Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(9), 1147-1152
Published Online September 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.79133

The Representation of the Generalized Inverse of a Hamilton Matrix

Yu Guo*, Zeyuan Li, Xiaotong Liu, Wenhui He

School of Mathematical Science, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: *guoyu0913@foxmail.com

Received: Aug. 15th, 2018; accepted: Aug. 30th, 2018; published: Sep. 6th, 2018

Abstract

The aim of this paper is to establish an explicit representation of the Drazin inverse of a Hamilton matrix $H=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$ under certain conditions. Then we give a formula for the Drazin inverse of a Hamilton matrix $H=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$ when the generalized Schur complement $S=-A^*-CA^DB=0$.

Keywords

Hamilton Matrix, Generalized Inverse, Drazin Inverse, Schur Complement

Hamilton矩阵广义逆的表示

郭　宇*，李泽塬，刘晓彤，贺文慧

内蒙古大学，数学科学学院，内蒙古　呼和浩特
Email: *guoyu0913@foxmail.com

收稿日期：2018年8月15日；录用日期：2018年8月30日；发布日期：2018年9月6日

摘　要

本文首先给出了Hamilton矩阵 $H=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$ 在一定条件下Drazin逆 H^D 的表达式，其次给出了当广义Schur补 $S=-A^*-CA^DB=0$ 时Drazin逆 H^D 的表达式。

*通讯作者。

文章引用: 郭宇, 李泽塬, 刘晓彤, 贺文慧. Hamilton 矩阵广义逆的表示[J]. 应用数学进展, 2018, 7(9): 1147-1152.
DOI: 10.12677/aam.2018.79133

关键词

Hamilton矩阵，广义逆，Drazin逆，Schur补

1. 引言

Hamilton 体系是由 19 世纪爱尔兰数学家兼物理学家 W. R. Hamilton 从几何光学着手创建起来的理论模式，而后他将此模式创造性的应用于经典力学，得到了在经典力学范畴内的又一种力学描述形式—Hamilton 力学[1]。作为 Hamilton 系统中最简单且最基本的形式，有限维线性 Hamilton 系统所对应的系数矩阵如下：

$$H=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix},$$

其中 B,C 是 Hermite 矩阵，A^* 是 A 的共轭转置，此时称 H 是 Hamilton 矩阵[2]。Hamilton 矩阵作为一种特殊的分块矩阵，在数学以及力学的很多方面都有重要的作用，如谱的计算、Riccati 方程的解以及相关的不变子空间刻画等[3]。

设矩阵 $A\in C^{n\times n}$，A 的 Drazin 逆是满足以下条件的唯一复矩阵 A^D：

$$A^DAA^D=A^D,\quad AA^D=A^DA,\quad A^{k+1}A^D=A^k,$$

其中 k 是使得 $rank\left(A^k\right)=rank\left(A^{k+1}\right)$ 成立的最小非负整数，记 $k=ind\left(A\right)$ 为 A 的指标[4]。当 $ind\left(A\right)=1$ 时，则称 A^D 为 A 的群逆。如果 A 是非奇异的，则 $ind\left(A\right)=0$ 且 $A^D=A^{-1}$，本文中令 $A^\pi=I-AA^D$。

Drazin 逆在 Markov 链、奇异微分方程和差分方程、迭代方法等各领域起着重要作用[5]。本文主要研究了 Hamilton 矩阵在一定条件下的 Drazin 逆，并给出了一些 H^D 的表达式。

2. 引理

为了得到本文的主要结论，首先给出以下引理。

引理 1 ([6]). 令 $P,Q\in C^{n\times n}$，如果 $P^2Q=0, PQ+QP=0$，那么 $\left(P+Q\right)^D=P^D+\left(P+Q\right)\left(Q^D\right)^2$。

引理 2 ([6]). 令 $P,Q\in C^{n\times n}$，如果 $P^2Q=0, QP^\pi=0$，那么 $\left(P+Q\right)^D=P^D+Q\left(P^D\right)^2+PQ\left(P^D\right)^3$。

