Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(12), 1645-1649**
Published Online December 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.712192

Hans汉斯

The Convergent in Continued β-Fraction

Qian Xiao

South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 1309200581@qq.com

Received: Dec. 2nd, 2018; accepted: Dec. 21st, 2018; published: Dec. 28th, 2018

Abstract

Let $\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, T is the continued β-fraction transformation on [0,1), and $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ is the nth-order β-fraction-convergent of x. In this paper, we show many properties of the sequence $\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)_{n\geq 1}$. Moreover, we prove that $\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)_{n\geq 1}$ converges to x.

Keywords

Continued β-Fraction, Convergent, Converges

β-连分数的渐近分数

肖　倩

华南理工大学，广东 广州
Email: 1309200581@qq.com

收稿日期：2018年12月2日；录用日期：2018年12月21日；发布日期：2018年12月28日

摘　要

设$\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$T$为[0,1)上的$\beta$-连分数变换，$\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$是$x$的$n$阶$\beta$-渐近分数。本文证明了序列$\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)_{n\geq 1}$的一些性质，并且证明了$\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)_{n\geq 1}$收敛且收敛到$x$。

文章引用：肖倩. β-连分数的渐近分数[J]. 应用数学进展, 2018, 7(12): 1645-1649.
DOI: 10.12677/aam.2018.712192

关键词

β-连分数，渐近分数，收敛

1. 引言

在 1957 年，数的表示理论中一种新的表示方法——β-展开被 Renyi [1]首次提出。之后，β-展式的丢番图理论和遍历性质被很多人深入研究。令 β 是大于 1 的任何实数，定义 β-变换 $T_\beta:[0,1)\to[0,1)$

$$T_\beta(x)=\beta x-\lfloor \beta x\rfloor=\{\beta x\},\quad x\in[0,1),$$

其中 $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数，$\{x\}$ 表示数 x 的小数部分。

那么，任意一个实数 $x\in[0,1)$ 都可以把它展成一个如下形式的有限或者无限的序列：

$$x=\frac{\varepsilon_1(x)}{\beta}+\frac{\varepsilon_2(x)}{\beta^2}+\frac{\varepsilon_3(x)}{\beta^3}+\cdots+\frac{\varepsilon_n(x)}{\beta^n}+\cdots$$

对于任意的 $n\ge 1$，$\varepsilon_1(x)=\lfloor \beta x\rfloor$，$\varepsilon_{n+1}(x)=\varepsilon_1\left(T_\beta^n(x)\right)$。我们把式叫做 x 的 β-展式，记为序列 $\varepsilon(x,\beta):=\left(\varepsilon_1(x),\varepsilon_2(x),\cdots,\varepsilon_n(x),\cdots\right)$ [2]。而且，Parry [3]刻画了序列可允许性。之后，我们又了解到当 $\beta\in\mathbb{N}$，x 的 β-展式是最终周期的当且仅当 $x\in\mathbb{Q}$。设 $\beta>1$ 是一个 Pisot 数，那么 x 的 β-展式是最终周期的当且仅当 $x\in\mathbb{Q}(\beta)\cap[0,1)$ (其中 $\mathbb{Q}(\beta)$ 是表示包含 $\mathbb{Q}$ 和 β 的最小的域) [4] [5]。

任意实数 x 可以唯一地被展成 $\sum_{k=0}^{n}v_{-k}\beta^k+\sum_{k=1}^{\infty}v_k\beta^{-k}$。在求和中 β 的非负幂部分叫做 x 的 β-整数部分，记作 $\lfloor x\rfloor_\beta$；β 的负幂部分叫做 x 的 β-分数部分，记作 $\{x\}_\beta$。如果 x 的 $\{x\}_\beta$ 为 0，即只有 β 的非负幂部分，我们把 x 叫做 β-整数。用 $\mathbb{Z}_\beta^+$ 来表示所有的 β-整数的集合，也就是说

$$\mathbb{Z}_\beta^+=\{\text{所有的非负}\beta\text{-整数}\}=\left\{\xi:\exists x\ge 0,\ s.t.\ \xi=\lfloor x\rfloor_\beta\right\}。$$

