Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2014, 3, 8-16
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2014.31002 Published Online February 2014 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

The Hamilton-Connectivity with the Sum Degree of Subgraph in Claw-Free Graphs

Jing Mi, Jianglu Wang

School of Mathematical Sciences, Shandong Normal University, Jinan
Email: 751374463@qq.com

Received: Dec. 19th, 2013; revised: Jan. 16th, 2014; accepted: Feb. 3rd, 2014

Abstract: In this paper, we defined the degree of subgraph, and got the following result on the basis of the degree of subgraph: Let G be a 2-connected claw-free graph of order n, $\delta(G)\geq 3$. If H_1 and H_2, any two non-adjacent subgraphs, are isomorphic to P_3 and K_2, respectively, and $d(H_1) + d(H_2) \geq n$, for each pair of $u,v \in G$, when $\{u,v\}$ isn't a cut set, there exists a Hamilton-path in u,v.

Keywords: Claw-Free Graph; Non-Adjacent Subgraph; Degree of Subgraph; Hamilton-Path

无爪图中子图的度和与 Hamilton 连通性

米　晶，王江鲁

山东师范大学数学科学学院，济南
Email: 751374463@qq.com

收稿日期：2013 年 12 月 19 日；修回日期：2014 年 1 月 16 日；录用日期：2014 年 2 月 3 日

摘　要：本文定义了子图的度的概念，并利用子图的度给出如下结果：设 G 是 n 阶 2-连通无爪图，$\delta(G)\geq 3$，如果 G 中任意两个分别同构于 P_3 和 K_2 的不相邻子图 H_1，H_2 的度和 $d(H_1)+d(H_2)\geq n$，对于任意的 $u,v\in G$，若$\{u,v\}$不构成割集，那么 u,v 间存在 Hamilton 路。

关键词：无爪图；不相邻子图；子图的度；Hamilton 路

1. 引言

本文仅考虑有限、无向、简单图，所使用的术语和符号约定如下，其中未加说明的部分见文献[1]。

设 G 是一个图，$V(G)$、$E(G)$分别表示 G 的顶点集和边集。对 $a\in V(G)$ 及 G 的子图 K 和 R，令：

$$\delta(G)=\min\{d(v):v\in V(G)\}$$

$$N_R(a)=\{v\in V(R):va\in E(G)\}$$

$$E(V(K),V(R))=\{uv\in E(G):u\in V(K),v\in V(R)\}$$

$$N_R(K)=\left(\bigcup_{u\in V(K)}N_R(u)\right)-V(K)$$

$\left|N_G(a)\right|$ 和 $\left|N_G(K)\right|$ 分别称为顶点 a 和子图 K 的度，并分别记为 $d_G(a)$和 $d_G(K)$(在不致误解时，也简记为 $d(a)$ 和 $d(K)$)。$|K|=|V(K)|$ 叫做 K 的阶。

G 的两个不相邻的子图 K，R 叫做不相邻的，如果 $V(K)\cap V(R)=\varnothing$，$E(V(K),V(R))=\varnothing$。$G$ 的由顶点集 S 导出的子图记为 $G[S]$。

用 P_n 表示含有 n 个点的路，用 K_n 表示 n 阶完全图，用 $\bar{K}_n$ 表示 n 阶空图。经过 G 的每个顶点恰好一次的圈(路)，称为 G 的 Hamilton 圈(路)。如果 G 中任意两顶点之间都有 Hamilton 路，则称 G 是 Hamilton 连通的。设 $P=x_1x_2\cdots x_p$ 是图 G 的一条路，对 $x_i,x_j\in V(P)(1\le i<j\le p)$，用 x_i^{-l}，x_i^{+l} $(1\le i-l<i+l\le p)$ 分别表示 P 的顶点 x_{i-l} 和 x_{i+l}; 用 x_iPx_j 和 $x_j\bar{P}x_i$ 分别表示 P 的路 $x_ix_{i+1}\cdots x_{j-1}x_j$ 和 $x_jx_{j-1}\cdots x_{i+1}x_i$。为了方便，$x_i^{-1}$，$x_i^{+1}$ 也分别简记为 x_i^- 和 x_i^+，x_i 有时也记成 x_i^{-0} 或 x_i^{+0}。

所有涉及图的路圈性质的度型充分条件从某种意义上讲都源自以下两个结果。

定理 1[2] 设图 G 的阶 $n\ge 3$，如果对于任意的 $v\in V(G)$，$d(v)\ge\frac{n}{2}$，则 G 有 Hamilton 圈。

定理 2[3] 设图 G 的阶 $n\ge 3$，如果 G 中任意一对不相邻顶点 u，v 的度和 $d(u)+d(v)\ge n$，则 G 有 Hamilton 圈。

如果图 G 中不含同构于 $K_{1,3}$，则称 G 是无爪图，对无爪图有以下结果：

定理 3[4] 设 G 是 n 阶 2-连通无爪图，如果对于任意的 $v\in V(G)$，$d(v)\ge\frac{n-2}{3}$，则 G 有 Hamilton 圈。

定理 4[5] 设 G 是 n 阶 2-连通无爪图，如果 G 中任意一对不相邻顶点 u,v 的度和 $d(u)+d(v)\ge\frac{2n-5}{3}$，则 G 有 Hamilton 圈。

2. 主要结果

定理 5 设 G 是 n 阶 2-连通无爪图，$\delta(G)\ge 3$，如果 G 中任意两个分别同构于 P_3 和 K_2 的不相邻子图 H_1，H_2 的度和 $d(H_1)+d(H_2)\ge n$，对于任意的 $u, v\in G$，若 u,v 不构成割集，那么 u,v 间存在 Hamilton 路。

