Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(8), 80-92
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.148307

带混合色散项的四阶Hartree方程驻波解的存在性与稳定性

颜春阳

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期：2024年6月25日；录用日期：2024年7月27日；发布日期：2024年8月19日

摘 要

本文主要研究了如下带有混合色散项的四阶 **Hartree** 方程驻波解的存在性与轨道稳定性

$$i\psi_t - \Delta^2\psi + \mu\Delta\psi + (|x|^{-\gamma} * |\psi|^2)\psi = 0,$$

其中 $0 < \gamma < 4$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\psi = \psi(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ 是复值函数. 在 L^2-次临界情况下, 基于波形分解和广义 **Gagliardo-Nirenberg** 不等式, 证明了该方程驻波解的存在性与轨道稳定性.

关键词

波形分解，驻波解，轨道稳定性

Existence and Stability of Standing Waves for the Fourth-Order Hartree Equation with Mixed Dispersion Terms

Chunyang Yan

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 25^{th}, 2024; accepted: Jul. 27^{th}, 2024; published: Aug. 19^{th}, 2024

文章引用: 颜春阳. 带混合色散项的四阶Hartree方程驻波解的[J]. 理论数学, 2024, 14(8): 80-92.
DOI: 10.12677/pm.2024.148307

Abstract

In this paper, we study the existence and orbital stability of standing waves for the fourth-order Hartree equation with mixed dispersion terms

$$i\psi_t - \Delta^2\psi + \mu\Delta\psi + (|x|^{-\gamma} * |\psi|^2)\psi = 0,$$

where $0 < \gamma < 4$**,** $\mu \in \mathbb{R}, \psi = \psi(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ **is the complex-valued wave function. In the** L^2**-subcritical case, based on the generalized Gagliardo-Nirenberg inequality and the profile decomposition, we prove existence and orbital stability of standing waves for this equation.**

Keywords

Profile Decomposition, Standing Waves, Orbital Stability

1. 引言及主要结果

本文主要研究了如下带有混合色散项的四阶 Hartree 方程驻波解的轨道稳定性

$$\begin{cases} i\psi_t - \Delta^2\psi + \mu\Delta\psi + (|x|^{-\gamma} * |\psi|^2)\psi = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) \in H^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $0 < \gamma < 4$, $\mu \in \mathbb{R}, \psi = \psi(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ 是复值函数. 四阶 Hartree 方程首先是由美国物理学家David M.Dennison 在 1967 年提出. 到 20 世纪 80 年代, 人们开始利用数值模拟方法研究带混合色散项的四阶 Hartree 方程驻波解的轨道稳定性. 20 世纪 90 年代至今, 越来越多的学者开始研究这类方程, 然而, 对于这类方程, 其驻波解的轨道稳定性问题一直是一个挑战. 它涉及到非线性波动, 色散和非线性相互作用等多个方面, 对于深入理解非线性物理现象和解决实际问题具有重要意义. Hartree 型非线性薛定谔方程被广泛用于描述多种科学现象, 包括多体量子系统的平均场极限动力学和半导体超晶格中的量子运输等, 见文献 [1,2]. 此外, 带混合色散项的四阶 Hartree 型方程在激

光介质传播理论, 非相对论玻色子原子和分子大系统的量子理论中有着重要的应用. 近年来, 在文献 [3–5] 中 Hartree 方程已经得到了广泛的研究.

Karpman等人在文献 [6,7] 中通过引入四阶薛定谔方程, 研究了四阶色散项对强激光在体介质中传播的影响. 对于带混合色散项的双调和非线性薛定谔方程, Fernández 等人在文献 [8] 中研究了局部极小值的存在性, 而 Luo 在文献 [9] 中证明了驻波解的存在性与轨道稳定性. Cho 等人在文献 [10] 中研究了带 Hartree 项的分数阶薛定谔方程的局部解和全局解的存在唯一性, Feng 和 Zhang 在文献 [11] 中研究了其驻波解的稳定性. 对于带混合色散项的四阶 Hartree 方程驻波解的轨道稳定性暂时还没有学者研究, 故在以上研究工作基础之上, 本文主要研究方程 (1.1) 在 L^2次临界情况下, 驻波解的存在性及轨道稳定性, 主要填补了当 μ 为负且 $\gamma \in (0,4)$ 时四阶 Hartree 方程基态解是否存在的空白.

