

Singular Integral Equation Method for Thermal Contact Problem of FGM with Crack*

Xing Li, Mingjun Pang

School of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan
Email: li_x@nxu.edu.cn

Received: Aug. 6th, 2012; revised: Aug. 15th, 2012; accepted: Aug. 23rd, 2012

Abstract: Contact problems are common physical phenomena in the real life and engineering practices due to the inevitability of contact. At the end of the contact area, the phenomenon of stress concentration may happen, which can significantly reduce the service life of mechanical structural components. In recent years, functionally graded materials (FGMs) have been used in many important engineering practices to relieve stress concentration. The study of the contact problem of functionally graded materials can provide instruction to improve production efficiency and increase economic benefits with a great deal. The present paper discusses the thermal contact problem of a half-plane functionally graded material with a crack. By using the superposition principle, the stated problem is reduced to the Cauchy type singular integral equations of the first kind, which are solved via numerical quadrature method. Then, figures are plotted to reveal the influences of the parameters of the non-homogeneity, the friction coefficient, and the dimension of crack on the stress intensity factor.

Keywords: Singular Integral Equation; Thermal Contact Problem; Functionally Graded Material; Crack

含裂纹功能梯度材料热接触的奇异积分方程方法*

李 星, 庞明军

宁夏大学数学计算机学院, 银川
Email: li_x@nxu.edu.cn

收稿日期: 2012年8月6日; 修回日期: 2012年8月15日; 录用日期: 2012年8月23日

摘 要: 接触问题是我们生产、生活和实际工程中常见的物理现象, 由于在接触过程中接触区内不可避免会产生应力集中现象, 从而大大降低了机械结构部件的使用寿命。近些年来功能梯度材料的出现大大改善了这种缺陷, 所以研究功能梯度材料的接触问题对于提高生产效率, 增加经济效益和工程安全有着重要意义。本文讨论了带裂纹的半无限大功能梯度材料的热接触问题。利用叠加原理将所研究的问题转化为第一类带 Cauchy 核的奇异积分方程, 并利用数值求积方法求解了奇异积分方程, 得到了裂纹尖端的应力强度因子。通过程序画图分析了材料参数, 摩擦系数及裂纹尺寸对裂纹尖端应力强度因子的影响。

关键词: 奇异积分方程; 热接触问题; 功能梯度材料; 裂纹

1. 引言

由于功能梯度材料是一种非均匀的复合材料。一般来说, 它的材料性质可以按任意连续函数变化, 如果直接考虑这种情况往往会给问题的分析带来很大的数学处理上的困难。所以目前大多是假设材料参数按某种特定

*资助信息: 国家自然科学基金(10962008)和(51061015), 以及中国高等学校博士学科点基金(博导类)(20116401110002)的资助。

的函数变化, 如指数函数形式和幂函数形式。Suresh 等人^[1]探究了材料参数以指数函数形式变化的功能梯度基底在刚性球形压头下的接触问题。接着他们又以材料参数为指数函数和幂函数形式研究了功能梯度材料半空间在球形和圆锥形压头作用下的轴对称接触问题^[2,3]。Guler 和 Erdogan^[4]分析了材料参数按照幂函数和指数函数变化时的梯度涂层材料在刚性压头作用下的二维滑动摩擦接触力学问题。

另外, 在生产过程中由于生产技术的制约难免会在材料中夹杂气泡或缝隙, 所以在理论上对于含有裂纹的功能梯度材料的接触问题的研究也是很有必要的。最初的研究都只是假设缝隙是一些简单的裂纹, 如 Tonoyan 等^[5]研究了各向同性半平面上的垂直裂纹情况, Sarkisian 等^[6]研究了有限区间裂纹情况, Minasian^[7]研究了边界裂纹情况, Qian 等^[8]还讨论了斜边界裂纹, Boyadzhii 等^[9]研究了单压头下周期垂直裂纹情况, Kudish^[10]研究了非周期直线裂纹情况, 这些文章都是基于对偶积分方程方法^[5,7,11]和保角映射方法^[12]。用对偶积分方程方法最终都得到第二类 Fredholm 积分方程, 用保角映射方法时, 初始问题都被转化为 Riemann-Hilbert 问题, 并给出了数值结果。此外, 对一些直线裂纹情况还得到了奇异积分方程组, 它们的解通过 Chebyshev 多项式级数^[13]或加权级数^[10]得到。Panasyuk 等^[14]用带 Cauchy 核的奇异积分方程方法^[15]研究了带裂纹的半平面在压头作用下的非周期接触问题, 李星^[16]用带 Hilbert 核的奇异积分方程研究了无裂纹带垫圈周期接触问题, 周跃亭和李星^[17]研究了周期裂纹的半平面周期接触问题。刘铁军和汪越胜^[18]研究了功能梯度材料涂层半空间的轴对称光滑接触问题。Choi^[19]研究了功能梯度材料粘接均匀材料在温度梯度场中的稳定状态的热弹性问题, 之后他又考虑了带摩擦的滑动压头在梯度涂层上的接触问题^[20]。据作者所知, 含有裂纹的功能梯度材料在移动平底压头应摩擦产生热流的热接触问题还没有得到研究。

