Statistics and Application 统计学与应用, 2017, 6(5), 539-549
Published Online December 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2017.65061

Least Squares Estimators for Discretely Observed Vasicek Interest Rate Model with Small α Stable Noises

Chengnian Fan, Litan Yan

Department of Mathematics, Donghua University, Shanghai
Email: fanchengnian_job@126.com, litanyan@dhu.edu.cn

Received: Dec. 5th, 2017; accepted: Dec. 22nd, 2017; published: Dec. 29th, 2017

Abstract

In this paper, we consider the problem of parameter estimation for Vasicek interest rate model with small α-stable noises, observed at n regularly spaced time points $t_i = \frac{i}{n}, i = 1, \cdots, n$ on $[0,1]$.

$$\mathrm{d}X_t = (a - bX_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}Z_t$$

Least squares method is used to obtain a and b. The consistencies and asymptotic distributions of the LSE are established when $\sigma \to 0$ and $n \to \infty$ simultaneously.

Keywords

Vasicek Interest Rate Model, α-Stable Lévy Noise, LSE

基于离散观测的带有小的α稳定噪声的Vasicek利率模型的最小二乘估计

范成念，闫理坦

东华大学数学系，上海
Email: fanchengnian_job@126.com, litanyan@dhu.edu.cn

收稿日期：2017年12月5日；录用日期：2017年12月22日；发布日期：2017年12月29日

文章引用: 范成念, 闫理坦. 基于离散观测的带有小的α稳定噪声的Vasicek利率模型的最小二乘估计[J]. 统计学与应用, 2017, 6(5): 539-549. DOI: 10.12677/sa.2017.65061

摘　要

本文研究 $[0,1]$ 区间中离散时间 $t_i=\left\{\frac{i}{n}, i=1,\cdots,n\right\}$ 观测的α-稳定Lévy噪声驱动的Vasicek利率模型的参数估计问题。

$$\mathrm{d}X_t=(a-bX_t)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}Z_t$$

采用最小二乘法得到了a和b的估计量。在$\sigma\to 0$和$n\to\infty$同时成立的条件下，完成了最小二乘估计量的相合性和渐近性的证明。

关键词

Vasicek利率模型，α-稳定Lévy噪声，最小二乘估计

1. 引言

设$(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$为基本概率空间，具备右连续和增的 σ-代数族$(\mathcal{F}_t,t\ge 0)$。设$Z=\{Z_t,t\ge 0\}$为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$上的标准$\alpha$-稳定 Lévy 运动，$Z_1\sim S_\alpha(1,\beta,0)$，$\beta\in[-1,1]$为偏度参数。本文我们考虑由标准稳定过程$Z$驱动的 Vasicek 利率模型的参数估计问题。Vasicek 利率模型是一种均值回复 Ornstein-Uhlenbeck 过程，由 Vasicek 在 1977 年首次提出(当$\alpha=2$) [1]，可由下列线性随机微分方程刻画：

$$\mathrm{d}X_t=(a-bX_t)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}Z_t \tag{1}$$

其中，a和b为未知参数。由于技术原因，我们假设$1<\alpha<2$，离散观测时间点为$t_i=\left\{\frac{i}{n},i=1,2,\cdots,n\right\}$，即时间间隔固定为$\Delta t_{i-1}=t_i-t_{i-1}=1/n$。本文的目标是基于样本数据$(X_{t_i})_{i=1}^n$研究漂移项参数$a$和$b$的最小二乘估计量。

当研究由 Brownian 运动驱动的扩散过程的参数估计时，一种比较普遍的方法是连续观测的基于 Girsanov 密度的极大似然法。当离散观测时，转移密度函数和似然函数难于计算。为了克服这一困难，有学者提出了近似极大似然法。

一方面，Shimizu 和 Yoshida [2] [3]通过极大似然法研究了离散时间观测的带跳的扩散过程的参数估计问题，并建立了估计量的相合性和渐近正态性，其中就考虑了 Lévy 过程中的跳过程。Masuda [4]研究了由有限阶的零均值适应过程(包括 Lévy 过程)驱动的轨迹拟合估计量和最小二乘估计量的相合性和渐近正态性。Brockwell [5]、Valdivieso [6]、Spiliopoulos [7]也研究了 Lévy 过程驱动的 Ornstein-Uhlenbeck 过程的参数估计。然而，上述文献皆没有考虑一类重要的 Lévy 过程，即α-稳定 Lévy 运动。直到胡耀忠和龙红卫在 2007 年和 2009 年开始研究由α-稳定 Lévy 运动驱动的 Ornstein-Uhlenbeck 的参数估计问题[8] [9]。

