^{\mathrm{T}}, & \text{当}A=DC\text{为}A\text{满秩分解式时}.\end{cases}$$

是 A 的一个减号逆。设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$R(A)=r$，则存在可逆的 m 阶方阵 P 和 n 阶方阵 Q，使 $A=P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$，即 $P^{-1}AQ^{-1}=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=D$，令 $P^{-1}=P_1\cdots P_1, Q^{-1}=Q_1\cdots Q_S, P_i$，$Q_j\left(i=1,\cdots,l;j=1,\cdots,s\right)$ 都是初等矩阵。则有

$$P^{-1}AQ^{-1}=P_1\cdots P_1TQ_1\cdots Q_s=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$P^{-1}=P_l\cdots P_1=P_l\cdots P\cdot E_m,\quad Q^{-1}=Q_1\cdots Q_s=E_n\cdot Q_1\cdots Q_s.$$

这一过程可对下面分块矩阵施行初等变换完成

$$\begin{bmatrix} T_{m\times n} & E_m \\ E_n & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} P^{-1}T_{m\times n} & P^{-1} \\ E_n & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} P^{-1}T_{m\times n}Q^{-1} & P^{-1} \\ Q^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & P^{-1} \\ Q^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

因此 $A^{-}=Q^{-1}D^{\mathrm{T}}P^{-1}$，$G=Q^{-1}\begin{bmatrix} E_r & C \\ D & I \end{bmatrix}P^{-1}$ 是 A 的全部广义逆，其中 C,D,I 分别为任意的 $r\times(m-r)$，$(n-r)\times r$，$(n-r)\times(m-r)$ 矩阵。

3. 数值例子

当 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$，$F=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 时，求方程组 $\begin{bmatrix} A & C^{\mathrm{T}} \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U \\ -P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$。

解：系数矩阵

$$T=\begin{bmatrix} A & C^{\mathrm{T}} \\ C & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

利用初等变换理论做分块矩阵的初等变换

$$\begin{bmatrix} T & E_4 \\ E_4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & -1/5 \\ 1 & -3 & -1 & -16/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记作}} \begin{bmatrix} D & P^{-1} \\ Q^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

满足关系式 $P^{-1}TQ^{-1}=D$，因此可以求出 T 的一个减号逆为

$$T^{-}=Q^{-1}D^{\mathrm{T}}P^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0.2 & 1.4 \\ 1 & 0 & -0.2 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

再求原方程的通解

$$\begin{bmatrix} U \\ -P \end{bmatrix}=T^{-}b+\left(E-A^{-}A\right)\xi=\begin{bmatrix} 4.6 \\ -1.6 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix} -3.2 \\ 0.2 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 k_4 为任意实数，$\xi=\left(k_1,k_2,k_3,k_4\right)^{\mathrm{T}}$。

验证：由于广义逆是不唯一的，利用 matlab 直接计算，得到方程一个解

$$\begin{bmatrix} U \\ -P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C^{\mathrm{T}} \\ C & B \end{bmatrix}^{-} \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4983 \\ -1.3436 \\ 0.9691 \\ 1.2818 \end{bmatrix}$$

当 $k_4 = 1.128$，$\begin{bmatrix} U \\ -P \end{bmatrix} = T^{-}b + \left(E - A^{-}A\right)\xi = \begin{bmatrix} 4.6 \\ -1.6 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1.128 \begin{bmatrix} -3.2 \\ 0.2 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4983 \\ -1.3436 \\ 0.9691 \\ 1.2818 \end{bmatrix}$，说明该方法有效。

4. 2 × 2 分块矩阵求解的推广

已知矩阵方程[12]

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & C_1 & 0 \\ 0 & C_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ -P_1 \\ -P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

其中系数矩阵 $T = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & C_1 & 0 \\ 0 & C_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}$ 已知，下面求解 T 的广义逆。

令 $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$。

有 $A^{-} = \begin{bmatrix} A_1^{-} & 0 \\ 0 & A_2^{-} \end{bmatrix}$，$B^{-} = \begin{bmatrix} B_1^{-} & 0 \\ 0 & B_2^{-} \end{bmatrix}$，$C^{-} = \begin{bmatrix} 0 & C_1^{-} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。

$$D_1 = \left(E - AA^{-}\right)C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_1 - A_2A_2^{-}C_1 & 0 \end{bmatrix},\quad D_2 = \left(E_n - CC^{-}\right)B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix},$$

$$D_1^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_1^{-} - C_1^{-}A_2A_2^{-} & 0 \end{bmatrix},\quad D_2^{-} = \begin{bmatrix} B_1^{-} & 0 \\ 0 & B_2^{-} \end{bmatrix}.$$

$$F^{-} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^{-} = \left(\begin{bmatrix} F_1^{\mathrm{T}} & F_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{-} = \begin{bmatrix} F_1^{-} - F_1^{-}F_2P^{-}\left(E - F_1F_1^{-}\right) & P^{-}\left(E - F_1F_1^{-}\right) \end{bmatrix}$$