本文研究了含有裂纹的功能梯度材料在移动平底压头作用下的热接触问题。取功能梯度材料的热传导系数、剪切模量和热扩散系数均为坐标 x 的指数函数。根据叠加原理将问题看成是两类问题的叠加: 1) 无裂纹存在的相同结构受压头摩擦作用的接触问题; 2) 裂纹表面受自平衡的表面外载荷的作用的裂纹问题。利用傅立叶变换并引入位错密度函数得出奇异积分方程, 再利用 Gauss-Chebyshev 求积公式对奇异积分方程进行离散, 最后得到应力强度因子。通过数值算例分析了材料参数, 摩擦系数及裂纹尺寸对裂纹尖端应力强度因子的影响。

2. 问题的描述和控制方程

如图 1 所示, 假设半无限大功能梯度材料中含有一长度为 $2a$ 且平行于边界的裂纹, 该裂纹与上表面的距离为 h 。一刚性压头从区间 $-l \leq y \leq l$ 上压入此半平面。为了数学上的求解方便, 我们作如下假设:

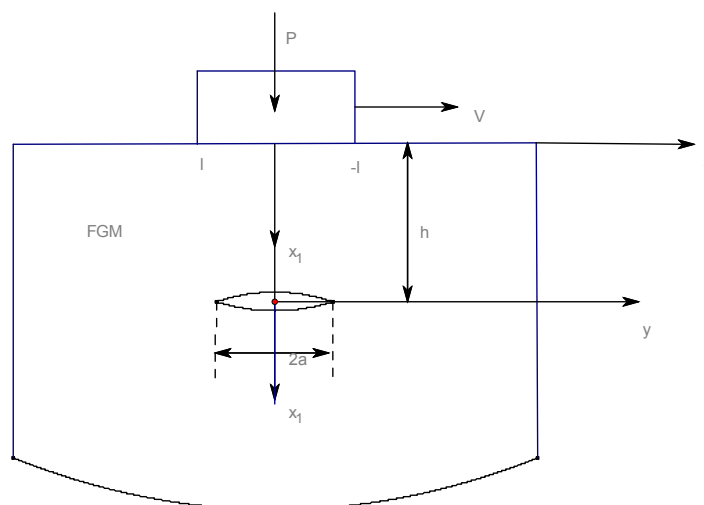


Figure 1. Model of semi-infinite functionally graded materials with a crack indented by a moving flat punch
图 1. 含裂纹半无限大功能梯度材料在运动平压头作用下的模型

- 1) 压头是刚性的且不传热, 这样摩擦热量仅传于接触面;
- 2) 在接触区域外的自由面上是绝热的;
- 3) 压头是缓慢移动的, 这样惯性可以忽略;
- 4) 接触面是稳定的, 即压头与接触表面没有分离。

另外, 还假定功能梯度材料的热传导系数 k , 剪切模量 μ , 热扩散系数 α 均以指数形式分布, 即 $k(x) = k_0 e^{\delta x}$, $\mu(x) = \mu_0 e^{\beta x}$, $\alpha(x) = \alpha_0 e^{\gamma x}$ 其中 δ, β, γ 是不等于零的常数, k_0, μ_0, α_0 分别是边界处的热传导系数、剪切模量、热扩散系数。泊松比设为常数 ν 。

平面热弹性本构方程为

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{\mu}{\kappa - 1} \left[(1 + \kappa) \frac{\partial u}{\partial x} + (3 - \kappa) \frac{\partial v}{\partial y} - 4\alpha^* \Theta \right] \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{\mu}{\kappa - 1} \left[(1 + \kappa) \frac{\partial v}{\partial y} + (3 - \kappa) \frac{\partial u}{\partial x} - 4\alpha^* \Theta \right] \quad (2)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3)$$

其中, Θ 是温度。平面应变状态: 杨氏弹性模数 $\kappa = 3 - 4\nu$, $\alpha^* = (1 + \nu)\alpha_0$, 平面应力状态: 杨氏弹性模数 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, $\alpha^* = \alpha_0$, 其中 ν 是波松比。

接触面经过压头的移动所产生的摩擦热满足稳定状态的热传导方程

$$\nabla^2 \Theta + \delta \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

在忽略体积力的情况下热弹性状态的 Navier-Cauchy 平衡控制方程为

$$\nabla^2 u + \frac{2}{\kappa - 1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\beta}{\kappa - 1} \left[(1 + \kappa) \frac{\partial u}{\partial x} + (3 - \kappa) \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \frac{4\alpha^* e^{\gamma x}}{\kappa - 1} \left[(\beta + \gamma)\Theta + \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right], \quad (5)$$

$$\nabla^2 v + \frac{2}{\kappa - 1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \beta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{4\alpha^* e^{\gamma x}}{\kappa - 1} \frac{\partial \Theta}{\partial y}. \quad (6)$$

根据叠加原理, 上述问题可以看成是两类问题的叠加:

- (i) 无裂纹存在的相同结构受压头摩擦作用的接触问题(图 2)。

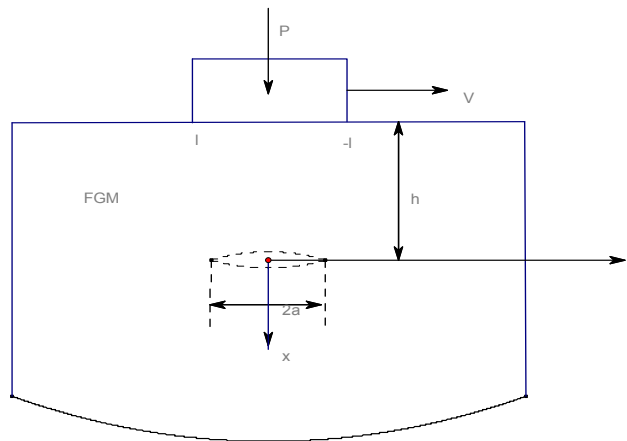


Figure 2. Contact problem of the same structure without the crack
图 2. 无裂纹存在的相同结构的接触问题