另一方面，连续时间观测的小噪声驱动的参数估计理论已经得到了很好的发展。Genon-Catalot [10]、 Laredo [11]研究了当$\sigma \to 0$，$n \to \infty$时离散时间观测的小噪声驱动的漂移系数的有效估计量。SØrensen [12]利用鞅估计函数建立了当$\sigma \to 0$，n固定时，漂移系数和扩散系数的估计量的相合性和渐近正态性。SØrensen [13]、Gloter [14]通过构造对比函数研究了漂移和扩散系数均未知的参数的有效估计量。在σ和n的适当假设条件下，小噪声驱动的参数估计量的渐近分布为正态分布。

然而，对于带有小的α-稳定 Lévy 噪声的随机过程的参数估计的研究较少，难点在于α-稳定过程的无限变差性质。胡耀忠和龙红卫在固定扩散参数(亦称波动率参数) $\sigma = 1$的前提下讨论了离散时间观测的α-稳定 Lévy 噪声驱动的 O-U 过程的最小二乘估计[9]。龙红卫研究了当$a = 0$时小的 Lévy 噪声驱动的 O-U 过程漂移系数b的最小二乘估计问题[15]。本文我们假设时间间隔固定，旨在研究满足方程(1)的离散时间观测的参数估计，我们将采用最小二乘法得到相合、渐近估计量。

为了得到最小二乘估计量，我们构造如下对比函数：

$$\rho_{n,\sigma}(a,b) = \rho_{n,\sigma}\left(a,b;\left(X_{t_i}\right)_{i=1}^{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left|X_{t_i} - X_{t_{i-1}} + bX_{t_{i-1}}\Delta t_{i-1} - a\Delta t_{i-1}\right|^2$$

$\hat{b}_{n,\sigma}$和$\hat{a}_{n,\sigma}$的最小二乘估计量即求$\hat{b}_{n,\sigma} = \arg\min_b \rho_{n,\sigma}(a,b)$和$\hat{a}_{n,\sigma} = \arg\min_a \rho_{n,\sigma}(a,b)$，解得

$$\hat{b}_{n,\sigma} = -\frac{n\sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}}\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)}{\sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}}^2} + \frac{\hat{a}_{n,\sigma}\sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}}}{\sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}}^2} \tag{2}$$

$$\hat{a}_{n,\sigma} = \sum_{i=1}^{n}\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right) + \frac{1}{n}\cdot\hat{b}_{n,\sigma}\sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}} \tag{3}$$

Vasicek 利率模型的解为：

$$X_{t_i} = \mathrm{e}^{-\frac{b}{n}} X_{t_{i-1}} + \frac{a}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{b}{n}}\right) + \sigma Z_{i,\frac{1}{n}} \tag{4}$$

其中，

$$Z_{i,\frac{1}{n}} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathrm{e}^{-b(t_i - s)}\mathrm{d}z_s$$

记

$$\Upsilon(n,\sigma) = \sigma n^2\sum_{i=1}^{n} X_{t_i} Z_{i,\frac{1}{n}} - \sigma n\sum_{i=1}^{n} Z_{i,\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}},\ \Theta(n,\sigma) = n\sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}}\right)^2$$

由(2)、(3)、(4)得

$$\hat{b}_{n,\sigma} = \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{b}{n}}\right)n - \frac{\Upsilon(n,\sigma)}{\Theta(n,\sigma)}$$

本文我们考虑高频$(n \to \infty)$、小扩散$(\sigma \to 0)$情形下$\hat{b}_{n,\sigma}$和$\hat{a}_{n,\sigma}$的最小二乘参数估计。我们的目标是证明$\hat{b}_{n,\sigma}$依概率收敛至b，$\hat{a}_{n,\sigma}$依概率收敛至a，并证明其渐近分布为α-稳定分布。主要结果概括为以下两个定理。

定理 1 当$n \to \infty, \sigma \to 0, \sigma n^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\vee\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \to 0$时，$\hat{b}_{n,\sigma} \to_p b$，$\hat{a}_{n,\sigma} \to_p a$。

定理 2 当 $n\to\infty,\sigma\to 0,\sigma n\to\infty,\sigma n^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\vee\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}\to 0$ 时，

$$\sigma^{-1}\left(\hat{b}_{n,\sigma}-b\right)\to_d \frac{\left(X_0+\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1-e^{-\alpha b}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(C_1+C_2+C_3\right)-\left(C_4+C_5+C_6\right)}U$$

$$\sigma^{-1}\left(\hat{a}_{n,\sigma}-a-\sigma\sum_{i=1}^{n}Z_{i,\frac{1}{n}}\right)\to_d D\frac{\left(X_0+\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1-e^{-\alpha b}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(C_1+C_2+C_3\right)-\left(C_4+C_5+C_6\right)}U$$