引理 3 ([7]). 令 $T\in C^{n\times n}$，如果 $T=\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, B\in C^{p\times(n-p)}, C\in C^{(n-p)\times p}$，则 $T^D=\begin{pmatrix} 0 & B\left(CB\right)^D \\ \left(CB\right)^DC & 0 \end{pmatrix}$。

引理 4 ([8]). 令 $P,Q\in C^{n\times n}$，如果 $PQ=0$，P 是 l-幂零的，则 $\left(P+Q\right)^D=\sum_{i=0}^{l-1}\left(Q^D\right)^{i+1}P^i$。

如果 $PQ=0$，Q 是 s-幂零的，则

$$\left(P+Q\right)^D=\sum_{i=0}^{s-1}Q^i\left(P^D\right)^{i+1}.$$

引理 5 ([9]). 令 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，$A\in C^{m\times m}$，$D\in C^{p\times p}$。若 $S=D-CA^DB=0$，$A^\pi B=0$，$CA^\pi=0$，则

$$M^D=\begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix}\left[\left(AW\right)^D\right]^2 A\begin{pmatrix} I & A^D B \end{pmatrix},\ W=AA^D+A^D BCA^D .$$

3. 主要结论及证明

定理 1. 令 $H=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$，其中 A 为方阵，如果 $A^2B=0$，$\left(A^*\right)^2 C=0$，$-B\left(A^*\right)^\pi=0$，$CA^\pi=0$，那么

$$H^D=\begin{pmatrix} A^D & B\left(\left(A^*\right)^D\right)^2-AB\left(\left(A^*\right)^D\right)^3 \\ C\left(A^D\right)^2-A^*C\left(A^D\right)^3 & -\left(A^*\right)^D \end{pmatrix}.$$

证明：将矩阵 H 分解，得

$$H=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

令

$$P=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

通过条件我们得到

$$P^2Q=\begin{pmatrix} 0 & A^2B \\ \left(A^*\right)^2 C & 0 \end{pmatrix}=0,$$

$$QP^\pi=\begin{pmatrix} 0 & -B\left(A^*\right)^\pi \\ CA^\pi & 0 \end{pmatrix}=0,$$

因此，矩阵 P 和 Q 满足引理 2，得到

$$\begin{aligned} H^D&=\left(P+Q\right)^D=P^D+Q\left(P^D\right)^2+PQ\left(P^D\right)^3 \\ &=\begin{pmatrix} A^D & 0 \\ 0 & -\left(A^*\right)^D \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & B\left(\left(A^*\right)^D\right)^2 \\ C\left(A^D\right)^2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -AB\left(\left(A^*\right)^D\right)^3 \\ -A^*C\left(A^D\right)^3 & 0 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} A^D & B\left(\left(A^*\right)^D\right)^2-AB\left(\left(A^*\right)^D\right)^3 \\ C\left(A^D\right)^2-A^*C\left(A^D\right)^3 & -\left(A^*\right)^D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

定理 2. 令 $H=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$，其中 A 为方阵，如果 $BCA=0$，$-CBA^*=0$，$A\left(BC\right)^\pi=0$，$-A^*\left(CB\right)^\pi=0$，那么

$$H^D=\begin{pmatrix} A\left(BC\right)^D-BA^*\left(\left(CB\right)^D\right)^2 C & B\left(CB\right)^D \\ \left(CB\right)^D C & -A^*\left(CB\right)^D+CAB\left(\left(CB\right)^D\right)^2 \end{pmatrix}.$$

证明：将矩阵 H 分解，得

$$H=\begin{pmatrix}0 & B\\ C & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -A^*\end{pmatrix},$$

令

$$P=\begin{pmatrix}0 & B\\ C & 0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -A^*\end{pmatrix},$$