下面是定理 5 的证明。

设 G 是满足定理 5 的条件的图，$\{u,v\}\subset V(G)$，且$\{u,v\}$不是割集，下面总假定 u,v 间没有 Hamilton 路。取 G 的一条最长(u,v)-路，记为 $P=x_1x_2\cdots x_p$ $(x_1=u,x_p=v)$，记 $R=G-P$，B 是 R 的一个连通分支，令

$$T=N_P(B),\quad N_P^-(B)=v^-:v\in T,\quad N_P^+(B)=v^+:v\in T。$$

对 $x,y\in T\cup V(B)$，G 中必存在其内部点均属于 $V(B)$的(x,y)-路，用 xBy 表示一条这样的路。

论断 1 设 $x\in T$-$\{u,v\}$，$y\in T$，则

a) $x^{-i},x^{+i}\notin T\ (i=1,2), x^-x^+\in E(G)$

b) $y\ne u$ 时，$x^{-j}y^-\notin E(G)\,(j=0,1,2)$；$y\ne v$ 时，$x^{+j}y^+\notin E(G)\,(j=0,1,2)$；$u\ne y\ne v$ 时，$x^{-j}y^{-2}, x^{+j}y^{+2}\notin E(G)\,(j=0,1,2)$

证明: a) 假设存在 $xx'\in E(T,V(B))(x'\in V(B))$，若 $x^-\in T$，则 $x_1Px^-BxPx_p$ 为一条长于 P 的(u,v)-路，得矛盾。类似地可以证明 $x^+\notin T$。考虑 $G\left[\{x,x^-,x^+,x'\}\right]$，由以上证明可知 x^-x'，$x^+x'\notin E(G)$，由无爪性即得 $x^-x^+\in E(G)$。

如果 $x^{-2}\in T$，则 G 有长于 P 的(u,v)-路 $x_1Px^{-2}Bxx^-x^+Px_p$，得矛盾。类似地可证明 $x^{+2}\notin T$。

b) 当 $y\ne u$ 时，由(1)，$x^-x\in E(G)$。若 $xy^-\in E(G)$，则 G 有长于 P 的(u, v)-路：

$$x_1Py^-xByPx^-x^+Px_p\ (y\in V(uPx))$$

$$x_1Px^-x^+Py^-xByPx_p\ (y\in V(xPv))$$

若 $x^-y^-\in E(G)$，则 G 有长于 P 的(u,v)-路：

$$x_1Py^-x^-\overline{P}yBxPx_p\ \left(y\in V\left(uPx\right)\right)$$

$$x_1Px^-y^-\overline{P}xByPx_p\ \left(y\in V\left(xPv\right)\right);$$

若 $x^-y^-\in E\left(G\right)$，则 G 有长于 P 的(u,v)-路：

$$x_1Py^-x^{-2}\overline{P}yBxx^-x^+Px_p\ \left(y\in V\left(uPx\right)\right)$$

$$x_1Px^{-2}y^-\overline{P}x^+x^-xByPx_p\ \left(y\in xPv\right)$$

得矛盾。

类似地可证 $y\neq v$ 时，$x^{+j}y^+\notin E\left(G\right)\left(j=0,1,2\right)$

$u\neq y\neq v$ 时，由(a)，$y^-y^+\in E\left(G\right)$。若 $x^{-2}y^{-2}\in E\left(G\right)$，$G$ 有长于 P 的(u,v)-路：

$$x_1Px^{-2}y^{-2}\overline{P}x^+x^-xByy^-y^+Px_p\ \left(y\in V\left(xPv\right)\right)$$

$$x_1Py^{-2}x^{-2}\overline{P}y^+y^-yBxx^-x^+Px_p\ \left(y\in V\left(uPx\right)\right)$$

得矛盾，类似地可证明 $x^{+2}y^{+2}\notin E\left(G\right)$。

论断 1 证毕。

因为 G 是 2-连通的，所以$\left|T\right|\geq 2$，由$\{u,v\}$不是割集知$\left|T-\left\{u,v\right\}\right|\geq 1$。下面分两种情形进行讨论。

情形一 $\left|T-\left\{u,v\right\}\right|\geq 2$

由于 $\delta\geq 3$，所以在这一情形中，我们分下面两种子情形进行证明。

子情形一 $\Delta(B)\geq 1$

此时$\left|B\right|\geq 2$，存在$u_1,u_2\in B$，使得$u_1u_2\in E\left(B\right)$。

取 $x,y\in T\text{-}\{u,v\}$(不妨设 $x\in V\left(x_1Py^-\right)$，则有 $x',y'\in V\left(B\right)$，使 $xx',\ yy'\in E\left(T,V\left(B\right)\right)$。由论断 1(a)，$x^-x^+,y^-y^+\in E\left(G\right)$ 且$\left|x^{+2}Py^{-2}\right|\geq 1$。取 $H_1=xu_1u_2\cong P_3$，$H_2=y^-y^{-2}\cong K_2$。则由论断 1 可知 H_1 与 H_2 不相邻。令：

$$Q_1=x_1Px,\ Q_2=x^+Py^-,\ Q_3=yPx_p$$

论断 2 $N_R\left(H_1\right)\cap N_R\left(H_2\right)=\varnothing$

证明： 由论断 1 知 $N_B\left(H_2\right)=\varnothing$，易知 $N_{R\text{-}B}\left(H_1\right)\cap N_{R\text{-}B}\left(H_2\right)=\varnothing$。

否则，若 $N_{R\text{-}B}\left(H_1\right)\cap N_{R\text{-}B}\left(H_2\right)\neq\varnothing$，设 $a_1\in N_{R\text{-}B}\left(H_1\right)\cap N_{R\text{-}B}\left(H_2\right)$，由 B 的选取知，$u_1a_1,u_2a_1\notin E\left(G\right)$，所以只有 xa_1 存在，但这样会存在更长(u,v)-路：

$$x_1Px^-x^+Py^-a_1xByPx_p\quad\left(a_1y^-\in E\left(G\right)\right)$$

$$x_1Px^-x^+Py^{-2}a_1xByy^-y^+Px_p\quad\left(a_1y^{-2}\in E\left(G\right)\right)$$

所以有：

$$N_R\left(H_1\right)\cup \mathrm{N}_R\left(H_2\right)=\left(N_{R-B}\left(H_1\right)\cup N_B\left(H_1\right)\right)\cap\left(N_{R-B}\left(H_2\right)\cup N_B\left(H_2\right)\right)=N_{R-B}\left(H_1\right)\cap N_{R-B}\left(H_2\right)=\varnothing$$