其中，$U\sim S_\alpha(1,\beta,0)$，$C_1=\frac{X_0^2}{2b}\left(1-e^{-2b}\right)$，$C_2=-\frac{a^2}{2b^3}\left(e^{-b}-1\right)\left(e^{-b}-3\right)$，$C_3=\frac{a}{b^2}X_0\left(e^{-b}-1\right)^2$，$C_4=\frac{X_0^2}{b^2}\left(e^{-b}-1\right)^2$，$C_5=\frac{a^2}{b^4}\left(e^{-b}-1+b\right)^2$，$C_6=\frac{2aX_0}{b^3}\left(e^{-b}-1\right)\left(e^{-b}-1-b\right)$，$D=\frac{a-X_0}{b}\left(e^{-b}-1\right)+\frac{a}{b}$。

注 定理 1 和定理 2 中的 $p\in[1,\alpha)$ 被选定且尽可能地靠近 α。

2. 准备知识

2.1. Lévy 过程

随机过程 $Z=Z_t,t\ge 0$ 为 $\mathcal{F}_t$-适应的 Lévy 过程，若对所有 $t\ge 0$，$Z_t\in\mathcal{F}_t$ 且有

1) $Z_0=0$ a.s;

2) Z 具有独立增量，*i.e.* Z_t-Z_s 与 $\mathcal{F}_t$ 独立，$0\le s<t<\infty$；

3) Z 具有平稳增量，*i.e.* Z_t-Z_s 与 Z_{t-s} 具有相同的分布，$0\le s<t<\infty$；

4) Z 随机连续(依概率连续)，*i.e.*对所有的 $\varepsilon>0$ 和 $s\ge 0$，$\lim_{t\to s}P\left(\left|Z_t-Z_s\right|>\varepsilon\right)=0$。

注意到每个 Lévy 过程具有唯一的右连左极(右连续、具有左极限)的修正，且修正也为 Lévy 过程。因此我们假设本文的α-稳定 Lévy 过程为右连左极的。

2.2. α-稳定分布

随机变量 η 服从α-稳定分布，记作 $\eta\sim S_\alpha(\gamma,\beta,\mu)$，若特征函数形如

$$\phi_\alpha(x)=E\exp\{ix\eta\}=\begin{cases}\exp\left\{-\gamma^\alpha|x|^\alpha\left(1-i\beta\operatorname{sgn}(x)\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right)+i\mu x\right\}, & \text{if } \alpha\ne 1\\ \exp\left\{-\gamma|x|\left(1+i\frac{2}{\pi}\beta\operatorname{sgn}(x)\log|x|\right)+i\mu x\right\}, & \text{if } \alpha=1\end{cases}$$

其中 $\alpha\in(0,2]$，$\gamma\in(0,\infty)$，$\beta\in[-1,1]$ 和 $\mu\in(-\infty,\infty)$ 分别被称作稳定指数，尺度，偏度和位置参数。当 $\mu=0$，我们称 η 为严格α-稳定。此外若 $\beta=0$，我们称 η 为对称α-稳定。当 $\mu=\beta=0$，α-稳定运动是严格对称的。若对任意 $0<s<t<\infty$，Z_t-Z_s 的分布为 $S_\alpha\left((t-s)^{\frac{1}{\alpha}},\beta,0\right)$，我们称 Z 为标准α-稳定 Lévy 运动。

引理 2.1 设 $f(\cdot):[0,1]\to R_+$ 为一个确定的函数满足 $\int_0^1 f^\alpha(s)ds<\infty$。那么，对任意 $0<q<\alpha$，存在一个正常数 $C(q,\alpha,\beta)$ 只依赖于 q，α 和 β 使得对每一个 $t\in[0,1]$

$$\left(E\left|\int_0^t f(s)dZ_s\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}=C(q,\alpha,\beta)\left(\int_0^t f^\alpha(s)ds\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

这里 $C(q,\alpha,\beta)=\left(\dfrac{2^{q+1}\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)\Gamma\left(-\dfrac{q}{\alpha}\right)}{\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\left(-\dfrac{q}{2}\right)}\left(1+\beta^2\tan^2\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)^{\frac{q}{2\alpha}}\cos\left(\dfrac{q}{\alpha}\arctan\left(\beta\tan\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}}$。

