Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2013, 2, 147-151**
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2013.24019 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

The Maximum Sum-Balaban Index of Tree Graph with Given Vertices and Maximum Degree*

Zhifu You[1], Han Han[2]

[1]Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou
[2]South China Normal University, Guangzhou
Email: youzhf@hotmail.com, 583890363@qq.com

Received: Jul. 3rd, 2013; revised: Aug. 6th, 2013; accepted: Aug. 24th, 2013

Abstract: In this paper, by using the graph operation, we determine the extremal graph which attains the maximum Sum-Balaban index among trees with given vertices and maximum degree.

Keywords: Sum-Balaban Index; Tree Graph; Greedy Tree

给定顶点和最大度树图的最大 Sum-Balaban 指标*

游志福[1]，韩 函[2]

[1]广东技术师范学院，广州
[2]华南师范大学，广州
Email: youzhf@hotmail.com, 583890363@qq.com

收稿日期：2013 年 7 月 3 日；修回日期：2013 年 8 月 6 日；录用日期：2013 年 8 月 24 日

摘 要：通过图的操作的方法，本文给出了给定顶点和最大度树图中，取得最大 Sum-Balaban 指标的极图。

关键词：Sum-Balaban 指标；树图；Greedy 树

1. 引言

设G表示简单连通图，其点集为$V(G)$、边集为$E(G)$。Δ表示图G的最大度。$G[X]$表示由G的点子集X构成的引导子图。图G的两个顶点u和v之间的距离，定义为G中连接u和v的最短路的长度，记为$d_G(u,v)$。$D_G(u)=\sum_{v\in V(G)} d_G(u,v)$表示图$G$中顶点$u$的距离和。

记$|V(G)|=n$和$|E(G)|=m$。图G的圈数μ是从G中删去边，使G成为无圈图的最小边数。众所周知，$\mu=m-n+1$。

连通图G的 Sum-Balaban 指标[1]定义为：

$$SJ(G)=\frac{m}{\mu+1}\sum_{uv\in E(G)}\frac{1}{\sqrt{D_G(u)+D_G(v)}}。$$

目前已有一些关于 Sum-Balaban 指标数学方面的结果[2-4]。

*资助信息：国家自然科学基金数学天元基金(11226283)。

设T表示一个有根点r的树。对于$v \in V(T)$，称$d(v,r)$为v的深度。T中所有点最大深度称为T的高，记为$h(T)$。

定义 1.1：([5])设树T有根点u，标记u为$u_{(0)}$。对于$d = 1,2,\cdots$，T中具有d深度的点标记为$u_{(0,x_1,\cdots,x_d)}$，如果此顶点的父顶点已经标记为$u_{(0,x_1,\cdots,x_{d-1})}$，使得$x_i\ (i = 1,2,\cdots,d)$是一个正实数且两个子顶点$u_{(0,x_1,\cdots,x_d)}$，$u_{(0,x_1,\cdots,y_d)}$满足$x_d \neq y_d$。上述对$V(T)$的标号定义为$T$的根树标号，且根树标号的下标集记为$S(T)$。

定义 1.2：([5])设n，$\Delta \in Z^+$，$\Delta \geq 3$。$T(n,\Delta)$是一个以v_0为根的树，并按如下定义：$T(1,\Delta)$由标号为v_0的单点构成。树$T(n,\Delta)$的顶点集为$\{v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$。当$2 \leq n \leq \Delta + 1$，$T(n,\Delta)$的边集为$\{v_0v_1, \cdots, v_0v_{n-1}\}$。当$n > \Delta + 1$，$T(n,\Delta)$将一个叶子点$v_{n-1}$，连接到$T(n-1,\Delta)$的点集$\{v_0, v_1, \cdots, v_{n-2}\}$中度小于$\Delta$的点，并使标号尽可能小。