论断 2 证毕。

由论断 2 知：

$$\left|N_R\left(H_1\right)\right|+\left|N_R\left(H_2\right)\right|=\left|N_R\left(H_1\right)\cup N_R\left(H_2\right)\right|\leq\left|R-\left\{u_1,u_2\right\}\right|=\left|R\right|-2 \tag{1}$$

论断 3 *a*) $N_{Q1}\left(H_1\right)\cup N_{Q1}^+\left(H_2\right)\subseteq V\left(Q_1\right)-\left\{x\right\}$，$N_{Q1}\left(H_1\right)\cap N_{Q1}^+\left(H_2\right)=\varnothing$

b) $N_{Q2}\left(H_1\right)\cup N_{Q2}^+\left(H_2\right)\subseteq V\left(Q_2\right)-\left\{y^-\right\}$，$N_{Q2}\left(H_1\right)\cap N_{Q2}^+\left(H_2\right)=\varnothing$

c) $N_{Q3}^-\left(H_1\right)\cup N_{Q3}\left(H_2\right)\subseteq V\left(Q_3\right)\cup\left\{y^-\right\}$，$N_{Q3}^-\left(H_1\right)\cap N_{Q3}\left(H_2\right)=\varnothing$。

证明： a) 显然 $N_{Q1}^{+}(H_2)\subseteq V(Q_1)\cup\{x^{+}\}$，由论断 1 可知 $x^{-},x\notin N_{Q1}(H_2)$，所以 $x,x^{+}\notin N_{Q1}^{+}(H_2)$，于是 $N_{Q1}^{+}(H_2)\subseteq\left(V(Q_1)\cup\{x^{+}\}\right)-\{x,x^{+}\}=V(Q_1)-\{x\}$。显然 $x\notin N_{Q1}(H_1)$，故 $N_{Q1}(H_1)\subseteq V(Q_1)-\{x\}$。总之，

$$N_{Q1}(H_1)\cup N_{Q1}^{+}(H_2)\subseteq V(Q_1)-\{x\}$$

假设存在 $a_2\in N_{Q1}(H_1)\cap N_{Q1}^{+}(H_2)$，因为 $x_1\notin N_{Q1}^{+}(H_2)$，所以 $a_2\neq x_1$。显然 $x\notin N_{Q1}(H_1)$，所以，$a_2\neq x$。因此 $a_2\in V\left(x_1^{+}Px^{-}\right)$。此时 a_2 至少与 u_1，u_2，x 之一相邻。由论断 1 知，$u_1a_2,u_2a_2\notin E(G)$。所以必有 $a_2x\in E(G)$，那么会存在更长(u,v)-路：

$$x_1Pa_2^{-}y^{-}\overline{P}x^{+}x^{-}\overline{P}a_2xByPx_p \quad a_2^{-}y^{-}\in E(G)$$

$$x_1Pa_2^{-}y^{-2}\overline{P}x^{+}x^{-}\overline{P}a_2xByy^{-}y^{+}Px_p \quad a_2^{-}y^{-2}\in E(G)$$

得矛盾。

b) 显然 $N_{Q2}^{+}(H_2)\subseteq V(Q_2)\cup\{y\}$。因为 $y^{-},y^{-2}\notin N_{Q2}(H_2)$，所以 $y,y^{-}\notin N_{Q2}^{+}(H_2)$，于是

$$N_{Q2}^{+}(H_2)\subseteq\left(V(Q_2)\cup\{y\}\right)-\{y,y^{-}\}=V(Q_2)-\{y^{-}\}。$$

由论断 1(b)，$y^{-},y^{-2}\notin N_{Q2}(H_1)$，所以 $N_{Q2}(H_1)\subseteq V(Q_2)-\{y^{-},y^{-2}\}$。总之

$$N_{Q2}(H_1)\cup N_{Q2}^{+}(H_2)\subseteq V(Q_2)-\{y^{-}\}$$

若 $N_{Q2}(H_1)\cap N_{Q2}^{+}(H_2)\neq\varnothing$，则存在 $a_3\in N_{Q2}(H_1)\cap N_{Q2}^{+}(H_2)$。显然 $x^{+}\notin N_{Q2}^{+}(H_2)$。所以 $a_3\neq x^{+}$。由论断 1，y^{-2}，$y^{-}\notin N_{Q2}(H_1)$，所以 $a_3\notin\{y^{-},y^{-2}\}$。显然 $y^{-2}\notin N_{Q2}(H_2)$，所以 $y^{-}\notin N_{Q2}^{+}(H_2)$，所以 $a_3\neq y^{-}$。于是 $a_3\in V\left(x^{+2}Py^{-2}\right)$。因为 $a_3\in N_{Q2}(H_1)$，所以 a_3 至少与 x，u_1，u_2 之一相邻。由论断 1，$a_3u_1,a_3u_2\notin E(G)$。所以必有 $a_3x\in E(G)$，则 G 有长于 P 的(u,v)-路：

$$x_1Px^{-}x^{+}Pa_3^{-}y^{-}\overline{P}a_3xByPx_p \quad a_3^{-}y^{-}\in E(G)$$

$$x_1Px^{-}x^{+}Pa_3^{-}y^{-2}\overline{P}a_3xByy^{-}y^{+}Px_p \quad a_3^{-}y^{-2}\in E(G)$$

得矛盾。

c) 显然 $N_{Q3}^{-}(H_1)\cup N_{Q3}(H_2)\subseteq V(Q_3)\cup\{y^{-}\}$

取 $a_4\in N_{Q3}^{-}(H_1)\cap N_{Q3}(H_2)$，显然 $a_4\neq v$，由论断 1(b)，$a_4\neq y^{+}$。所以 $a_4\in V\left(y^{+2}Pv^{-}\right)$。因为 $a_4\in N_{Q3}^{-}(H_1)$，所以 $a_4^{+}\in N_{Q3}(H_1)$，即 a_4^{+} 必与 a_4，u_1，u_2 之一相邻。由论断 1，$a_4u_1,a_4u_2\notin E(G)$。所以必有 $a_4x\in E(G)$，则 G 有长于 P 的(u,v)-路：

$$x_1Px^{-}x^{+}Py^{-}a_4\overline{P}yBxa_4^{+}Px_p \quad y^{-}a_4\in E(G)$$

$$x_1Px^{-}x^{+}Py^{-2}a_4\overline{P}y^{+}y^{-}yBxa_4^{+}Px_p \quad y^{-2}a_4\in E(G)$$