通过引理 3，我们可以得到

$$P^D=\begin{pmatrix}0 & B(CB)^D\\ (CB)^D C & 0\end{pmatrix},\quad P^\pi=\begin{pmatrix}(BC)^\pi & 0\\ 0 & (CB)^\pi\end{pmatrix}.$$

通过条件得

$$P^2Q=\begin{pmatrix}BCA & 0\\ 0 & -CBA^*\end{pmatrix}=0,$$

$$QP^\pi=\begin{pmatrix}A(BC)^\pi & 0\\ 0 & -A^*(CB)^\pi\end{pmatrix}=0,$$

因此，矩阵 P 和 Q 满足引理 2，得到

$$\begin{aligned}H^D&=(P+Q)^D=P^D+Q\left(P^D\right)^2+PQ\left(P^D\right)^3\\&=\begin{pmatrix}0 & B(CB)^D\\ (CB)^D C & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(BC)^D & 0\\ 0 & -A^*(CB)^D\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-BA^*\left(\left(CB\right)^D\right)^2 C & 0\\ 0 & CAB\left(\left(CB\right)^D\right)^2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A(BC)^D-BA^*\left(\left(CB\right)^D\right)^2 C & B(CB)^D\\ (CB)^D C & -A^*(CB)^D+CAB\left(\left(CB\right)^D\right)^2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

定理 3. 令 $H=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^*\end{pmatrix}$，其中 A 为方阵，如果 $A^2B=0$，$\left(A^*\right)^2C=0$，$AB=BA^*$，$CA=A^*C$，那么

$$H^D=\begin{pmatrix}A^D+AB\left(\left(CB\right)^D\right)^2 C & B(CB)^D\\ (CB)^D C & -\left(A^*\right)^D-A^*(CB)^D\end{pmatrix}.$$

证明：将矩阵 H 分解，得

$$H=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -A^*\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & B\\ C & 0\end{pmatrix},$$

令

$$P=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -A^*\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0 & B\\ C & 0\end{pmatrix},$$

通过条件我们得到

$$P^2Q=\begin{pmatrix}0 & A^2B\\ \left(A^*\right)^2 C & 0\end{pmatrix}=0,$$

$$PQ+QP=\begin{pmatrix}0 & AB-BA^* \\ -A^*C+CA & 0\end{pmatrix}=0,$$

因此，矩阵 P 和 Q 满足引理 1，得到

$$\begin{aligned}H^D&=(P+Q)^D=P^D+(P+Q)(Q^D)^2\\&=\begin{pmatrix}A^D & 0\\ 0 & -(A^*)^D\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & B(CB)^D\\ (CB)^D C & 0\end{pmatrix}^2\\&=\begin{pmatrix}A^D+AB\left((CB)^D\right)^2C & B(CB)^D\\ (CB)^D C & -(A^*)^D-A^*(CB)^D\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

下面我们给出 A 在矩阵 H 的广义 Schur 补 $S=-A^*-CA^DB=0$ 时 H^D 的表达式。

定理 4. 令 $H=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^*\end{pmatrix}$，其中 A 为方阵，如果 $S=-A^*-CA^DB=0$，$A^\pi BC=0$，$CA^\pi B=0$，$AB-BA^*=0$，那么

$$H^D=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A^*\end{pmatrix}E^2,$$

其中

$$E^l=F^l+\sum_{i=1}^{k}F^{i+l}\begin{pmatrix}A^iA^\pi & 0\\ CA^{i-1}A^\pi & 0\end{pmatrix}, l\ge 1,$$

$$F^l=\left(Q_2^D\right)^l=\begin{pmatrix}I\\ CA^D\end{pmatrix}\left[(AW)^D\right]^{l+1}A^2A^D\begin{pmatrix}I & A^DB\end{pmatrix},$$

$$W=AA^D+A^DBCA^D.$$

证明：由 $S=-A^*-CA^DB=0$ 可得

$$H=\begin{pmatrix}A & B\\ C & CA^DB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & A^\pi B\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A & AA^DB\\ C & CA^DB\end{pmatrix},$$