3. 最小二乘估计量 $\hat{b}_{n,\sigma}$ 和 $\hat{a}_{n,\sigma}$ 的相合性

首先考虑 $\hat{b}_{n,\sigma}$ 的相合性。

$$\hat{b}_{n,\sigma}-b=\left[\left(1-e^{-b/n}\right)n-b\right]-\frac{\sigma\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}Z_{i,\frac{1}{n}}-n^{-1}\sigma\sum_{i=1}^{n}Z_{i,\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}^2-\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}\right)^2}$$
$$:=\Lambda_n-\frac{\Phi_1(n,\sigma)-\Phi_2(n,\sigma)}{\Phi_3(n,\sigma)-\Phi_4(n,\sigma)}$$

易知，当 $n\to\infty$ 时，$\Lambda_n\to 0$。引理 3.1 考虑 $\Phi_1(n,\sigma)$ 和 $\Phi_2(n,\sigma)$ 的收敛性，引理 3.2 考虑 $\Phi_3(n,\sigma)$ 和 $\Phi_4(n,\sigma)$ 的收敛性。

引理 3.1 当 $n\to\infty$，$\sigma\to 0$，且 $\sigma n^{1-\frac{1}{\alpha}}\to 0$ 时，$\Phi_1(n,\sigma)\to_p 0$，$\Phi_2(n,\sigma)\to_p 0$。

证明： Vasicek 利率模型的解又可以写作

$$X_{t_{i-1}}=e^{-bt_{i-1}}X_0+\frac{a}{b}\left(1-e^{-bt_{i-1}}\right)+\sigma\int_0^{t_{i-1}}e^{-b(t_{i-1}-s)}dZ_s$$

因此我们有如下分解

$$\Phi_1(n,\sigma)=\sigma X_0\sum_{i=1}^{n}e^{-bt_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}e^{-b(t_i-s)}dZ_s+\frac{\sigma a}{b}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}e^{-b(t_i-s)}dZ_s$$
$$-\frac{\sigma a}{b}\sum_{i=1}^{n}e^{-bt_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}e^{-b(t_i-s)}dZ_s+\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_{i-1}}e^{-b(t_{i-1}-s)}dZ_s\int_{t_{i-1}}^{t_i}e^{-b(t_i-s)}dZ_s$$
$$:=\sum_{i=1}^{4}\Phi_{1,i}(n,\sigma)$$

下面分别考虑 $\Phi_{1,i}(n,\sigma),i=1,2,3,4$ 的收敛性。由 Markov 不等式和和引理 2.1，对 $\forall\varepsilon>0$，有

$$P\left(\left|\Phi_{1,1}(n,\sigma)\right|>\varepsilon\right)\le\varepsilon^{-1}E\left|\sigma X_0\sum_{i=1}^{n}e^{-bt_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}e^{-b(t_i-s)}dZ_s\right|$$
$$\le\varepsilon^{-1}\sigma E|X_0|E\left|\int_0^1\sum_{i=1}^{n}e^{-b(t_{i-1}+t_i)}e^{bs}1_{(t_{i-1},t_i]}dZ_s\right|$$
$$\le C\varepsilon^{-1}\sigma\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n}e^{-b(t_{i-1}+t_i)}e^{bs}1_{(t_{i-1},t_i]}\right|^{\alpha}ds\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$=C\varepsilon^{-1}\sigma\left(\frac{e^{\alpha b/n}-1}{\alpha b}\sum_{i=1}^{n}e^{-\alpha bt_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

当 $n\to\infty$，$\sigma\to 0$ 时，上式趋向于 0。$\Phi_{1,3}(n,\sigma)$ 与 $\Phi_{1,1}(n,\sigma)$ 的证明类似，当 $n\to\infty$，$\sigma\to 0$ 时，$\Phi_{1,3}(n,\sigma)$ 依概率收敛到 0。

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\Phi_{1,2}(n,\sigma)\right|>\varepsilon\right) &\le \varepsilon^{-1}E\left|\frac{\sigma a}{b}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-b(t_i-s)}\mathrm{d}Z_s\right| \\
&\le C\varepsilon^{-1}\sigma\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha b(t_i-s)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= C\varepsilon^{-1}\sigma n\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha b/n}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= O\left(\sigma n^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

当 $\sigma n^{1-\frac{1}{\alpha}}\to 0$ 时上式趋向于 0。

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\Phi_{1,4}(n,\sigma)\right|>\varepsilon\right) &\le \varepsilon^{-1}E\left|\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-b(t_i-s)}\mathrm{d}Z_s\right| \\
&\le C\varepsilon^{-1}\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{0}^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha b(t_i-s)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= C\varepsilon^{-1}\sigma^2\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha b/n}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha b t_{i-1}}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = O\left(\sigma^2 n^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)
\end{aligned}
$$

因为 $\frac{\alpha-1}{2\alpha}<1-\frac{1}{\alpha}$，所以 $\sigma n^{1-\frac{1}{\alpha}}\to 0$ 蕴含 $\sigma n^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}\to 0$，从而上式收敛到 0。$\Phi_2(n,\sigma)$ 可具体展开如下