得矛盾。

论断 3 证毕。

由论断 3(a)可知：

$$\begin{aligned}\left|N_{Q1}(H_1)\right|+\left|N_{Q1}(H_2)\right|&=\left|N_{Q1}(H_1)\right|+\left|N_{Q1}^{+}(H_2)\right|\\&=\left|N_{Q1}(H_1)\cup N_{Q1}^{+}(H_2)\right|+\left|N_{Q1}(H_1)\cap N_{Q1}^{+}(H_2)\right|\\&\leq\left|V(Q_1)-\{x\}\right|=\left|Q_1\right|-1\end{aligned}\tag{2}$$

由论断 3(b)可知：

$$\begin{aligned}\left|N_{Q2}\left(H_1\right)\right|+\left|N_{Q2}\left(H_2\right)\right| &= \left|N_{Q2}\left(H_1\right)\right|+\left|N_{Q2}^{+}\left(H_2\right)\right| = \left|N_{Q2}\left(H_1\right)\cup N_{Q2}^{+}\left(H_2\right)\right|+\left|N_{Q2}\left(H_1\right)\cap N_{Q2}^{+}\left(H_2\right)\right| \\ &\le \left|V\left(Q_2\right)-\left\{y^{-}\right\}\right| = \left|Q_2\right|-1\end{aligned} \tag{3}$$

由论断 3(c)可知：

$$\begin{aligned}\left|N_{Q3}\left(H_1\right)\right|+\left|N_{Q3}\left(H_2\right)\right| &= \left|N_{Q3}^{-}\left(H_1\right)\right|+\left|N_{Q3}\left(H_2\right)\right| = \left|N_{Q3}^{-}\left(H_1\right)\cup N_{Q3}\left(H_2\right)\right|+\left|N_{Q3}^{-}\left(H_1\right)\cap N_{Q3}\left(H_2\right)\right| \\ &\le \left|V\left(Q_3\right)\cup\left\{y^{-}\right\}\right| = \left|Q_3\right|+1\end{aligned} \tag{4}$$

所以，由(1)~(4)知

$$\begin{aligned}n &\le d\left(H_1\right)+d\left(H_2\right) \\ &= \left|N_R\left(H_1\right)\right|+\left|N_R\left(H_2\right)\right|+\left|N_{Q1}\left(H_1\right)\right|+\left|N_{Q1}\left(H_2\right)\right|+\left|N_{Q2}\left(H_1\right)\right|+\left|N_{Q2}\left(H_2\right)\right|+\left|N_{Q3}\left(H_1\right)\right|+\left|N_{Q3}\left(H_2\right)\right| \\ &= |R|-2+|Q_1|-1+|Q_2|-1+|Q_3|+1 = n-3\end{aligned}$$

这与定理 5 的条件矛盾。

子情形二 $\Delta(B) = 0$

此时 $B = 1$，设 $B = \{x'\}$。取 x，$y\in T\text{-}\{u,v\}$(为了方便，不妨取这样的 x，y 满足$|xPy|$尽可能小，且设 $x\in x_1Py$)，由于 $\delta \ge 3$，所以$|T| \ge 3$，所以存在 $z\in T$，其中 $z \notin \{x, y\}$，由于对称性不妨假设 $z \in yPx_p$。由论断 1 知，$\left|y^{+2}Pz^{-}\right| \ge 1$，取 $H_1 = x'xx^{+} \cong P_3$， $H_2 = y^{+}y^{+2} \cong K_2$ 。由论断 1 知，H_1 与 H_2 不相邻。令：

$$Q_1 = x_1Px^{+}, Q_2 = x^{+2}Py^{+2}, Q_3 = y^{+3}Px_p$$

论断 4 $N_R\left(H_1\right)\cap N_R\left(H_2\right)=\varnothing$

证明: 由论断 1 知 $N_B\left(H_2\right)=\varnothing$，易知 $N_{R\text{-}B}\left(H_1\right)\cap N_{R\text{-}B}\left(H_2\right)=\varnothing$ 。

否则，若 $N_{R\text{-}B}\left(H_1\right)\cap N_{R\text{-}B}\left(H_2\right)\ne\varnothing$，设 $b_1 \in N_{R\text{-}B}\left(H_1\right)\cap N_{R\text{-}B}\left(H_2\right)$，由 B 的选取知，$x'b_1 \notin E\left(G\right)$，所以 b_1 至少与 x，x^{+}之一相邻，若 $b_1x \in E(G)$，那么存在更长(u,v)-路：

$$x_1Px^{-}x^{+}PyBxb_1y^{+}Px_p \quad \left(b_1y^{+} \in E\left(G\right)\right)$$

$$x_1Px^{-}x^{+}Py^{-}y^{+}yBxb_1y^{+2}Px_p \quad \left(b_1y^{+2} \in E\left(G\right)\right)$$

得矛盾。

若 $b_1x^{+} \in E\left(G\right)$，那么存在更长$(u,v)$-路：

$$x_1PxBy\overline{P}x^{+}b_1y^{+}Px_p \quad y^{+}b_1 \in E\left(G\right)$$

$$x_1PxByy^{+}y^{-}\overline{P}x^{+}b_1y^{+2}Px_p \quad y^{+2}b_1 \in E\left(G\right)$$

得矛盾。

所以：

$$N_R\left(H_1\right)\cup N_R\left(H_2\right)=\left(N_{R\text{-}B}\left(H_1\right)\cup N_B\left(H_1\right)\right)\cap\left(N_{R\text{-}B}\left(H_2\right)\cup N_B\left(H_2\right)\right)=N_{R\text{-}B}\left(H_1\right)\cap N_{R\text{-}B}\left(H_2\right)=\varnothing$$

论断 4 证毕。

由论断 4 知：

$$\left|N_R\left(H_1\right)\right|+\left|N_R\left(H_2\right)\right|=\left|N_R\left(H_1\right)\cup N_R\left(H_2\right)\right|\le\left|R-\left\{x'\right\}\right|=|R|-1 \tag{5}$$