方程 (1.1) 的驻波解是形如 $\psi(t,x) = e^{i\omega t}u(x)$ 的解, 其中 $\omega \in \mathbb{R}$ 是频率, $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ 是满足如下椭圆方程的非平凡解

$$\Delta^2 u - \mu\Delta u + \omega u - (|x|^{-\gamma} * |u|^2)u = 0. \tag{1.2}$$

方程 (1.2) 的作用泛函和能量泛函分别定义为:

$$S_\omega(u) := E(u) + \frac{\omega}{2}\|u\|_2^2,$$

$$E_\mu(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\Delta u|^2 dx + \frac{\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^2|u(y)|^2}{|x-y|^\gamma} dxdy. \tag{1.3}$$

在 $\mu < 0$ 的情况下, 为了研究 Cauchy 问题 (1.1) 驻波解的轨道稳定性, 运用 Cazenave 和 Lions 在文献 [12] 中的方法, 考虑极小化问题

$$A_\mu := \inf_{u \in B_1} E_\mu(u), \tag{1.4}$$

其中 $B_1 := \{u \in H^2 | \int |u|^2 dx = 1\}$. 定义极小化问题 (1.4) 的解集为

$$\mathcal{Q}_\mu := \{u \in B_1 :\ E_\mu(u) = A_\mu\}, \tag{1.5}$$

由此可知, 对任意 $u \in \mathcal{Q}_\mu$, 存在 $v \in \mathbb{R}$ 使得 (u,v) 是椭圆方程 (1.2) 的解.

定义 1.1 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意的初值 ψ_0 满足

$$\inf_{u \in \mathcal{Q}_\mu} \|\psi_0 - u\|_{H^2} < \delta,$$

方程 (1.1) 以 ψ_0 为初值的解 $\psi(t,x)$ 满足对所有的 $t \geq 0$ 使得

$$\inf_{u \in \mathcal{Q}_\mu} \|\psi(t,x) - u\|_{H^2} < \varepsilon,$$

则称集合 $\mathcal{Q}_\mu$ 是轨道稳定的.

定理 1.2 设 $\gamma \in (0,4)$, $\mu \in \mathbb{R}$, 满足下列条件之一:

(1) $0<\gamma<2$, $\forall\mu\in(0,+\infty)$;

(2) $2\le\gamma<4$, $\forall\mu\in(0,\mu_0)$;

(3) $0<\gamma<4$, $\mu=0$;

(4) $0<\gamma<4$, $\forall\mu\in(-\xi_0,0)$, 其中$\xi_0:=\xi_0(\gamma,d,\|Q\|_2)>0$.

则集合 $\mathcal{Q}_\mu\neq\emptyset$ 且解是轨道稳定的.

定理 1.2 表明, 对于适当的 $\mu\in\mathbb{R}$, 若 $0<\gamma<4$, $\mu\in(-\xi_0,0)$, 则 Cauchy 问题 (1.1) 存在轨道稳定的基态. 该结果 (1)-(3) 与文献 [13–15] 中的结果类似, 但证明方法却不同, 本文主要应用波形分解来处理 (1)-(4) 的所有情况, 而使用上述参考文献中的方法无法直接得到该结论.

Grard 在文献 [16] 中首次提出了波形分解的概念. Hmidi 和 Keraani 在文献 [17] 中利用 H^1 空间中有界序列的波形分解研究了经典二阶非线性薛定谔方程, Zhu 等人在文献 [18] 中得到了 H^2 空间中有界序列的波形分解结果.

本文的组织结构如下: 在第 2 节中, 我们主要陈述了 Cauchy 问题 (1.1) 的局部适定性和 H^2 空间中的波形分解, 并通过建立一些初值来得到广义 Gagliardo-Nirenberg 不等式的最佳常数. 在第 3 节中, 我们主要讨论了 L^2-次临界情况下驻波解的存在性和轨道稳定性.