(ii) 裂纹表面受自平衡的表面外载荷 $\omega_1(y)$ 和 $\omega_2(y)$ 的作用的裂纹问题, 其中 $\omega_1(y)$ 和 $\omega_2(y)$ 可由问题(i)求得(图3)。

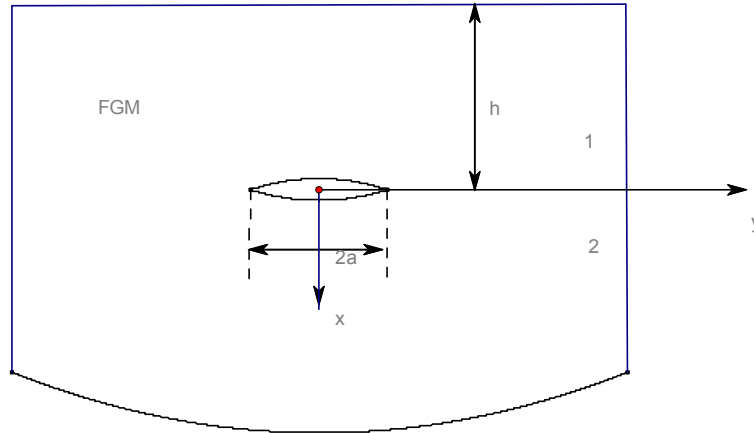


Figure 3. Crack problem under self-balancing external load on the crack interface
图 3. 裂纹面上受自平衡表面外载荷的裂纹问题

3. 边界条件的提出

对于问题(i), 边界条件如下给出:

$$k_0 \frac{\partial \Theta}{\partial x}(-h, y) = \begin{cases} -q_f(y), & |y| < l, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases} \quad (7)$$

$$\Theta(\infty, y) = 0, \quad |y| < \infty, \quad (8)$$

$$\sigma_{xx}(-h, y) = \sigma(y) = -p(y), \quad |y| < l, \quad (9)$$

$$\tau_{xy}(-h, y) = \tau(y) = -\mu_f p(y), \quad |y| < l, \quad (10)$$

$$\sigma_{xx}(-h, y) = 0, \quad \tau_{xy}(-h, y) = 0, \quad |y| > l, \quad (11)$$

$$\sigma_{xx}(\infty, y) = \tau_{xy}(\infty, y) = 0, \quad |y| \leq +\infty, \quad (12)$$

$$u(\infty, y) = 0, \quad v(\infty, y) = 0, \quad |y| < \infty, \quad (13)$$

其中, q_f 是摩擦热通量与压头的滑动速度 V 满足 $q_f(y) = -V\tau_{xy}(0, y)$, $|y| < l$; $p(y)$ 满足 $\int_{-l}^l p(y)dy = P$, P 是压头的压力; μ_f 是压头与接触面间的摩擦系数。

将问题(ii)处理为等温问题, 约束其的边界条件如下:

$$\tau_{1xy}(0^-, y) = \tau_{2xy}(0^+, y) = \omega_1(y), \quad |y| \leq a, \quad (14)$$

$$\sigma_{1xx}(0^-, y) = \sigma_{2xx}(0^+, y) = \omega_2(y), \quad |y| \leq a, \quad (15)$$

$$\sigma_{1xx}(-h, y) = \tau_{1xy}(-h, y) = 0, \quad |y| < +\infty, \quad (16)$$

$$\tau_{1xy}(0^-, y) = \tau_{2xy}(0^+, y), \quad \sigma_{1xx}(0^-, y) = \sigma_{2xx}(0^+, y), \quad |y| > a, \quad (17)$$

$$u_1(0^-, y) = u_2(0^+, y), \quad v_1(0^-, y) = v_2(0^+, y), \quad |y| > a. \quad (18)$$

其中下标 1, 2 代表裂纹上下的区域(如图3)。

4. 问题的求解

4.1. 对问题(i)的求解

对方程(4)关于变量 y 进行 Fourier 变换, 由边界条件(8)得

$$\Theta(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(s) e^{\lambda x - isy} ds, \quad (19)$$

其中

$$\lambda = -\frac{\delta}{2} - \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + s^2}, \quad (20)$$

由边界条件(7)得

$$A(s) = -\frac{1}{\lambda} \int_{-l}^l q_f(t) e^{ist} dt. \quad (21)$$

将(19)代入控制方程(5)和(6), 并由边界条件(13)得

$$u(x, y) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 F_j(s) m_j e^{n'_j x - isy} ds + \frac{4\alpha^* e^{\gamma x}}{\kappa - 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(s) \frac{\Phi}{\Delta} e^{\lambda x - isy} ds, \quad (22)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 F_j(s) e^{n'_j x - isy} ds + \frac{4\alpha^* e^{\gamma x}}{\kappa - 1} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(s) \frac{\Omega}{\Delta} e^{\lambda x - isy} ds, \quad (23)$$