论断 5

a) $N_{Q1}^{+}\left(H_1\right)\cup N_{Q1}\left(H_2\right)\subseteq V\left(Q_1\right)-\left\{x^{+}\right\}$， $N_{Q1}^{+}\left(H_1\right)\cap N_{Q1}\left(H_2\right)=\varnothing$

b) $N_{Q2}^{-}(H_1)\cup N_{Q2}(H_2)\subseteq\left(V(Q_2)\cup\{x^{+}\}\right)-\{y^{+},y^{+2}\}$， $N_{Q2}^{-}(H_1)\cap N_{Q2}(H_2)\subseteq\{y^{-}\}$

c) $N_{Q3}(H_1)\cup N_{Q3}^{-}(H_2)\subseteq V(Q_3)\cup\{y^{+2}\}$， $N_{Q3}(H_1)\cap N_{Q3}^{-}(H_2)=\varnothing$

证明：a) 显然 $N_{Q1}^{+}(H_1)\subseteq V(Q_1)\cup\{x^{+2}\}$，显然 $x,x^{+}\notin N_{Q1}(H_1)$，所以 $x^{+},x^{+2}\notin N_{Q1}^{+}(H_1)$，于是 $N_{Q1}^{+}(H_2)\subseteq\left(V(Q_1)\cup\{x^{+2}\}\right)-\{x^{+},x^{+2}\}=V(Q_1)-\{x^{+}\}$。由论断 1 知，$x,x^{+}\notin N_{Q1}(H_2)$，故 $N_{Q1}(H_2)\subseteq V(Q_1)-\{x,x^{+}\}$。总之，$N_{Q1}^{+}(H_1)\cup N_{Q1}(H_2)\subseteq V(Q_1)-\{x^{+}\}$。

假设存在 $b_2\in N_{Q1}^{+}(H_1)\cap N_{Q1}(H_2)$，因为 $x_1\notin N_{Q1}^{+}(H_1)$，所以 $b_2\neq x_1$。显然 $x\notin N_{Q1}(H_1)$，所以 $x^{+}\notin N_{Q1}^{+}(H_1)$，即得 $b_2\neq x^{+}$。由论断 1 知 $x\notin N_{Q1}(H_2)$，所以 $b_2\neq x$，因此 $b_2\in V\left(x_1^{+}Px^{-}\right)$。此时有 b_2^{-} 至少与 x'，x，x^{+}之一相邻。由论断 1 知 $x'b_2\notin E(G)$。所以 b_2^{-} 至少与 x，x^{+}之一相邻，若 $b_2^{-}x^{+}\in E(G)$，那么会存在更长 u,v-路：

$$x_1Pb_2^{-}x^{+}\overline{P}yBx\overline{P}b_2y^{+}Px_p\quad y^{+}b_2\in E(G)$$

$$x_1Pb_2^{-}x^{+}\overline{P}y^{-}y^{+}Bx\overline{P}b_2y^{+2}Px_p\quad y^{+2}b_2\in E(G)$$

得矛盾。

若 $b_2^{-}x\in E(G)$，那么会存在更长(u,v)-路：

$$x_1Pb_2^{-}xBy\overline{P}x^{+}x^{-}\overline{P}b_2y^{+}Px_p\quad y^{+}b_2\in E(G)$$

$$x_1Pb_2^{-}xByy^{+}y^{-}\overline{P}x^{+}x^{-}\overline{P}b_2y^{+2}Px_p\quad y^{+2}b_2\in E(G)$$

得矛盾。

b) 显然 $N_{Q2}^{-}(H_1)\subseteq\left(V(Q_2)\cup\{x^{+}\}\right)-\{y^{+2}\}$，由论断 1 知 $y^{+},y^{+2}\notin N_{Q2}(H_1)$，所以 $y,y^{+}\notin N_{Q2}^{-}(H_1)$，于是 $N_{Q2}^{-}(H_1)\subseteq\left(V(Q_2)\cup\{x^{+}\}\right)-\{y,y^{+},y^{+2}\}$。由论断 1(b)，$x^{+2}\notin N_{Q2}(H_2)$，又因为 $y^{+},y^{+2}\notin N_{Q2}(H_2)$，所以 $N_{Q2}(H_2)\subseteq V(Q_2)-\{x^{+2},y^{+},y^{+2}\}$。总之

$$N_{Q2}^{-}(H_1)\cup N_{Q2}(H_2)\subseteq V(Q_2)\cup\{x^{+}\}-\{y^{+},y^{+2}\}$$

若 $N_{Q2}^{-}(H_1)\cap N_{Q2}(H_2)\neq\varnothing$，则存在 $b_3\in N_{Q2}^{-}(H_1)\cap N_{Q2}(H_2)$。显 $y^{+2},y^{+},y\notin N_{Q2}^{-}(H_1)$。所以 $b_3\notin\{y^{+2},y^{+},y\}$。由论断 1，$x^{+2}\notin N_{Q2}(H_2)$，所以 $b_3\neq x^{+2}$。于是 $b_3\in V\left(x^{+3}Py^{-}\right)$。因为 $b_3\in N_{Q2}^{-}(H_1)$，所以 $b_3^{+}\in N_{Q2}(H_1)$，此时必有 $b_3^{+}x^{+}\in E(G)$ (否则，若 $b_3^{+}x^{+}\notin E(G)$，由论断 1 知，$b_3^{+}x'\notin E(G)$。所以必有 $b_3^{+}x\in E(G)$，可得 $G\left[\{x,x',x^{+},b_3^{+}\}\right]\cong K_{1,3}$，与无爪图矛盾)，但这样 G 有长于 P 的(u,v)-路：

$$x_1PxBy\overline{P}b_3^{+}x^{+}Pb_3y^{+}Px_p\quad y^{+}b_3\in E(G)$$

$$x_1PxByy^{+}y^{-}\overline{P}b_3^{+}Pb_3y^{+2}Px_p\quad y^{+2}b_3\in E(G)$$

得矛盾。

c) 显然 $N_{Q3}(H_1)\cup N_{Q3}^{-}(H_2)\subseteq V(Q_3)\cup\{y^{+2}\}$

取 $b_4\in N_{Q3}(H_1)\cap N_{Q3}^{-}(H_2)$，显然 $b_4\neq v$，所以 $b_4\in V\left(y^{+3}Pv^{-}\right)$。因为 $b_4\in N_{Q3}(H_1)$，又由论断 1，$b_4x'\notin E(G)$。所以 b_4 必与 x，x^{+}之一相邻。若 $b_4x^{+}\in E(G)$，则 G 有长于 P 的(u,v)-路：

$$x_1PxBy\overline{P}x^{+}b_4\overline{P}y^{+}b_4^{+}Px_p\quad y^{+}b_4^{+}\in E(G)$$

$$x_1PxByy^{+}y^{-}\overline{P}x^{+}b_4\overline{P}y^{+2}b_4^{+}Px_p\quad y^{+2}b_4^{+}\in E(G)$$