2. 给定顶点和最大度树图的最大 Sum-Balaban 指标

树T_u的根点为u，T_v的根点为v。对$V(T_u)$和$V(T_v)$用根树的标号法，分别得到标号集$S(T_u)$和$S(T_v)$。显然$S(T_u) \cap S(T_v) \neq \phi$。设$U_0 = \{u_s \mid s \in S(T_u) \cap S(T_v)\}$，$V_0 = \{v_s \mid s \in S(T_u) \cap S(T_v)\}$，则$T[U_0]$和$T[V_0]$都是树图，且$T[U_0] \cong T[V_0]$。

定义 2.1: ([5])设P是树T的以u和v为端点且$d(u,v) = 1$或 2 的一条路。T_u和T_v分别是$T - E(P)$的以u和v为根点的两个分支。用根树标号法对$V(T_u)$和$V(T_v)$进行标号，分别得到$S(T_u)$和$S(T_v)$。设

$$\begin{aligned} T' = T &- \{u_s u_t \mid s \in S(T_u) \cap S(T_v), t \in S(T_u) \setminus S(T_v), u_s u_t \in E(T_u)\} \\ &+ \{v_s u_t \mid s \in S(T_u) \cap S(T_v), t \in S(T_u) \setminus S(T_v), u_s u_t \in E(T_u)\} \end{aligned}。$$

从T到T'的变换，称为(T_u, T_v)-变换。

引理 2.2：设T'是由T通过(T_u, T_v)-变换得到的图，则$SJ(T') \geq SJ(T)$，且$SJ(T') = SJ(T)$成立当且仅当$T' \cong T$。

证明：设$U_0 = \{u_s \mid s \in S(T_u) \cap S(T_v)\}$，$U_1 = V(T_u) \setminus U_0$，$V_0 = \{v_s \mid s \in S(T_u) \cap S(T_v)\}$和$V_1 = V(T_v) \setminus V_0$。若$T \ncong T'$，则$U_1 \neq \phi$，$V_1 \neq \phi$。

对任意的s，若$s \in S(T_u) \cap S(T_v)$，显然$u_s \in U_0$，$v_s \in V_0$，

$$D_T(u_s) = D_T(u_s, U_0) + D_T(u_s, U_1) + D_T(u_s, V_0) + D_T(u_s, V_1) \tag{1}$$

且

$$D_{T'}(v_s) = D_{T'}(v_s, V_0) + D_{T'}(v_s, U_1) + D_{T'}(v_s, U_0) + D_{T'}(v_s, V_1)。 \tag{2}$$

注意$T'[U_0] \cong T[V_0]$，且$T_u \cong T'[V_0 \cup U_1]$，因此

$D_T(u_s, V_0) = D_{T'}(v_s, U_0)$，$D_T(u_s, U_0 + U_1) = D_{T'}(v_s, V_0 + U_1)$且

$D_T(u_s, U_1) = D_{T'}(v_s, U_1)$，$D_T(u_s, V_1) > D_{T'}(v_s, V_1)$。

$$从而有\ D_T(u_s) - D_{T'}(v_s) = D_T(u_s, V_1) - D_{T'}(v_s, V_1) > 0。 \tag{3}$$

类似地，

$$D_T(v_s) = D_T(v_s, U_0) + D_T(v_s, U_1) + D_T(v_s, V_0) + D_T(v_s, V_1)， \tag{4}$$

$$D_{T'}(u_s) = D_{T'}(u_s, V_0) + D_{T'}(u_s, U_1) + D_{T'}(u_s, U_0) + D_{T'}(u_s, V_1)。 \tag{5}$$

因此，

$$D_{T'}(u_s) - D_T(v_s) = D_{T'}(u_s, V_1) - D_T(v_s, V_1) > 0。 \tag{6}$$

注意到$D_T(u_s, V_1) = D_{T'}(u_s, V_1)$和$D_{T'}(v_s, V_1) = D_T(v_s, V_1)$，由(3)和(6)，我们有

$$D_T(u_s) - D_{T'}(v_s) = D_{T'}(u_s) - D_T(v_s) = D_T(u_s, V_1) - D_{T'}(v_s, V_1) > 0。 \tag{7}$$