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(n,\sigma) &= n^{-1}\sigma\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-b(t_i-s)}\mathrm{d}Z_s\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}X_0+\frac{\sigma a}{b}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-b(t_i-s)}\mathrm{d}Z_s \\
&\quad -n^{-1}\frac{\sigma a}{b}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-b(t_i-s)}\mathrm{d}Z_s\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}} \\
&\quad +n^{-1}\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-b(t_i-s)}\mathrm{d}Z_s\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t_i}\mathrm{e}^{-b(t_i-s)}\mathrm{d}Z_s \\
&:= \sum_{i=1}^{4}\Phi_{2,i}(n,\sigma)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\Phi_{2,1}(n,\sigma)\right|>\varepsilon\right) &\le \varepsilon^{-1}E\left|n^{-1}\sigma\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-b(t_i-s)}\mathrm{d}Z_s\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}X_0\right| \\
&\le \varepsilon^{-1}n^{-1}\sigma\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}E\left|X_0\right|\sum_{i=1}^{n}E\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-b(t_i-s)}\mathrm{d}Z_s\right| \\
&\le C\varepsilon^{-1}\sigma\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha b(t_i-s)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= C\varepsilon^{-1}\sigma\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha b/n}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\to 0,\ \text{当}\, n\to\infty,\ \sigma\to 0
\end{aligned}
$$

同样地，当 $n\to\infty$，$\sigma\to 0$ 时，$\Phi_{2,3}(n,\sigma)$ 依概率收敛到 0。利用(5)的证明方法易得 $\Phi_{2,2}(n,\sigma)\to_p 0$。对于 $\Phi_{2,4}(n,\sigma)$，类似于 $\Phi_{1,4}(n,\sigma)$ 的证明，有

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\Phi_{2,4}(n,\sigma)\right|>\varepsilon\right) &\le \varepsilon^{-1}E\left|n^{-1}\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-b(t_i-s)}\mathrm{d}Z_s\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_i}\mathrm{e}^{-b(t_i-s)}\mathrm{d}Z_s\right| \\
&\le C\varepsilon^{-1}n^{-1}\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha b(t_i-s)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha b(t_i-s)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= C\varepsilon^{-1}\sigma^2\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha b/n}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha b t_{i-1}}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= O\left(\sigma^2 n^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)
\end{aligned}
$$

至此我们证明了引理 3.1。

引理 3.2 当 $n\to\infty,\sigma\to 0,\sigma n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\to 0$ 时，

$$\Phi_3(n,\sigma)-\Phi_4(n,\sigma)\to_p (C_1+C_2+C_3)-(C_4+C_5+C_6)$$

其中，$C_1=-\frac{X_0^2}{2b}\left(\mathrm{e}^{-2b}-1\right)$，$C_2=-\frac{a^2}{2b^3}\left(\mathrm{e}^{-b}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-b}-3\right)$，$C_3=\frac{a}{b^2}X_0\left(\mathrm{e}^{-b}-1\right)^2$，$C_4=\frac{X_0^2}{b^2}\left(\mathrm{e}^{-b}-1\right)^2$，$C_5=\frac{a^2}{b^4}\left(\mathrm{e}^{-b}-1+b\right)^2$，$C_6=\frac{2aX_0}{b^3}\left(\mathrm{e}^{-b}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-b}-1-b\right)$。

证明： 对 $\Phi_3(n,\sigma)$ 进行分解

$$
\begin{aligned}
\Phi_3(n,\sigma) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}X_0+\frac{a}{b}\left(1-\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}\right)+\sigma\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s\right)^2 \\
&= \frac{X_0^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-2bt_{i-1}}+\frac{a^2}{b^2 n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}\right)^2+\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s\right)^2 \\
&\quad+\frac{2a}{bn}X_0\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}-\mathrm{e}^{-2bt_{i-1}}\right)+\frac{2\sigma}{n}X_0\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s \\
&\quad+\frac{2a\sigma}{bn}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}\right)\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s \\
&:= \Phi_{3,1}(n)+\Phi_{3,2}(n)+\Phi_{3,3}(n,\sigma)+\Phi_{3,4}(n)+\Phi_{3,5}(n,\sigma)+\Phi_{3,6}(n,\sigma)
\end{aligned}
$$