令

$$P=\begin{pmatrix}0 & A^\pi B\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}A & AA^DB\\ C & CA^DB\end{pmatrix},$$

通过条件可得 $PQ+QP=0$，$P^2=0$，$P^D=0$。由引理，我们得到

$$H^D=(P+Q)(Q^D)^2, \tag{1}$$

接下来我们求 Q^D。

我们将 Q 分解为 $Q=Q_1+Q_2$，其中

$$Q_1=\begin{pmatrix}AA^\pi & 0\\ CA^\pi & 0\end{pmatrix},\quad Q_2=\begin{pmatrix}A^2A^D & AA^DB\\ CAA^D & CA^DB\end{pmatrix},$$

可以得到 Q_1 是 $k+1$ 阶幂零的，$k=ind(A)$，并且 $Q_1Q_2=0$，由引理 4 可得

$$Q^D = \sum_{i=0}^{k} \left(Q_2^D\right)^{i+1} Q_1^i,$$

其中 $Q_1^i = \begin{pmatrix} A^i A^\pi & 0 \\ CA^{i-1}A^\pi & 0 \end{pmatrix}, \forall i \ge 1$。

下面求 Q_2^D，由引理 5，

$$Q_2^D = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} \left[\left(AW\right)^D\right]^2 A\begin{pmatrix} I & A^D B \end{pmatrix},\ W = AA^D + A^D BCA^D,$$

再由 $A^2A^D\begin{pmatrix} I & A^D B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} = AW$，可以得到

$$\left(Q_2^D\right)^i = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} \left[\left(AW\right)^D\right]^{i+1} A^2A^D\begin{pmatrix} I & A^D B \end{pmatrix},\ W = AA^D + A^D BCA^D,$$

令 $E = Q^D$，$F = Q_2^D$，则

$$E^l = F^l + \sum_{i=1}^{k} F^{i+l} \begin{pmatrix} A^i A^\pi & 0 \\ CA^{i-1}A^\pi & 0 \end{pmatrix}, l \ge 1,$$

将 $E = Q^D$ 代入(1)，证毕。

基金项目

内蒙古大学校级大学生创新创业训练计划项目(项目编号：201711198)。

参考文献

[1] 冯康. 哈密尔顿系统的辛几何算法[M]. 杭州: 浙江科技出版社, 2003.

[2] 吴德玉, 阿拉坦仓. 分块算子矩阵谱理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[3] 邢立刚. 一类无穷维 Hamilton 算子谱的刻画[M]. 呼和浩特: 内蒙古大学出版社, 2007.

[4] Drzain, M.P. (1958) Pseudo-Inverses in Associative Rings and Semigroups. *The American Mathematical Monthly*, **65**, 506-514. https://doi.org/10.1080/00029890.1958.11991949

[5] Bru, R., Climent, J.J. and Neumann, M. (1995) On the Index of Block Upper Triangular Matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **16**, 436-447. https://doi.org/10.1137/S0895479892235587

[6] Xia, L. and Deng, B. (2017) The Drazin Inverse of the Sum of Two Matrices and Its Applications. *Filomat*, **31**, 5151-5158. https://doi.org/10.2298/FIL1716151X

[7] Catral, M., Olesky, D.D. and Van Den Driessche, P. (2009) Block Representations of the Drazin Inverse of a Bipartite Matrix. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **18**, 98-107. https://doi.org/10.13001/1081-3810.1297

[8] Hartwig, R.E., Wang, G. and Wei, Y.M. (2001) Some Additive Results on Drazin Inverse. *Linear Algebra and Its Applications*, **322**, 207-217. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00257-3

[9] Miao, J. (1989) Results of Drazin Inverse of a 2 × 2 Block Matrices. *Journal of Shanghai Normal University*, **18**, 25-31.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org