当 $\beta=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 时，我们知道

$$\mathbb{Z}_\beta^+=\left\{m+n\beta\mid m,n\in\mathbb{Z},m,n\ge 0,-1<m-\frac{n}{\beta}<\beta\right\}\ [6]。$$

定义 1.1： 定义 $T:[0,1)\to[0,1)$

$$T(0):=0,\quad T(x)=\frac{1}{x}-\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor_\beta,\quad x\in(0,1),$$

其中 $\lfloor x\rfloor_\beta$ 表示不超过 x 的最大 β-整数。

因此，对于任意的非负实数 x 都有如下形式的 β-连分数展式：

$$x=\lfloor x\rfloor_\beta+\cfrac{1}{\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor_\beta+\cfrac{1}{\left\lfloor\frac{1}{T(x)}\right\rfloor_\beta+\cdots+\cfrac{1}{\left\lfloor\frac{1}{T^{K-1}(x)}\right\rfloor_\beta+T^k(x)}}}:=\left[a_0(x);a_1(x),a_2(x),\cdots,a_k(x)+T^k(x)\right],$$

$$=\lfloor x\rfloor_\beta+\cfrac{1}{\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor_\beta+\cfrac{1}{\left\lfloor\frac{1}{T(x)}\right\rfloor_\beta+\cdots}}:=\left[a_0(x);a_1(x),a_2(x),\cdots\right],$$

其中 $a_0(x)=\lfloor x\rfloor_\beta, a_i(x)=\left\lfloor\frac{1}{T^{i-1}(x)}\right\rfloor_\beta, i\ge 1$。

2. 定理及证明

定义 2.1: 给定 β 是大于 1 的任意实数,对任意的 $n\ge 1$,$a_n\in\mathbb{Z}_\beta^+$,令 $p_{-1}=1$,$q_{-1}=0$,$p_0=a_0$,$q_0=1$,定义

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}$$

$$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$$

对于任意的 $x=\left[a_0;a_1,a_2,\cdots\right]\in\mathbb{R}^+$,把 $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ 叫做 x 的 n 阶 β-渐近分数。

注 2.2: 由上述定义可以看出:由于 $a_n\ge 1$,故序列 $(q_n)_{n\ge1}$ 单调递增且

$$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}\ge 2q_{n-2}\ge\cdots\ge 2^{\frac{n-2}{2}}\text{。}$$

命题 2.3: 对任意的 $n\ge 1$,我们有

$$p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(-1)^{n-1}\text{。}$$

证明: 把定义 2.1 中式的左右同时乘以 q_{n-1},便得到

$$p_nq_{n-1}=a_np_{n-1}q_{n-1}+p_{n-2}q_{n-1},$$

类似的,把式的左右两边同时乘以 p_{n-1},便得到

$$q_np_{n-1}=a_nq_{n-1}p_{n-1}+q_{n-2}p_{n-1}\text{。}$$

那么可得 $p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=p_{n-2}q_{n-1}-q_{n-2}p_{n-1}=\cdots=(-1)^{n-1}$。

推论 2.4: 对任意的 $n\ge 1$,有

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}\text{。}$$

证明:把命题 2.3 中的式子左右两边同时除以 q_nq_{n-1} 便可得到

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}\text{。}$$

注 2.5: 由推论 2.4 可以看出,每一个奇数阶的 β-渐近分数都大于紧接着它的那个偶数阶的 β-渐近分数。

命题 2.6: 对任意的 $n\ge 1$,有

$$q_np_{n-2}-p_nq_{n-2}=(-1)^{n-1}a_n\text{。}$$

证明: 把定义 2.1 中式的左右两边同时乘以 q_{n-2},便得到

$$p_nq_{n-2}=a_np_{n-1}q_{n-2}+p_{n-2}q_{n-2},$$

同样的把式的左右两边同时乘以 p_{n-2}，便得到

$$q_n p_{n-2} = a_n q_{n-1} p_{n-2} + q_{n-2} p_{n-2}。$$

那么可得 $q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = a_n\left(p_{n-2} q_{n-1} - q_{n-2} p_{n-1}\right)$。再由命题 2.3 得到：$q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n$。