分别考虑 $\Phi_{3,1}(n),\Phi_{3,2}(n),\Phi_{3,3}(n,\sigma),\Phi_{3,4}(n),\Phi_{3,5}(n,\sigma),\Phi_{3,6}(n,\sigma)$ 的收敛性。通过简单计算，有

$$\Phi_{3,1}(n)\to X_0^2\int_0^1\mathrm{e}^{-2bs}\mathrm{d}s=\frac{X_0^2}{2b}\left(1-\mathrm{e}^{-2b}\right)$$

$$\Phi_{3,2}(n)\to\frac{a^2}{b^2}-\frac{a^2}{2b^3}\left(\mathrm{e}^{-b}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-b}-3\right)$$

$$\Phi_{3,4}(n)\to\frac{a}{b^2}X_0\left(\mathrm{e}^{-b}-1\right)^2$$

通过 Markov 不等式和引理 2.1，对 $1\le p<\alpha$

$$P\left(\left|\Phi_{3,3}(n,\sigma)\right|>\varepsilon\right)\le\varepsilon^{-\frac{p}{2}}E\left|\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s\right)^2\right|^{\frac{p}{2}}$$
$$\le\varepsilon^{-\frac{p}{2}}\sigma^p n^{-\frac{p}{2}}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-pbt_{i-1}}E\left|\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s\right|^p$$
$$\le C\varepsilon^{-\frac{p}{2}}\sigma^p n^{-\frac{p}{2}}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-pbt_{i-1}}\left(\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{\alpha}}$$
$$=O\left(\sigma^p n^{1-\frac{p}{2}}\right)$$

当 $n\to\infty,\sigma\to0,\sigma n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\to0$ 时，上式趋向于 0。

$$P\left(\left|\Phi_{3,5}(n,\sigma)\right|>\varepsilon\right)\le\varepsilon^{-1}E\left|\frac{2\sigma}{n}X_0\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-2bt_{i-1}}\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{bs}\mathrm{d}Z_s\right|$$
$$\le C\varepsilon^{-1}\frac{\sigma}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-2bt_{i-1}}\left(\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{\alpha bs}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

当 $n\to\infty,\sigma\to0$ 时，上式收敛到 0。与 $\Phi_{3,5}(n,\sigma)$ 证明类似，$\Phi_{3,6}(n,\sigma)$ 依概率收敛到 0。下面分解 $\Phi_4(n,\sigma)$ 如下：

$$\Phi_4(n,\sigma)=n^{-2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}X_0+\frac{na}{b}-\frac{a}{b}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}+\sigma\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s\right)^2$$
$$=\frac{X_0^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}\right)^2+\frac{a^2}{n^2b^2}\left(n-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}\right)^2+\frac{\sigma^2}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s\right)^2$$
$$+\frac{2aX_0}{bn^2}\left[n\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}-\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}\right)^2\right]+\frac{2\sigma X_0}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s$$
$$+\frac{2a\sigma}{bn^2}\left(n-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}\right)\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s$$
$$:=\Phi_{4,1}(n)+\Phi_{4,2}(n)+\Phi_{4,3}(n,\sigma)+\Phi_{4,4}(n)+\Phi_{4,5}(n,\sigma)+\Phi_{4,6}(n,\sigma)$$

通过简单计算，有

$$\Phi_{4,1}(n)\to\frac{X_0^2}{b^2}\left(\mathrm{e}^{-b}-1\right)^2$$
$$\Phi_{4,2}(n)\to\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a^2}{b^3}\left(\mathrm{e}^{-b}-1\right)+\frac{a^2}{b^4}\left(\mathrm{e}^{-b}-1\right)^2$$
$$\Phi_{4,4}(n)\to-\frac{2aX_0}{b^2}\left(\mathrm{e}^{-b}-1\right)+\frac{2aX_0}{b^3}\left(\mathrm{e}^{-b}-1\right)^2$$
$$P\left(\left|\Phi_{4,3}(n,\sigma)\right|>\varepsilon\right)\le\varepsilon^{-1}E\left|\frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s\right|$$
$$\le C\varepsilon^{-1}\frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\alpha bt_{i-1}}\left(\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{\alpha bs}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\alpha bt_{i-1}}\left(\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{\alpha bs}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

当 $n\to\infty,\sigma\to 0$ 时，上式收敛到 0。

$$P\left(\left|\Phi_{4,5}(n,\sigma)\right|>\varepsilon\right)\le\varepsilon^{-1}E\left|\frac{2\sigma X_0}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s\right|$$

$$\le C\varepsilon^{-1}\frac{\sigma}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}\left(\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{\alpha bs}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}\to 0$$

综上，引理 3.2 证毕。

定理 1 的证明

当 $n\to\infty$ 时，由 $\Lambda_n\to 0$ 和引理 3.1、引理 3.2，我们直接得到 $\hat{b}_{n,\sigma}-b=\Lambda_n-\dfrac{\Phi_1(n,\sigma)-\Phi_2(n,\sigma)}{\Phi_3(n,\sigma)-\Phi_4(n,\sigma)}\to_p 0$。