由(1)，(2)，(4)和(5)，我们有

$$D_{T'}(u_s)-D_T(u_s)=D_T(v_s)-D_{T'}(v_s)>0。 \tag{8}$$

设 $a=D_{T'}(u_s)-D_T(u_s)$， $a'=D_{T'}(u_t)-D_T(u_t)$， $b=D_T(v_s)-D_{T'}(v_s)$， $b'=D_T(v_t)-D_{T'}(v_t)$。由(8)，则 $b=a>0$， $b'=a'>0$。

设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+a+a'}}$，由于 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 是关于 x 的单调递减函数，并且

$D_T(u_s)+D_T(u_t)>D_{T'}(v_s)+D_{T'}(v_t)=D_T(v_s)+D_T(v_t)-a-a'$，则

$$\frac{1}{\sqrt{D_T(v_s)+D_T(v_t)-a-a'}}-\frac{1}{\sqrt{D_T(v_s)+D_T(v_t)}}>\frac{1}{\sqrt{D_T(u_s)+D_T(u_t)}}-\frac{1}{\sqrt{D_T(u_s)+D_T(u_t)+a+a'}}。$$

因此

$$\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(u_s)+D_{T'}(u_t)}}+\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(v_s)+D_{T'}(v_t)}}>\frac{1}{\sqrt{D_T(u_s)+D_T(u_t)}}+\frac{1}{\sqrt{D_T(v_s)+D_T(v_t)}} \tag{9}$$

类似的，对于任意顶点 $w\in U_1\cup V_1$，可以证明： $D_T(w)>D_{T'}(w)$。

这意味着下列(10)~(12)式成立：

对任意边 $e=xy\in E(T[U_1])\cup E(T[V_1])$，有

$$\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(x)+D_{T'}(y)}}>\frac{1}{\sqrt{D_T(x)+D_T(y)}}。 \tag{10}$$

对任意边 $u_sw\in E(T_1)\subset E(T)$， $u_s\in U_0$， $s\in S(T_u)\cap S(T_v)$ 且 $w\in U_1$，对应的边是 $v_sw\in E(T')$，则有

$$\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(v_s)+D_{T'}(w)}}>\frac{1}{\sqrt{D_T(u_s)+D_T(w)}}。 \tag{11}$$

对任意边 $v_sw\in E(T_2)$， $v_s\in V_0$， $s\in S(T_u)\cap S(T_v)$ 且 $w\in V_1$，有

$$\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(v_s)+D_{T'}(w)}}>\frac{1}{\sqrt{D_T(v_s)+D_T(w)}}。 \tag{12}$$

若 $d(u,v)=1$，对于边 u_0v_0，由(8)有

$$\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(u_0)+D_{T'}(v_0)}}=\frac{1}{\sqrt{D_T(u_0)+D_T(v_0)}}。 \tag{13}$$

若 $d(u,v)=2$，对任意 $w\in V(T)-V(T_u)-V(T_v)$， $D_T(w)=D_{T'}(w)$，因此对边 $xy\in E(T-V(T_u)-V(T_v))$，有

$$\frac{1}{\sqrt{D_{T'}(x)+D_{T'}(y)}}=\frac{1}{\sqrt{D_T(x)+D_T(y)}}。 \tag{14}$$