推论 2.7：对任意的 $n \ge 1$，有

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}。$$

证明：把命题 2.6 的左右两边同时除以 $q_n q_{n-2}$ 得到：

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}。$$

注 2.8：由推论 2.7 可以看出，偶数阶的 β-渐近分数形成递增序列，奇数阶的 β-渐近分数形成递减序列。显然，把推论 2.4 和推论 2.7 结合得到：任何奇数阶的 β-渐近分数必大于任何偶数阶的 β-渐近分数。

定理 2.9：对任意的 $n \ge 1$，序列 $\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)_{n\ge1}$ 收敛。

证明：由推论 2.4 可知：

$$\begin{aligned}\frac{p_n}{q_n} &= \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} + \frac{(-1)^{n-2}}{q_{n-1} q_{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} = \cdots \\ &= \frac{p_0}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{-1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} = a_0 + \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{-1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}\end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{q_0 q_1} + \frac{-1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} + \cdots$ 是交错级数，由 Libniz 判别法知级数收敛，即 $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ 存在，故序列 $\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)_{n\ge1}$ 收敛。

命题 2.10：[7]对于任意的 $x \in \mathbb{R}^+$，$n \ge 0$，那么有

$$x = \frac{p_n(x) + p_{n-1}(x) T^n(x)}{q_n(x) + q_{n-1}(x) T^n(x)}。$$

定理 2.11：设 $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ 是 x 的 n 阶 β-渐近分数，则 $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = x$。

证明：

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| &= \left|\frac{p_n(x) + p_{n-1} T^n(x)}{q_n(x) + q_{n-1}(x) T^n(x)} - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| \\ &= \frac{\left|p_n(x) q_n(x) + p_{n-1}(x) q_n(x) T^n(x) - p_n(x) q_n(x) - p_n(x) q_n(x) T^n(x)\right|}{q_n(x)\left(q_n(x) + q_{n-1}(x) T^n(x)\right)} \\ &= \frac{T^n(x)\left|p_n(x) q_{n-1}(x) - p_{n-1}(x) q_n(x)\right|}{q_{n-1}(x)\left(q_n(x) + q_{n-1}(x) T^n(x)\right)} = \frac{T^n(x)}{q_{n-1}(x)\left(q_n(x) + q_{n-1}(x) T^n(x)\right)} \\ &\le \frac{1}{q_{n-1}(x)\left(q_n(x) + q_{n-1}(x) T^n(x)\right)} \le \frac{1}{q_{n-1}(x) q_{n-2}(x)} \le \frac{1}{q_{n-1}^2} \le 2^{3-n}\end{aligned}。$$

当 n 趋于无穷时，2^{3-n} 趋于 0，因此 $\frac{p_n(x)}{q_n(x)} \to x$。

参考文献

[1] Rényi, A. (1957) Representations for Real Numbers and Their Ergodic Properties. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **8**, 477-493. https://doi.org/10.1007/BF02020331

[2] Li, B. and Wu, J. (2008) Beta-Expansion and Continued Fraction Expansion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **339**, 1322-1331.

[3] Parry, W. (1960) On the β-Expansions of Real Numbers. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **11**, 401-416. https://doi.org/10.1007/BF02020954

[4] Bertrand, A. (1977) Développements en base de Pisot et répartition modulo 1, C. R. *Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 285. *No.* 6, A419-A421.

[5] Schmidit, K. (1980) On Periodic Expansions of Pisot Numbers and Salem Numbers. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **12**, 269-278.

[6] Gazeau, J.P. and Krejcar, R. (1998) Beta-Integer as Natural Counting Systems for Quasicrystals. *Journal of Physics A*, **31**, 6449-6472.

[7] Xiao, Q., Ma, C. and Wang, S.L. On the Eventually Periodic Continued β-Fractions and Their Lévy Constants.