下面考虑 $\hat{a}_{n,\sigma}$ 的相合性。

$$\begin{aligned}\hat{a}_{n,\sigma}-a&=\sum_{i=1}^{n}\left(X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right)+\frac{1}{n}\cdot\hat{b}_{n,\sigma}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[\mathrm{e}^{-\frac{b}{n}}X_{t_{i-1}}+\frac{a}{b}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{b}{n}}\right)+\sigma Z_{i,\frac{1}{n}}-X_{t_{i-1}}\right]+\frac{1}{n}\hat{b}_{n,\sigma}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}\\&=n\left(\mathrm{e}^{-\frac{b}{n}}-1\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}+b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}+\frac{na}{b}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{b}{n}}\right)-a\\&\quad+\sigma\sum_{i=1}^{n}Z_{i,\frac{1}{n}}+\left(\hat{b}_{n,\sigma}-b\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}\to 0\end{aligned}$$

结合 $\hat{b}_{n,\sigma}$ 的相合性和(5)知，当 $n\to\infty,\sigma\to 0$ 时上式成立。

4. 最小二乘估计量 $\hat{b}_{n,\sigma}$ 和 $\hat{a}_{n,\sigma}$ 的渐近性

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}\left(\hat{b}_{n,\sigma}-b\right)&=\sigma^{-1}\left[\left(1-\mathrm{e}^{-b/n}\right)n-b\right]-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}Z_{i,\frac{1}{n}}-n^{-1}\sum_{i=1}^{n}Z_{i,\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}^2-\left(n^{-1}X_{t_{i-1}}\right)^2}\\&:=\sigma^{-1}\Lambda_n-\frac{\sigma^{-1}\Phi_1(n,\sigma)-\sigma^{-1}\Phi_2(n,\sigma)}{\Phi_3(n,\sigma)-\Phi_4(n,\sigma)}\end{aligned}$$

为方便起见，我们设 $\Psi_1(n,\sigma)=\sigma^{-1}\Phi_1(n,\sigma):=\Psi_{1,1}(n)+\Psi_{1,2}(n)+\Psi_{1,3}(n)+\Psi_{1,4}(n,\sigma)$，$\Psi_2(n,\sigma)=\sigma^{-1}\Phi_2(n,\sigma)$。

引理 4.1 当 $n\to\infty,\sigma\to 0,n\sigma\to\infty$ 时，$\sigma^{-1}\Lambda_n\to 0$。

证明： 通过基本计算我们有 $\left|\sigma^{-1}\Lambda_n\right|\le\dfrac{Cb^2}{n\sigma}\to 0$。

引理 4.2 当 $n\to\infty,\sigma\to 0,\sigma n^{1-\frac{1}{\alpha}}\to\infty$ 时，$\Psi_1(n,\sigma)-\Psi_2(n,\sigma)\to\left(X_0+\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\alpha b}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}U$。

证明： 设 $U_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{bs}\mathrm{d}Z_s\sim\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{\alpha bs}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}S_\alpha(1,\beta,0)$

DOI: 10.12677/sa.2017.65061

$$\Psi_{1,1}(n)=X_0\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}+t_i)}U_i$$
$$\sim X_0\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\alpha b(t_{i-1}+t_i)}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{\alpha bs}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}S_\alpha(1,\beta,0)$$
$$\triangleq X_0\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha b}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}U$$

同理

$$\Psi_{1,2}(n)=\frac{a}{b}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_i}U_i\sim\frac{a}{b}U$$

$$\Psi_{1,3}(n)=\frac{a}{b}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}+t_i)}U_i\sim\frac{a}{b}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha b}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}U$$

$$P\left(\left|\Psi_{1,4}(n,\sigma)\right|>\varepsilon\right)\le\varepsilon^{-1}E\left|\sigma\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s\right|$$
$$\le\varepsilon^{-1}\sigma\sum_{i=1}^{n}C\left(\int_{0}^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}C\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$=C\varepsilon^{-1}\sigma\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha b/n}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha bt_{i-1}}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=O\left(\sigma n^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)$$

当 $\sigma n^{1-\frac{1}{\alpha}}\to 0$ 时上式趋向于 0。由类似的证明方法，$\Psi_2(n,\sigma)$ 依概率收敛于 $\frac{a}{b}U$。

定理 2 的证明

由引理 3.2、引理 4.1、引理 4.2 和 Slutsky 定理，我们有

$$\sigma^{-1}\left(\hat{b}_{n,\sigma}-b\right)\to_d\frac{\left(X_0+\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha b}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{(C_1+C_2+C_3)-(C_4+C_5+C_6)}U$$