得矛盾。

若 $b_4x\in E(G)$，那么得 $G\left[\{x,x',x^{+},b_4\}\right]\cong K_{1,3}$，与无爪图矛盾。

论断 5 证毕。

由论断 5(a)可知：

$$\begin{aligned}\left|N_{Q1}(H_1)\right|+\left|N_{Q1}(H_2)\right|&=\left|N_{Q1}^{+}(H_1)\right|+\left|N_{Q1}(H_2)\right|=\left|N_{Q1}^{+}(H_1)\cup N_{Q1}(H_2)\right|+\left|N_{Q1}^{+}(H_1)\cap N_{Q1}(H_2)\right|\\&\le\left|V(Q_1)-\left\{x^{+}\right\}\right|=\left|Q_1\right|-1\end{aligned}\tag{6}$$

由论断 5(b)可知：

$$\begin{aligned}\left|N_{Q2}(H_1)\right|+\left|N_{Q2}(H_2)\right|&=\left|N_{Q2}^{-}(H_1)\right|+\left|N_{Q2}(H_2)\right|=\left|N_{Q2}^{-}(H_1)\cup N_{Q2}(H_2)\right|+\left|N_{Q2}^{-}(H_1)\cap N_{Q2}(H_2)\right|\\&\le\left|\left(V(Q_2)\cup\left\{x^{+}\right\}\right)-\left\{y^{+},y^{+2}\right\}\right|+\left|\left\{y^{-}\right\}\right|=\left|Q_2\right|\end{aligned}\tag{7}$$

由论断 5(c)可知：

$$\begin{aligned}\left|N_{Q3}(H_1)\right|+\left|N_{Q3}(H_2)\right|&=\left|N_{Q3}(H_1)\right|+\left|N_{Q3}^{-}(H_2)\right|=\left|N_{Q3}(H_1)\cup N_{Q3}^{-}(H_2)\right|+\left|N_{Q3}(H_1)\cap N_{Q3}^{-}(H_2)\right|\\&\le\left|V(Q_3)\cup\left\{y^{+2}\right\}\right|=\left|Q_3\right|+1\end{aligned}\tag{8}$$

所以，由(5)~ (8)知

$$\begin{aligned}n&\le d(H_1)+d(H_2)\\&=\left|N_R(H_1)\right|+\left|N_R(H_2)\right|+\left|N_{Q1}(H_1)\right|+\left|N_{Q1}(H_2)\right|+\left|N_{Q2}(H_1)\right|+\left|N_{Q2}(H_2)\right|+\left|N_{Q3}(H_1)\right|+\left|N_{Q3}(H_2)\right|\\&=\left|R\right|-1+\left|Q_1\right|-1+\left|Q_2\right|+\left|Q_3\right|+1=n-1\end{aligned}$$

这与定理 5 的条件矛盾。

情形一证毕。

情形二 $\left|T-\{u,v\}\right|=1$

由于$\left|T\right|\ge 2$，所以 u，v 至少有一个存在于 T。不妨设 $v\in T$，则存在 $x',v'\in V(B)$，使 $xx',vv'\in E\left(T,V(B)\right)$。由论断 1，$v\notin\left\{x^{+},x^{+2}\right\}$。

论断 6 $u\notin\left\{x^{-},x^{-2}\right\}$

证明：如果$u\in\left\{x^{-},x^{-2}\right\}$，由论断 1(a)，$u\notin T$，故 $T=\{x,v\}$，即$\left|N_P(B)\right|=2$。注意到 $\delta\ge 3$，可知$|B|\ge 2$，所以存在$t_1,t_2\in B$使得$t_1t_2\in E(B)$，取$H_1=x^{-}x^{+}x^{+2}$，$H_2=t_1t_2\in E(B)$，则$H_1\cong P_3$，$H_2\cong K_2$且 H_1 与 H_2 不相邻。注意到$N_B(H_1)=\varnothing$，$N_R(H_2)\subseteq V(B)$，所以$N_R(H_1)\cap N_R(H_2)=\varnothing$。于是

$$\left|N_R(H_1)\right|+\left|N_R(H_2)\right|=N_R(H_1)\cup N_R(H_2)|+|N_R(H_1)\cap N_R(H_2)|\le\left|R-\{t_1,t_2\}\right|=\left|R\right|-2\tag{9}$$

显然$N_P(H_1)\cap N_P(H_2)\subseteq\{x,v\}$，所以

$$\left|N_P(H_1)\right|+|\,N_P(H_2)=\left|N_P(H_1)\cup N_P(H_2)\right|+\left|N_P(H_1)\cap N_P(H_2)\right|\le\left|V(P)-\left\{x^{-},x^{+},x^{+2}\right\}\right|+2=\left|P\right|-1\tag{10}$$

由(9)(10)得

$$\begin{aligned}n\le d(H_1)+d(H_2)&=\left[d_R(H_1)+d_P(H_1)\right]+\left[d_R(H_2)+d_P(H_2)\right]\\&=\left|N_R(H_1)\right|+\left|N_R(H_2)\right|+\left|N_P(H_1)\right|+\left|N_P(H_2)\right|\le\left|R\right|-2+\left|P\right|-1=n-3\end{aligned}$$