这里, $F_j(s)$ ($j=1, 2$) 是由边界条件(9)和(10)确定的未知函数, 特征根 n'_j ($j=1, \dots, 4$) 以下给出

$$n'_j = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + s^2 + i(-1)^j \beta s \left(\frac{3-\kappa}{1+\kappa}\right)^{1/2}}, \quad \text{Re}(n'_j) < 0, \quad j=1, 2, \quad (24)$$

$$n'_j = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + s^2 - i(-1)^j \beta s \left(\frac{3-\kappa}{1+\kappa}\right)^{1/2}}, \quad \text{Re}(n'_j) > 0, \quad j=3, 4,$$

$m_j(s)$ ($j=1, \dots, 4$) 用根 n'_j ($j=1, \dots, 4$) 表示为

$$m_j = \frac{(\kappa - 1)(n_j'^2 + \beta n'_j) - (1 + \kappa)s^2}{[2n'_j + (\kappa - 1)\beta]s}. \quad (25)$$

另外, 在方程(22)和(23)中, Φ, Ω 和 Δ ($j=1, 2$) 被表示为

$$\Phi = (\beta + \gamma + \lambda) \left[\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) P_0 - \frac{4\kappa s^2}{\kappa^2 - 1} \right] + s^2 Q_0, \quad \Omega = s(\beta + \gamma + \lambda) \left[Q_0 + 2\beta \left(\frac{\kappa - 2}{\kappa - 1} \right) \right] - s P_0, \quad (26)$$

$$\Delta = \left[\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) P_0 - \frac{4\kappa s^2}{\kappa^2 - 1} \right] P_0 + s^2 \left[Q_0 + 2\beta \left(\frac{\kappa - 2}{\kappa - 1} \right) \right] Q_0$$

其中

$$P_0 = \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \right) (\gamma + \lambda)(\beta + \gamma + \lambda) - s^2, \quad Q_0 = \frac{2(\gamma + \lambda) + \beta(3 - \kappa)}{\kappa - 1}. \quad (27)$$

将(22)和(23)分别代入(1)和(3)可求得问题(i)在 Y 轴上的剪应力和正应力为

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(-h, y) = \omega_1(y) = & \mu_0 e^{-\beta h} \left[-\frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 F_j(s) m_j e^{-n'_j h - isy} ds - \frac{2i\alpha^* s e^{-\gamma h}}{\pi(\kappa - 1)} \int_{-\infty}^{\infty} A(s) \frac{\Phi}{\Delta} e^{-\lambda h - isy} ds \right] \\ & + \mu_0 e^{-\beta h} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 F_j(s) n'_j e^{-n'_j h - isy} ds + \frac{2i\alpha^* (\gamma + \lambda) e^{-\gamma h}}{\pi(\kappa - 1)} \int_{-\infty}^{\infty} A(s) \frac{\Omega}{\Delta} e^{-\lambda h - isy} ds \right] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(-h, y) &= \omega_2(y) \\
 &= \frac{\mu_0 e^{-\beta h} (\kappa + 1)}{\kappa - 1} \left[-\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 F_j(s) m_j n_j' e^{-n_j' h - isy} ds + \frac{2\alpha^* (\gamma + \lambda) e^{-\gamma h}}{\pi(\kappa - 1)} \int_{-\infty}^{\infty} A(s) \frac{\Phi}{\Delta} e^{-\lambda h - isy} ds \right] \\
 &\quad + \frac{\mu_0 e^{-\beta h} (3 - \kappa)}{\kappa - 1} \left[-\frac{is}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 F_j(s) e^{-n_j' h - isy} ds - \frac{2i\alpha^* s e^{-\gamma h}}{\pi(\kappa - 1)} \int_{-\infty}^{\infty} A(s) \frac{\Omega}{\Delta} e^{-\lambda h - isy} ds \right] \\
 &\quad - \frac{2\mu_0 e^{-\beta h} \alpha^*}{\pi(\kappa - 1)} \int_{-\infty}^{\infty} A(s) e^{-\lambda h - isy} ds
 \end{aligned} \tag{29}$$

在问题(i)中主要求解了裂纹问题需要的表面外载荷 $\omega_1(y)$ 和 $\omega_2(y)$ 。

4.2. 对问题(ii)的求解

为了求解的方便, 记裂纹上面区域的位移场为 $u_1(x, y)$ 和 $v_1(x, y)$, 裂纹下面区域的位移场为 $u_2(x, y)$ 和 $v_2(x, y)$ 。于是得到如下的位移场

$$u_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^4 B_j(s) e^{n_j x} \right] e^{-isy} ds, \quad v_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^4 a_j(s) B_j(s) e^{n_j x} \right] e^{-isy} ds, \tag{30}$$

$$u_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^2 B_{j+4}(s) e^{n_j x} \right] e^{-isy} ds, \quad v_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^2 a_j(s) B_{j+4}(s) e^{n_j x} \right] e^{-isy} ds \tag{31}$$

其中 $B_j(s)$, ($j=1, \dots, 6$) 是待求未知函数, n_j ($j=1, \dots, 4$) 为以下特征方程的根

$$n^4 + 2\beta n^3 + (\beta^2 - 2\alpha^2) n^2 - 2\beta\alpha^2 n + \left(\alpha^4 + \alpha^2 \beta^2 \frac{3-\kappa}{1-\kappa} \right) = 0, \tag{32}$$

$$a_j = \frac{(\kappa - 1)n_j^2 + \beta(\kappa - 1)n_j - \alpha^2(\kappa + 1)}{i\alpha[2n_j + \beta(\kappa - 1)]}. \tag{33}$$