由(9)~(14)及 Sum-Balaban 指标的定义，则 $SJ(T')>SJ(T)$。证毕。

定义 2.3：([5])根点为 r，给定度序列的一个树图，满足下列条件时，称为 Greedy 树。

1) 对于 $h(T)>i>0$，具有深度 i 的任何顶点的度大于或等于具有深度 $i+1$ 的任何顶点的度。

2) 对于具有相同深度的不同顶点 w 和 x，且 $d(x)>d(w)\geq 2$ 时，x 的子顶点的最小度大于或等于 w 的子顶点的最大度。

3) 对于具有相同深度的不同顶点 w 和 x，且 $d(x)=d(w)\geq 2$ 时，x 的子顶点的最小度大于或等于 w 的子顶

点的最大度；当 x 和 w 的位置交换时，也具有一样的性质。

完全类似文献[5]中定理 11 及引理 12 的证明，我们有以下引理 2.4 及引理 2.5：

引理 2.4： 具有给定度序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的所有树图中，Greedy 树取得最大 Sum-Balaban 指标。

证明： 设 T 具有度序列 π，且根点为 r。

下面只需证明：如果 T 不同构一个 Greedy 树，则 T 可以用图的操作变为，具有相同度序列 π 的树 T'，使得 $SJ(T)<SJ(T')$。

假设 T 不同构于一个 Greedy 树。由定义 2.3，下列三个说明成立：

1) 存在 $x,y\in V(T)$ 使得 $d(x,r)>d(y,r)$ 且 $d(x)>d(y)$。

2) 存在具有相同深度的 $x',y'\in V(T)$，且 $d(y')>d(x')\ge 2$，并使得 x' 的一个子顶点 x 和 y' 的一个子顶点 y 满足 $d(x)>d(y)$。

3) 存在具有相同深度的 $x',y'\in V(T)$，且 $d(y')=d(x')\ge 2$，并使得 x' 的子顶点的最小度小于 y' 的子顶点的最大度，和 y' 具有最小度的一个子顶点 y， x' 具有最大度的一个子顶点 x，满足 $d(x)>d(y)$。

对上述三种情况之一，设 $u,v\in V(P_{xy})$ 使得 $d(u,x)=d(v,y)$ 且 $d(x,v)-d(x,u)=1$ 或 2。设 T_u 和 T_v 分别是 $T-E(P_{uv})$ 以 u 和 v 为根点的两个分支。给定 $V(T_u)$(或 $V(T_v)$)一个特定的有根树标号法使得：

1) 对于 $d\ge 0$，任意具有 $d(w)>1$ 且标号为 $u_{(0,x_1,\cdots,x_d)}$ (或 $v_{(0,x_1,\cdots,x_d)}$)的顶点 w，其子顶点被标记为 $u_{(0,x_1,\cdots,x_d,1)}$，$u_{(0,x_1,\cdots,x_d,2)}$，…，$u_{(0,x_1,\cdots,x_d,d(w)-1)}$ (或 $v_{(0,x_1,\cdots,x_d,1)}$，$v_{(0,x_1,\cdots,x_d,2)}$，…，$v_{(0,x_1,\cdots,x_d,d(w)-1)}$)，且

2) 标记 x 为 $u_{(0,1,\cdots,1)}$ 和 y 为 $v_{(0,1,\cdots,1)}$。

则 T 可由 (T_u,T_v)-变换变为 T'。注意到由 T 到 T' 的变换，将会减少满足上述三个说明的点对的个数。若 $T\ncong T'$，则由引理 2.2，结论成立。否则，重复上面变换，T 可以变成一个具有度序列 π 的新 greedy 树 T''。由于 $T\ncong T'''$，则由引理 2.2，有 $SJ(T)<SJ(T'')$，矛盾！

从而结论成立。证毕。

引理 2.5： 设 T 和 T' 分别是以 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 和 $(d_1,\cdots,d_i+1,\cdots,d_j-1,\cdots,d_n)$ 为度序列的 Greedy 树，其中 $(d_1\ge\cdots\ge d_i\ge\cdots\ge d_j\ge\cdots\ge d_n)$ 且 $d_j\ge 1$，则 $SJ(T)<SJ(T')$。