这与定理 5 的条件矛盾。论断 6 证毕。

由论断 6，$\left|x_1Px\right|\ge 3$。此时取$H_1=v'vv^{-}$，$H_2=x^{-2}x^{-}$，则$H_1\cong P_3$，$H_2\cong K_2$。如果$vx^{-}\in E(G)$，由论断 1 可得$G\left[\left\{v,v',v^{-},x^{-}\right\}\right]\subseteq K_{1,3}$，得矛盾。类似可证$vx^{-2}\notin E(G)$。结合论断 1 可知 H_1 与 H_2 不相邻。令：

$$Q_1=x_1Px^{-},\ Q_2=xPx_p$$

论断 7： $N_R(H_1)\cap N_R(H_2)=\varnothing$

证明：由论断 1 知$N_B(H_2)=\varnothing$，

若$N_R(H_1)\cap N_R(H_2)\ne\varnothing$，设存在$c_1\in N_R(H_1)\cap N_R(H_2)$，使$c_1\notin V(B)$，于是$c_1v'\notin E(G)$。又$c_1v^{-}\notin E(G)$

(否则G有长于P的(u,v)-路 $x_1Px^-c_1v^-\overline{P}xBx_p$ 或 $x_1Px^{-2}c_1v^-\overline{P}x^+x^-xBx_p$。故只有 $c_1v\in E(G)$，由论断1，$v'v^-,c_1v^-\notin E(G)$，又注意到 $c_1v'\notin E(G)$，所以 $G\left[\left\{v,v',c_1,v^-\right\}\right]\cong K_{1,3}$，此与无爪图矛盾。论断 7 证毕。

由论断 7 知：

$$\left|N_R(H_1)\right|+\left|N_R(H_2)\right|=\left|N_R(H_1)\cup N_R(H_2)\right|\le\left|R-\{v'\}\right|=|R|-1 \tag{11}$$

论断 8 a) $N_{Q1}(H_1)\cup N_{Q1}^+(H_2)\subseteq V(Q_1)-\left\{x^-\right\}$， $N_{Q1}(H_1)\cap N_{Q1}^+(H_2)=\varnothing$

b) $N_{Q2}(H_1)\cup N_{Q2}^-(H_2)\subseteq\left(V(Q_2)\cup\left\{x^-\right\}\right)-\left\{v^-\right\}$， $N_{Q2}(H_1)\cap N_Q^2(H_2)\subseteq\{x\}$

证明： a) 显然 $N_{Q1}(H_1)\subseteq V(Q_1)$，注意到 H_1 与 H_2 不相邻，可知： $x^-,x^{-2}\notin N_{Q1}(H_1)$，得 $N_{Q1}(H_1)\subseteq V(Q_1)-\left\{x^-,x^{-2}\right\}$。因为 $x^-,x^{-2}\notin N_{Q1}(H_2)$，所以 $x,x^-\notin N_{Q1}^+(H_2)$，得

$$N_{Q1}^+(H_2)\subseteq\left(V(Q_1)\cup\{x\}\right)-\left\{x,x^-\right\}=V(Q_1)-\left\{x^-\right\}。$$

总之，

$$N_{Q1}(H_1)\cup N_{Q1}^+(H_2)\subseteq V(Q_1)-\left\{x^-\right\}。$$

如果 $N_{Q1}(H_1)\cap N_{Q1}^+(H_2)\ne\varnothing$，则存在 $c_2\in N_{Q1}(H_1)\cap N_{Q1}^+(H_2)$。因为 $x_1\notin N_{Q1}^+(H_2)$，所以 $c_2\ne x_1$。此时，必有 $c_2v^-\in E(G)$，事实上：由 $c_2\in N_{Q1}(H_1)$，知 c_2 与 v'，v，v^-之一相邻。由 $\left|T-\{u,v\}\right|=1$，知 $c_2v'\notin E(G)$，如果 $c_2v\in E(G)$，考虑 $G\left[\left\{v,v',b_2,v^-\right\}\right]$，由无爪性及 $v'v^-,v'c_2\notin E(G)$ 即得 $c_2v^-\in E(G)$。结合论断 1 可知 $c_2\notin\left\{x^-,x^{-2}\right\}$，于是 $c_2\in V\left(x_2Px^{-3}\right)$。由 $c_2\in N_{Q1}^+(H_2)$，知 c_2^- 与 x^-，x^{-2} 之一相邻，可得长于 P 的(u,v)-路： $x_1Pc_2^-x^-\overline{P}c_2v^-\overline{P}xBx_p$ 或 $x_1Pc_2^-x^{-2}\overline{P}c_2v^-\overline{P}x^+x^-xBx_p$，得矛盾。

b) 显然 $N_{Q2}(H_1)\subseteq V(Q_2)-\left\{v,v^-\right\}$。注意到 H_1 与 H_2 不相邻，可知 $v,v^-\notin N_{Q2}(H_2)$，所以 $v^-,v^{-2}\notin N_{Q2}^-(H_2)$，故

$$N_{Q2}^-(H_2)\subseteq\left(V(Q_2)\cup\left\{x^-\right\}\right)-\left\{v^-,v^{-2}\right\},$$

总之

$$N_{Q2}(H_1)\cap N_{Q2}^-(H_2)\subseteq\left(V(Q_2)\cup\left\{x^-\right\}\right)-\left\{v^-\right\}$$

如果 $N_{Q2}(H_1)\cap N_{Q2}^-(H_2)\ne\varnothing$，设 $c_3\in N_{Q2}(H_1)\cap N_{Q2}^-(H_2)$，若 $c_3\ne x$，则 $c_3\in V\left(x^+Px_p^{-2}\right)$。此时，必有 $c_3v^-\in E(G)$，事实上：由 $c_3\in N_{Q2}(H_1)$，知 c_3 与 v',v,v^- 之一相邻。由 $\left|T-\{u,v\}\right|=1$，知 $c_3v'\notin E(G)$。如果 $c_3v\in E(G)$，考虑 $G\left[\left\{v,v',c_3,v^-\right\}\right]$，由无爪性及 $v'v^-,v'c_3\notin E(G)$，即得 $c_3v^-\in E(G)$。由 $c_3\in N_{Q2}^-(H_2)$，知 c_3^+ 与 x^-，x^{-2} 之一相邻，可得长于 P 的(u,v)-路：