引进位错密度函数 $\phi_1(y)$ 和 $\phi_2(y)$ 为

$$\phi_1(y) = \begin{cases} \frac{\partial [u_1(0^-, y) - u_2(0^+, y)]}{\partial y}, & |y| \leq a, \\ 0, & |y| > a, \end{cases} \quad \phi_2(y) = \begin{cases} \frac{\partial [v_1(0^-, y) - v_2(0^+, y)]}{\partial y}, & |y| \leq a, \\ 0, & |y| > a, \end{cases} \tag{34}$$

由位移单值条件, 位错密度函数还应满足下列方程

$$\int_{-a}^a \phi_j(t) dt = 0, \quad j = 1, 2. \tag{35}$$

由边界条件(14)和(15)得到如下积分方程组

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} [q_1 B_5(s) e^{n_1 x} + q_2 B_6(s) e^{n_2 x}] e^{-isy} ds = \omega_1(y), \tag{36}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\kappa - 1} \int_{-\infty}^{\infty} [p_1 B_5(s) e^{n_1 x} + p_2 B_6(s) e^{n_2 x}] e^{-isy} ds = \omega_2(y), \tag{37}$$

其中

$$p_j = (\kappa + 1)n_j - is(3 - \kappa)a_j, \quad q_j = n_j a_j - is, \quad j = 1, 2, \tag{38}$$

$$B_5(s) = \frac{i}{2\pi s} \int_{-a}^a \left[\frac{D_{55}}{D} \phi_1(t) - \frac{D_{65}}{D} \phi_2(t) \right] e^{ist} dt, \quad B_6(s) = \frac{i}{2\pi s} \int_{-a}^a \left[-\frac{D_{56}}{D} \phi_1(t) + \frac{D_{66}}{D} \phi_2(t) \right] e^{ist} dt, \tag{39}$$

其中 D 是利用边界条件(16)和(17)以及(34)所得到系数矩阵行列式, $D_{ij} (i, j = 5, 6)$ 为其系数矩阵第 i 行 j 列代数余子式, 这里将其省略。

再利用 $\int_0^\infty \sin[s(t-y)] ds = \frac{1}{t-y}$, 将方程(36)和(37)化简整理即得以 $\varphi_1(y)$ 和 $\varphi_2(y)$ 为未知函数的如下奇异积分方程组

$$\int_{-a}^a \left[\frac{1}{t-y} + g_{11}(t, y) \right] \phi_1(y) + g_{12}(t, y) \phi_2(y) dt = \pi \frac{1+\kappa}{2} \omega_1(y), \quad (40)$$

$$\int_{-a}^a \left[g_{21}(t, y) \phi_1(y) + \left(\frac{1}{t-y} + g_{22}(t, y) \right) \phi_2(y) \right] dt = \pi \frac{1+\kappa}{2} \omega_2(y), \quad (41)$$

其中

$$g_{11}(t, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \left[\frac{1+\kappa}{4} G_{11}(s, x) - 1 \right] \sin[s(t-y)] ds, \quad g_{12}(t, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \frac{1+\kappa}{4} G_{12}(s, x) \cos[s(t-y)] ds \quad (42)$$

$$g_{21}(t, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \frac{1+\kappa}{4(\kappa-1)} G_{21}(s, x) \cos[s(t-y)] ds, \quad g_{22}(t, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \left[\frac{1+\kappa}{4(\kappa-1)} G_{22}(s, x) - 1 \right] \sin[s(t-y)] ds$$

$$\begin{aligned} G_{11}(s, x) &= -\frac{2}{s} \left(q_1 \frac{D_{55}}{D} e^{\eta_1 x} - q_2 \frac{D_{56}}{D} e^{\eta_2 x} \right), \quad G_{12}(s, x) = \frac{2i}{s} \left(-q_1 \frac{D_{65}}{D} e^{\eta_1 x} + q_2 \frac{D_{66}}{D} e^{\eta_2 x} \right) \\ G_{21}(s, x) &= \frac{2i}{s} \left(p_1 \frac{D_{55}}{D} e^{\eta_1 x} - p_2 \frac{D_{56}}{D} e^{\eta_2 x} \right), \quad G_{22}(s, x) = -\frac{2}{s} \left(-p_1 \frac{D_{65}}{D} e^{\eta_1 x} + p_2 \frac{D_{66}}{D} e^{\eta_2 x} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

定义

$$r = \frac{t}{a}, \quad z = \frac{y}{a}, \quad \varphi_j(r) = \phi_j(t), \quad \ker_{ij}(z, r) = a \cdot g_{ij}(y, t), \quad i, j = 1, 2. \quad (44)$$

奇异积分方程组可以改写成如下形式

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{r-z} + \ker_{11}(z, r) \right] \varphi_1(r) + \ker_{12}(z, r) \varphi_2(r) dr = \pi \frac{1+\kappa}{2} \omega_1(az), \quad (45)$$

$$\int_{-1}^1 \left[\ker_{21}(z, r) \varphi_1(r) + \left(\frac{1}{r-z} + \ker_{22}(z, r) \right) \varphi_2(r) \right] dr = \pi \frac{1+\kappa}{2} \omega_2(az) \quad (46)$$