证明： x 和 y 分别是树 T 中具有度 d_i 和 d_j 的两个顶点。设 $u,v\in V(P_{xy})$，满足 $d(u,x)=d(v,y)$ 且 $d(x,v)-d(x,u)=1$ 或 2。T_u 和 T_v 分别是 $T-E(P_{uv})$ 以 u 和 v 为根点的两个分支。给定 $V(T_u)$(或 $V(T_v)$)一个特定的有根树标号法使得：

1) 对于 $d\ge 0$，任意具有 $d(w)>1$ 且标号为 $u_{(0,x_1,\cdots,x_d)}$ (或 $v_{(0,x_1,\cdots,x_d)}$)的顶点 $w\ne x$，其子顶点被标记为 $u_{(0,x_1,\cdots,x_d,1)}$，$u_{(0,x_1,\cdots,x_d,2)}$，…，$u_{(0,x_1,\cdots,x_d,d(w)-1)}$ (或 $v_{(0,x_1,\cdots,x_d,1)}$，$v_{(0,x_1,\cdots,x_d,2)}$，…，$v_{(0,x_1,\cdots,x_d,d(w)-1)}$)。

2) 标记 x 为 $u_{(0,1,\cdots,1)}$ 和 y 为 $v_{(0,1,\cdots,1)}$。

3) 标记 x 的子顶点为 $u_{(0,1,\cdots,1,1)}$，$u_{(0,1,\cdots,1,2)}$，…，$u_{(0,x_1,\cdots,x_d,d_i-2)}$，$u_{(0,x_1,\cdots,x_d,d_i)}$。

4) 对于标号为 $u_{(0,1,\cdots,1,d_i)}$ 的顶点 z，和由顶点 z 和其后继顶点引导的子树 T_z，$V(T_z)=V(T_u)\setminus U_0$，其中 $U_0=\{u_s\,|\,s\in S(T_u)\cap S(T_v)\}$ (注意到在 Greedy 树 T 中，u 的深度大于或等于 v 的深度，因此在 T_v 中，存在一个以 v 为根点的子树同构于 T_u)。

则由 (T_u,T_v)-变换，T 可变为 T''，且 T'' 具有度序列 $(d_1,\cdots,d_i+1,d_j-1,\cdots,d_n)$ 和 $T\ncong T''$，由引理 2.2 和 2.4，则 $SJ(T)<SJ(T'')<SJ(T')$。证毕。

设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 和 $\pi'=(d_1',d_2',\cdots,d_n')$ 是两个非增 r 的图度序列。如果 $\pi\ne\pi'$，$\sum_{i=1}^{n}d_i=\sum_{i=1}^{n}d_i'$，且对于 $j=1,2,\cdots,n$，有 $\sum_{i=1}^{j}d_i\le\sum_{i=1}^{j}d_i'$ 成立，则称 π' 优超于 π。

推论 2.6： 设 T 和 T' 分别是以 π 和 π' 为度序列的 Greedy 树，并且 π' 优超于 π，则 $SJ(T)\le SJ(T')$，等号成立当且仅当 $T\cong T'$。

由引理 2.4，引理 2.5 及推论 2.6，则下列定理成立：

定理 2.7：设 T 是有 n 个顶点，最大度为 Δ 的树，则 $SJ(T) \le SJ(T(n,\Delta))$，等号成立当且仅当 $T \cong T(n,\Delta)$。

参考文献 (References)

[1] Balaban, A.T., Khadikar, P.V. and Aziz, S. (2010) Comparison of topological indices based on iterated “sum” versus “product” operations. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, **1**, 43-67.

[2] Deng, H. (2011) On the Sum-Balaban index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **66**, 273-284.

[3] Xing, R., Zhou, B. and Grovac, A. (2012) On Sum-Balaban index. *Ars Combinatoria*, **104**, 211-223.

[4] You, L. and Han, H. (2013) The maximum Sum-Balaban index of trees with given diameter. *Ars Combinatoria*, Accepted.

[5] Dong, H. and Guo, X. (2011) Character of trees with extreme Balaban index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **66**, 261-272.