其中 $P = \left(E - F_1F_1^{-}\right)F_2$，$P^{-} = F_2^{-} - F_2^{-}F_1F_1^{-}$。

令

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & C_1 & 0 \\ 0 & C_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}^{-} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$$

代入公式(19)可得

$$X_1 = \begin{bmatrix} A_1^{-} - A_1^{-}C_1C_1^{-}\left(E - A_2A_2^{-}\right)\left(E - A_1A_1^{-}\right)T_3A_1^{-} & 0 \\ 0 & A_2^{-} - A_2^{-}C_1B_1^{-}F_1T_1C_1A_2^{-} \end{bmatrix}$$

$$X_2=\begin{bmatrix} C_1^-\left(E-B_2B_2^-\right)F_2\left(F_1^- - F_1^-F_2P^-\left(E-F_1F_1^-\right)\right) & C_1^-\left(E-B_2B_2^-\right)F_2\left(P^-\left(E-F_1F_1^-\right)\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3=0$$

$$X_4=\begin{bmatrix} B_1^-F_1\left(F_1^- - F_1^-F_2P^-\left(E-F_1F_1^-\right)\right) & B_1^-F_1\left(P^-\left(E-F_1F_1^-\right)\right) \\ B_2^-F_2\left(F_1^- - F_1^-F_2P^-\left(E-F_1F_1^-\right)\right) & B_2^-F_2\left(P^-\left(E-F_1F_1^-\right)\right) \end{bmatrix}$$

其中 $T_3=A_1-C_1^-+C_1^-B_2B_2^-F_2T_1C_1$，$T_1=F_1^- - F_1^-F_2P^-\left(E-F_1F_1^-\right)$。

5. 结论

通过分块矩阵的广义逆探讨矩阵方程的求解，也是代数方程求解的探索方向之一。在本文中，探讨了一类 2×2 分块矩阵的广义逆的具体计算过程，应用初等变换法求解一类分块矩阵的广义逆，给出了数值计算例子，应用于一些特殊方程的求解，并对 2×2 分块矩阵的广义逆的计算进行了推广与应用。

基金项目

江西省教育厅科技项目(项目号：GJJ160557)。

参考文献

[1] 于子倩. 分块矩阵的应用研究[J]. 应用数学进展, 2020, 9(6): 980-985.

[2] Tian, Y.G. and Takane, Y. (2009) More on Generalized Inverse of Partitioned Matrices with Banachicwicz-Schur Forms. *Linear Algebra and Its Applications*, **430**, 1641-1655. https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.06.007

[3] Zhang, L.P. and Yu, H.B. (2008) The Expression and Calculation of Generalized Inverse Matrix. *Journal of Xichang College* (*Natural Science Edition*), **22**, 39-42.

[4] Yan, Z.Z. (2012) New Representations of the Moore-Penrose Inverse of 2×2 Block Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **456**, 3-15. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.08.014

[5] 董李娜, 常晓鹏. 分块矩阵广义初等变换的应用[J]. 河南教育学院学报(自然科学版), 2018, 27(4): 58-61.

[6] 张大克, 王玉杰. 矩阵的加号逆理论在参数估计中的应用[J]. 生物数学学报, 1996(1): 38-41+49.

[7] 张亚飞, 韩凯歌, 沈艳. 最小二乘广义逆求解方法研究及应用[J]. 应用科技, 2014, 41(3): 60-63.

[8] 李莹, 吕志超, 查秀秀, 王方圆. 矩阵的特殊结构最小范数广义逆[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2015, 38(5): 678-681.

[9] 高珍珍. 广义逆矩阵及其应用[J]. 伊犁师范学院学报(自然科学版), 2011(4): 1-7.

[10] Liu, T.W., Xu, H.H., Qiu, X.L., Zhang, W. and Shi, X.B. (2013) A Hybrid Laplace Transform Mixed Multiscale Finite-Element Method for Flow Model in Porous Media. *Journal of Information and Computational Science*, **10**, 4773-4781. https://doi.org/10.12733/jics20102312

[11] 欧阳光. 广义逆矩阵及其计算方法[J]. 湘南学院学报, 2020, 41(2): 1-4.

[12] 陈惠汝. Moore-Penrose 广义逆矩阵 A^-, A_m^- 与线性方程组的解[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(5): 30-33.