上述两个方程所描述的单值性条件可表示为

$$\int_{-1}^1 \varphi_j(r) dr = 0, \quad j = 1, 2 \quad (47)$$

方程(45)-(46)构成了经典的常系数的第一类 Cauchy 奇异积分方程, 在解的唯一性条件(47)下解存在且唯一^[11,21], 可用数值求积方法给出其数值解。用 Chebyshev 多项式将 $\varphi_j(r) (j=1, 2)$ 展开成

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \sum_{n=1}^N a_n T_n(r), \quad \varphi_2(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \sum_{n=1}^N b_n T_n(r). \quad (48)$$

其中 $T_n(r)$ 分别是第一类 Chebyshev 多项式, a_n, b_n 是未知待定常数。定义裂纹尖端的应力强度因子为

$$\begin{aligned} K_1(a) &= \lim_{y \rightarrow a} \sqrt{2(y-a)} \sigma_{xx}(0, y), \quad K_1(-a) = \lim_{y \rightarrow -a} \sqrt{2(-y-a)} \sigma_{xx}(0, y), \\ K_2(a) &= \lim_{y \rightarrow a} \sqrt{2(y-a)} \tau_{xx}(0, y), \quad K_2(-a) = \lim_{y \rightarrow -a} \sqrt{2(-y-a)} \tau_{xx}(0, y). \end{aligned} \quad (49)$$

在奇异积分方程组数值解基础上, 得到裂纹左右尖端的应力强度因子为

$$\begin{aligned}
 K_1(1) &= \frac{-2\sqrt{a}}{1+\kappa} \sum_{n=1}^N b_n, & K_1(-1) &= \frac{2\sqrt{a}}{1+\kappa} \sum_{n=1}^N (-1)^n b_n, \\
 K_2(1) &= \frac{-2\sqrt{a}}{1+\kappa} \sum_{n=1}^N a_n, & K_2(-1) &= \frac{2\sqrt{a}}{1+\kappa} \sum_{n=1}^N (-1)^n a_n
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

5. 数值算例及结果讨论

引入无量纲参数 $K_1/K, K_2/K$, 其中 $K = P\sqrt{l}$ 。此外, 还引入无量纲参数 h/a (即裂纹离接触面的距离与半裂纹长的比) 来表征裂纹尺寸。

图4和图5给出了不同材料参数时, 裂纹尺寸变化对裂尖I型和II型应力强度因子的影响。从图中可以看出, 当摩擦系数和压头移动速度都固定时, 右裂尖的I型应力强度因子和左裂尖的II型应力强度因子随着材料参数的增大而增大 ($\beta a = 0.1, 0.2, 0.3$), 右裂尖的II型应力强度因子和左裂尖的I型应力强度因子随着材料参数的增大反而减小 ($\beta a = 0.1, 0.2, 0.3$), 但在 $\beta a = 0.4$ 时左裂尖的I型和II型应力强度因子分别有减小和增大的趋势。这说明裂纹左、右裂尖I型和II型应力强度因子都随着材料梯度参数的变化而变化, 选择适当的材料梯度参数可以有效地降低裂纹尖端的应力强度因子, 从而阻滞裂纹的扩展。

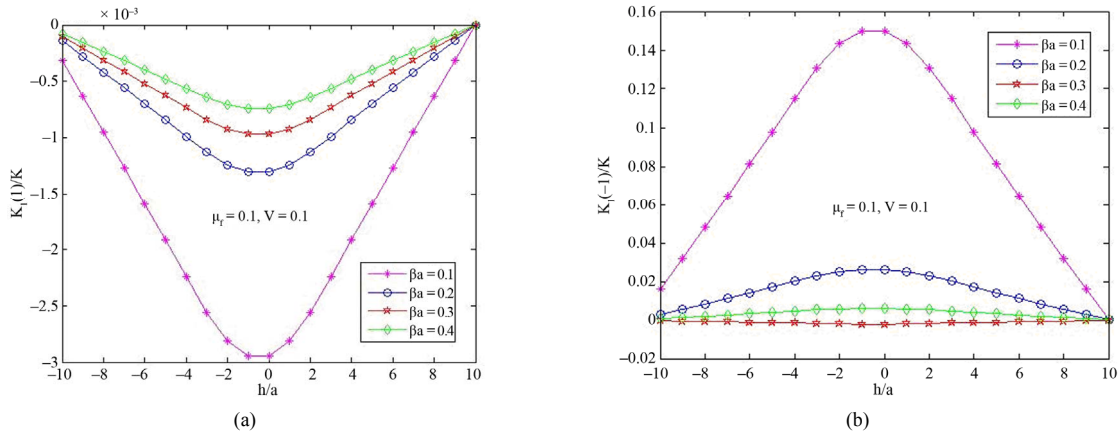


Figure 4. Normalized stress intensity factor of the first kind at the crack tip with h/a varying when $\mu_f = 0.1$ and $V = 0.1$: (a) right tip, and (b) left tip