$x_1Px^-c_3^+Pv^-c_3\overline{P}xBx_p$ 或 $x_1Px^{-2}c_3^+Pv^-c_3\overline{P}x^+x^-xBx_p$，得矛盾。

论断 8 证毕。

由论断 8(a)可知：

$$\begin{aligned}\left|N_{Q1}(H_1)\right|+\left|N_{Q1}(H_2)\right|&=\left|N_{Q1}(H_1)\right|+\left|N_{Q1}^+(H_2)\right|=\left|N_{Q1}(H_1)\cup N_{Q1}^+(H_2)\right|+\left|N_{Q1}(H_1)\cap N_{Q1}^+(H_2)\right|\\&\le\left|V(Q_1)-\left\{x^-\right\}\right|=|Q_1|-1\end{aligned} \tag{12}$$

由论断 8(b)可知：

$$\begin{aligned}\left|N_{Q2}(H_1)\right|+\left|N_{Q2}(H_2)\right|&=\left|N_{Q2}(H_1)\right|+\left|N_{Q2}^-(H_2)\right|=\left|N_{Q2}(H_1)\cup N_{Q2}^-(H_2)\right|+\left|N_{Q2}(H_1)\cap N_{Q2}^-(H_2)\right|\\&\le\left|\left(V(Q_2)\cup\left\{x^-\right\}\right)-\left\{v^-\right\}\right|+\left|\{x\}\right|=|Q_2|+1\end{aligned} \tag{13}$$

所以，由(11)~(13)知

$$\begin{aligned}n&\le d(H_1)+d(H_2)=\left[d_R(H_1)+d_P(H_1)\right]+\left[d_R(H_2)+d_P(H_2)\right]\\&=\left|N_R(H_1)\right|+\left|N_R(H_2)\right|+\left|N_{Q1}(H_1)\right|+\left|N_{Q1}(H_2)\right|+\left|N_{Q2}(H_1)\right|+\left|N_{Q2}(H_2)\right|=|R|-1+|Q\{_1|-1+|Q_2|+1=n-1\end{aligned}$$

这与定理 5 的条件矛盾。

综合以上两种情形，定理得证。

3. 相关结果

推论 1：设 G 是 n 阶 3-连通无爪图，如果 G 中任意两个分别同构于 P_3 和 K_2 的不相邻子图 H_1，H_2 的度和 $d(H_1)+d(H_2)\ge n$，则 G 是 Hamilton 连通的。

证明：因为 G 是 3-连通的，所以对于 G 中任意两点 u，v，$\{u,v\}$不构成割集,又由推论条件知 G 中任意两个分别同构于 P_3 和 K_2 的不相邻子图 H_1，H_2 的度和 $d(H_1)+d(H_2)\ge n$，由定理 5 知，u，v 之间存在 Hamilton 路。所以推论 1 得证。

推论 2：设 G 是 n 阶 2-连通无爪图，$\delta(G)\ge 3$，如果 G 中任意两个分别同构于 P_3 和 $\bar{K}_2$ 的不相邻子图 H_1，H_2 的度和 $d(H_1)+d(H_2)\ge n$，则对于 G 中不构成割集的两点$\{u, v\}$，u，v 间存在 Hamilton 路。

证明：对于 G 的任意两个分别同构于 P_3 和 K_2 的不相邻子图 H_1,H_3，不妨设 $H_3=u_1u_2$，那么 $H_2=\{u_1,u_2\}\cong\bar{K}_2$，显然 H_2 是 H_3 的支撑子图，所以 $d(H_2)=|N(H_2)|=|N(H_3)|=d(H_3)$，所以

$d(H_1)+d(H_3)=d(H_1)+d(H_2)\ge n$。

所以由定理 5 知对于 G 中不构成割集的两点$\{u,v\}$，u，v 间存在 Hamilton 路。推论 2 证毕。

推论 3：设 G 是 n 阶 2-连通无爪图，$\delta(G)\ge 3$，如果 G 中任意两个分别同构于 $\bar{K}_3$ 和 K_2 的不相邻子图 H_1，H_2 的度和 $d(H_1)+d(H_2)\ge n$，则对于 G 中不构成割集的两点$\{u,v\}$，u，v 间存在 Hamilton 路。

证明：对于 G 的任意两个分别同构于 P_3 和 K_2 的不相邻子图 H_3，H_2，不妨设 $H_3=u_1u_2u_3$，那么 $H_1=\{u_1,u_2,u_3\}\cong\bar{K}_3$，显然 H_1 是 H_3 的支撑子图，所以 $d(H_1)=|N(H_1)|=|N(H_3)|=d(H_3)$。

所以 $d(H_1)+d(H_2)=d(H_3)+d(H_2)\ge n$。

所以由定理 5 知对于 G 中不构成割集的两点$\{u,v\}$，u，v 间存在 Hamilton 路。推论 3 证毕。

致谢

在此我要特别感谢我的导师王江鲁教授的热情关怀和悉心指导。在我撰写此文的过程中，王老师倾注了大量的心血和汗水，无论是在文章的选题，构思和资料的收集方面，还是在文章的研究方法以及成文定稿方面，我都得到了王老师悉心细致的教诲和无私的帮助，特别是他广博的学识，深厚的学术素养，严谨的治学精神和一丝不苟的工作作风使我终生受益，我所取得的进步和成果离不开导师的辛勤培育，在此我向我的导师表示深深的敬意和衷心的感谢。

基金项目

山东省自然科学基金资助项目(ZR2012AM005)。

参考文献 (References)

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph theory with applications. Macmillan London and Elsevier, New York.

[2] Dirac, G.A. (1952) Some theorems on abstract graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **3**, 269-281.

[3] Ore, O. (1960) Note on Hamilton circuits. *American Mathematical Monthly*, **67**, 55.

[4] Matthews, M.M. and Summer, D.P. (1985) Longest paths and cycles in $K_{1,3}$-free graphs. *Graph Theory*, **9**, 269-277.

[5] Flandrin, E., Fournier, I. and Germa, A. (1988) Circumference and Hamiltonism in $K_{1,3}$-free graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, 41, 131-140.