又因为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}X_0+\frac{a}{b}-\frac{a}{nb}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-bt_{i-1}}+\frac{\sigma}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-b(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}Z_s$$
$$\to\frac{a-X_0}{b}\left(\mathrm{e}^{-b}-1\right)+\frac{a}{b}\triangleq D$$

$\sigma^{-1}\sigma\sum_{i=1}^{n}Z_{i,\frac{1}{n}}=O\left(n^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)$ 发散，所以

$$\sigma^{-1}\left(\hat{a}_{n,\sigma}-a-\sigma\sum_{i=1}^{n}Z_{i,\frac{1}{n}}\right)\to_d D\frac{\left(X_0+\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha b}}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{(C_1+C_2+C_3)-(C_4+C_5+C_6)}U$$

其中，$U \sim S_\alpha(1,\beta,0)$，$C_1 = -\frac{X_0^2}{2b}\left(e^{-2b}-1\right)$，$C_2 = -\frac{a^2}{2b^3}\left(e^{-b}-1\right)\left(e^{-b}-3\right)$，$C_3 = \frac{a}{b^2}X_0\left(e^{-b}-1\right)^2$，$C_4 = \frac{X_0^2}{b^2}\left(e^{-b}-1\right)^2$，$C_5 = \frac{a^2}{b^4}\left(e^{-b}-1+b\right)^2$，$C_6 = \frac{2aX_0}{b^3}\left(e^{-b}-1\right)\left(e^{-b}-1-b\right)$。

至此完成了定理 2 的证明。

致　谢

感谢参考文献中学者的研究和贡献，并感恩导师和师兄师姐一直以来对我的帮助和鼓励。

参考文献 (References)

[1] Vasicek, O. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-188. https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2

[2] Shimizu, Y. and Yoshida, N. (2006) Estimation of Parameters for Diffusion Processes with Jumps from Discrete Observations. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **9**, 227-277. https://doi.org/10.1007/s11203-005-8114-x

[3] Shimizu, Y. (2006) M-Estimation for Discretely Observed Ergodic Diffusion Processes with Infinite Jumps. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **9**, 179-225. https://doi.org/10.1007/s11203-005-8113-y

[4] Masuda, H. (2005) Simple Estimators for Non-Linear Markovian Trend from Sampled Data: I. Ergodic Cases. MHF Preprint Series 2005-7, Kyushu University.

[5] Brockwell, P.J., Davis, R.A. and Yang, Y. (2007). Estimation for Non-Negative Lévy-Driven Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Journal of Applied Probability*, **44**, 977-989. https://doi.org/10.1017/S0021900200003673

[6] Valdivieso, L., Schoutens, W. and Tuerlinckx, F. (2008) Maximum Likelihood Estimation in Processes of Ornstein-Uhlenbeck Type. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. https://doi.org/10.1007/s11203-008-9021-8

[7] Spiliopoulos, K. (2008) Methods of Moments Estimation of Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by General Lévy Process. University of Maryland.

[8] Hu, Y. and Long, H. (2007) Parameter Estimation for Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by α-Stable Lévy Motions. *Communications on Stochastic Analysis*, **1**, 175-192.

[9] Hu, Y. and Long, H. (2009) Least Squares Estimator for Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by α-Stable Motions. *Stochastic Processes and Their Applications*, **119**, 2465-2480. https://doi.org/10.1016/j.spa.2008.12.006

[10] Genon-Catalot, V. (1990) Maximum Contrast Estimation for Diffusion Processes from Discrete Observations. *Statistics*, **21**, 99-116.

[11] Laredo, C.F. (1990) A Sufficient Condition for Asymptotic Sufficiency of Incomplete Observations of a Diffusion Process. *Annals of Statistics*, **18**, 1158-1171.

[12] SØrensen, M. (2000) Small Dispersion Asymptotics for Diffusion Martingale Estimating Functions. Preprint No. 2000-2, Department of Statistics and Operation Research, University of Copenhagen, Copenhagen.

[13] SØrensen, M. and Uchida, M. (2003) Small Diffusion Asymptotics for Discretely Sampled Stochastic Differential Equations. *Bernoulli*, **9**, 1051-1069.

[14] Gloter, A. and SØrensen, M. (2008) Estimation for Stochastic Differential Equations with a Small Diffusion Coefficient. *Stochastic Processes and Their Applications.*

[15] Long, H. (2009) Least Squares Estimator for Discretely Observed Ornstein-Uhlenbeck Processes with Small Lévy Noises. *Statistics & Probability Letters*, **79**, 2076-2085. https://doi.org/10.1016/j.spl.2009.06.018

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2325-2251，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：sa@hanspub.org