图 4. 当 $\mu_f = 0.1, V = 0.1$ 时, 裂尖 I 型标准化应力强度因子随 h/a 的变化情况: (a) 右裂尖, (b) 左裂尖

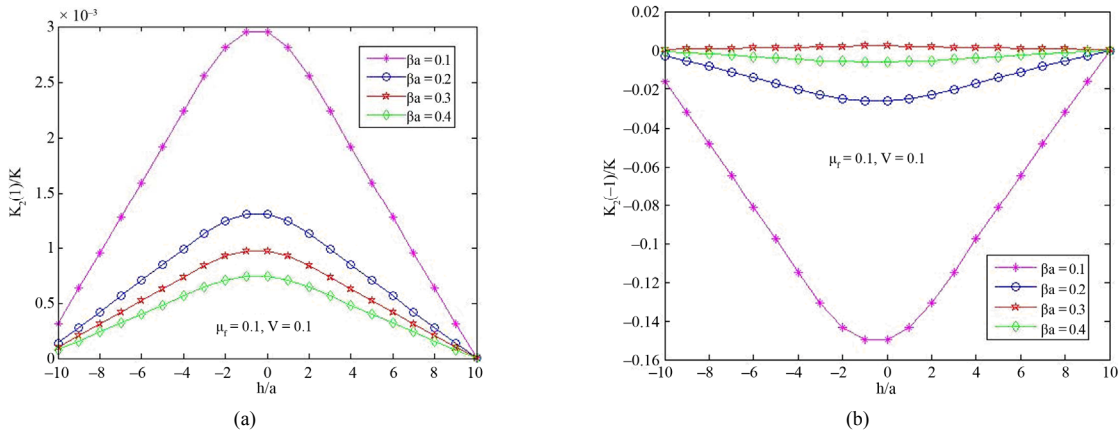


Figure 5. Normalized stress intensity factor of the second kind at the crack tip with h/a varying when $\mu_f = 0.1$ and $V = 0.1$: (a) right tip, and (b) left tip

图 5. 当 $\mu_f = 0.1, V = 0.1$ 时, 裂尖 II 型标准化应力强度因子随 h/a 的变化情况: (a) 右裂尖, (b) 左裂尖

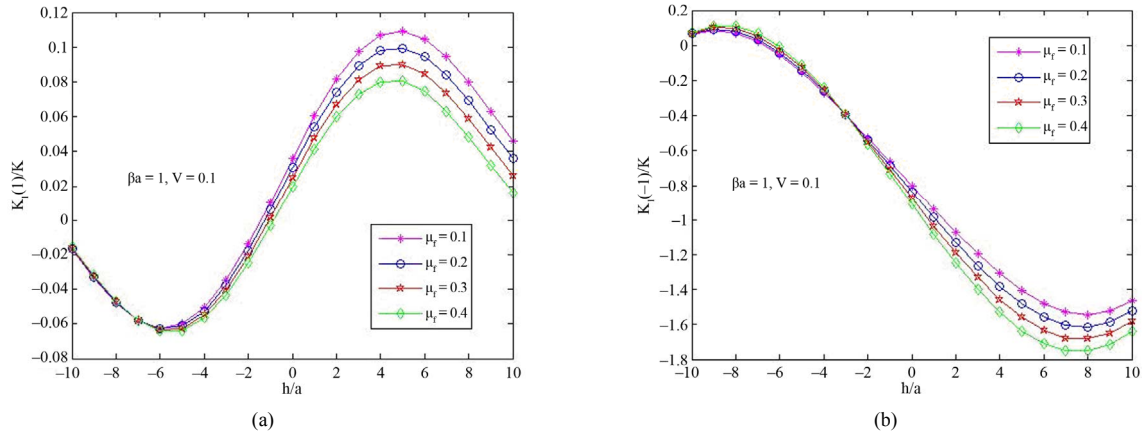


Figure 6. Normalized stress intensity factor of the first kind at the crack tip with h/a varying when $\beta/a = 0.1$ and $V = 0.1$: (a) right tip, and (b) left tip

图 6. 当 $\beta/a = 0.1$, $V = 0.1$ 时, 裂尖 I 型标准化应力强度因子随 h/a 的变化情况: (a) 右裂尖, (b) 左裂尖

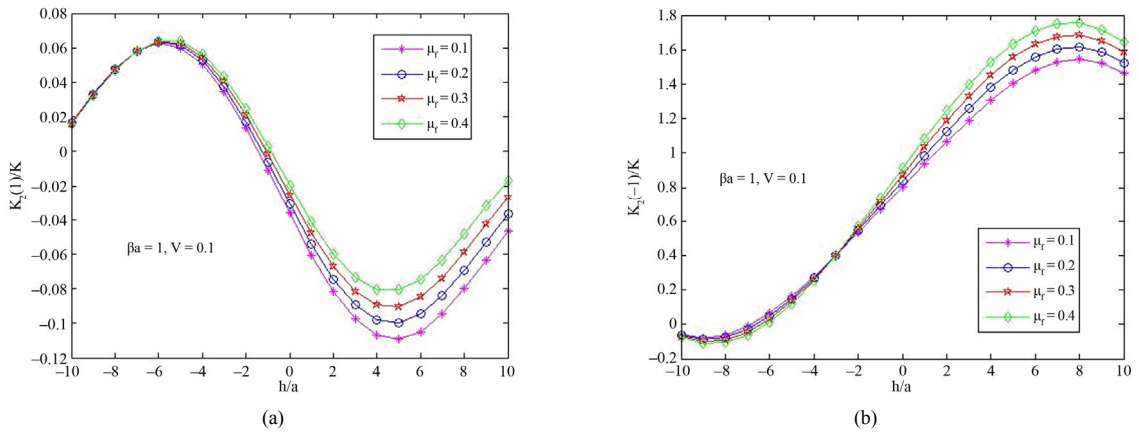


Figure 7. Normalized stress intensity factor of the second kind at the crack tip with h/a varying when $\beta/a = 0.1$ and $V = 0.1$: (a) right tip, and (b) left tip

图 7. 当 $\beta/a = 0.1$, $V = 0.1$ 时, 裂尖 II 型标准化应力强度因子随 h/a 的变化情况: (a) 右裂尖, (b) 左裂尖

图 6 和图 7 给出了刚性压头与接触面间不同摩擦系数时, 裂纹尺寸变化对裂尖 I 型和 II 型应力强度因子的影响。从图中可以看出, 当材料参数和压头移动速度都固定时, 左、右裂尖的 I 型应力强度因子随着摩擦系数的增大而减小, 左、右裂尖的 II 型应力强度因子随着摩擦系数的增大而增大。这说明裂纹左、右裂尖 I 型和 II 型应力强度因子都随着摩擦系数的变化而变化, 选择适当的摩擦系数可以有效地降低裂纹尖端的应力强度因子, 从而阻滞裂纹的扩展。

参考文献 (References)

- [1] S. Suresh, A. E. Giannakopoulos and J. Alcal'a. Spherical indentation of compositionally graded materials: Theory and experiments. Acta Materialia, 1997, 45(4): 1307-1321.
- [2] A. E. Giannakopoulos, S. Suresh. Indentation of solids with gradients in elastic properties: Part I. Point force solution. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34(19): 2357-2392.
- [3] A. E. Giannakopoulos, S. Suresh. Indentation of solids with gradients in elastic properties: Part II. Axisymmetric indentors. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34(19): 2392-2428.
- [4] M. A. Guler, F. Erdogan. Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings. Mechanics of Materials, 2006, 38: 633-647.
- [5] V. S. Tonoyan, S. A. Melkumian. On symmetric indentation of two rigid similar punches into an elastic half-plane with a vertical semi-infinite cut. Doklady Akademii Nauk Annianskoy, 1973, SSR57: 282-288.
- [6] V. S. Sarkisian, E. K. Hrihorian and S. S. Shaginian. On two boundary value problems in elasticity theory for a half-plane weakened by an internal rectilinear cut. Uchenyie Zapiski Yerevanskogo Universiteta, Yestestvenyie Nauki, 1980, 2: 49-58.

- [7] A. F. Minasian, V. S. Tonoyan. Contact problem of a half-plane with a vertical cut in stick: Mechanics of deformable bodies and structures. Yerevan: Akademiya Nauk Armianskoy, 1985: 286-297.
- [8] J. Qian, N. Hasebe. Circular rigid punch on a semi-infinite plane with an oblique edge crack subjected to concentrated forces or point dislocations. Proceedings of Japan Civil Engineers, 1997, 570: 149-159.
- [9] A. H. Boyadzhii, M. L. Buryshkin and M. V. Radiollo. On action of a rigid punch on a half-plane weakened by a regular set of cracks. Prikladnaya Matematika i Mekhanika 1988, 5: 856-860.
- [10] I. I. Kudish. Contact Problem in elasticity theory of bodies with cracks. Prikladnaya Matematika I Mekhanika, 1986, 5: 1020-1033.
- [11] 李星. 积分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [12] N. Hasebe, Qian J. Circular rigid punch with one smooth and another sharp ends on a half-plane with edge crack. Journal of Applied Mechanics, 1997, 64: 73-79.
- [13] Y. P. Avetisyan, O. K. Khachatrian and S. S. Shaginian. On a mixed boundary value problem in elasticity theory for a half-plane weakened by an internal rectilinear cut. Uchenyie Zapiski Yerevanskogo Universiteta, Yestestvenyie Nauki, 1983, 1: 28-33.
- [14] V. V. Panasyuk, O. P. Datsyshyn and H. P. Marchenko, Stress state of a half-plane with cracks under rigid punch action. International Journal of Fracture, 2000, 101: 347-363.
- [15] M. P. Savruk. Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks. Kyiv: Naukova Dumka, 1981.
- [16] Li Xing. Effect of periodic gasket on periodic contact problem. In: H. Begehr, et al., Eds., Partial differential and integral equations, Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1999: 249-254.
- [17] 周跃亭, 李星. 具周期裂纹的半平面周期接触问题的奇异积分方程数值解法[J]. 固体力学学报, 2005, 26(2): 167-174.
- [18] 刘铁军, 汪越胜. 功能梯度材料涂层半空间的轴对称光滑接触问题[J]. 固体力学学报, 2007, 28(1): 49-54.
- [19] H. J. Choi. Thermoelastic problem of steady-state heat flow disturbed by a crack perpendicular to the graded interfacial zone in bonded materials. International Journal of Solids and Structures, 2003, 48(6): 893-909.
- [20] H. J. Choi. On the plane contact problem of a functionally graded elastic layer loaded by a frictional sliding flat punch. Journal of Mechanical Science and Technology, 2009, 23(10): 2703-2713.
- [21] N. I. Muskhelishvili. Singular integral equations. Groningen: Noordhoff, 1953.