2. 预备知识

在本文中, $\int h(x)dx$ 表示 h 在 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格积分, $L^p:=L^p(\mathbb{R}^d)$, $1\le p\le+\infty$ 是具有标准范数 $\|\cdot\|_p$ 的勒贝格空间, $H^2(\mathbb{R}^d)$ 表示具有范数 $\|v\|_{H^2}=(\|\triangle v\|_2^2+\|v\|_2^2)^{\frac12}$ 的 Sobolev 空间.

引理 2.1 (局部适定性 [19]) 设 $\psi_0\in H^2$, $0<\gamma<4$, 则存在 $T=T(\|\psi_0\|_{H^2})$, 使得 Cauchy 问题 (1.1) 存在唯一解 $\psi\in C([0,T);H^2)$. 设 $[0,T)$ 是解 $\psi(t,x)$ 的极大存在区间, 若 $T<\infty$, 当 $t\to T$ 时, 有 $\|\psi(t,\cdot)\|_{H^2}\to\infty$. 此外, 对所有的 $t\in[0,T)$, ψ 满足以下守恒定律

(i)质量守恒：

$$M(\psi)=\|\psi(t,\cdot)\|_2^2=\|\psi_0\|_2^2=M(\psi_0),$$

(ii)能量守恒：

$$E_\mu(\psi)=\frac12\int_{\mathbb{R}^d}|\Delta\psi|^2dx+\frac{\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\psi|^2dx-\frac14\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|u(x)|^2|u(y)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy=E_\mu(\psi_0).$$

引理 2.2 (Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 [20]) 设 $p>1$, $s>1$, $0<\gamma<4$, $u\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $v\in L^s(\mathbb{R}^d)$, 则存在一个常数 $C(\gamma,d,p,s)$ 满足

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(x)v(y)}{|x-y|^\gamma}dxdy\right|\le C(\gamma,d,p,s)\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|v\|_{L^s(\mathbb{R}^d)},\tag{2.1}$$

其中 $\frac1p+\frac1s+\frac{\gamma}{N}=2$.

引理 2.3 (波形分解 [9]) 设 $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是空间 H^2 中的一个有界序列, 则存在$\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的一个子序

列(仍记为 $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$), 在 $\mathbb{R}^d$ 中的序列 $\{x_n^t\}_{t=1}^{+\infty}$ 和 H^2 中的函数列 $\{V^t\}_{t=1}^{+\infty}$ 使得

(i) 对任意 $k \neq j$, 当 $n \to +\infty$ 时, $|x_t^k - x_n^t| \to +\infty$;

(ii) 对任意 $l \geq 1$,

$$v_n = \sum_{t=1}^{l} V^t(\cdot - x_n^t) + r_n^l, \tag{2.2}$$

当 $l \to +\infty$ 时,

$$\limsup_{n\to+\infty} \|r_n^l\|_q \to 0, \tag{2.3}$$

其中 $q \in \left(2, \frac{2d}{(d-4)^+}\right)$. 此外, 当 $n \to +\infty$ 时, 则有

$$\|v_n\|_2^2 = \sum_{j=1}^{l} \|V^t\|_2^2 + \|r_n^l\|_2^2 + o_n(1), \tag{2.4}$$

$$\|\nabla v_n\|_2^2 = \sum_{t=1}^{l} \|\nabla V^t\|_2^2 + \|\nabla r_n^l\|_2^2 + o_n(1), \tag{2.5}$$

$$\|\Delta v_n\|_2^2 = \sum_{t=1}^{l} \|\Delta V^t\|_2^2 + \|\Delta r_n^l\|_2^2 + o_n(1), \tag{2.6}$$

$$\|\sum_{t=1}^{l} V^j(x - x_n^t)\|_q^q = \sum_{t=1}^{l} \|V^t(x - x_n^t)\|_q^q + o_n(1), \tag{2.7}$$

其中, 当 $n \to +\infty$ 时, $o_n(1) \to 0$.

引理 2.4 (Gagliardo-Nirenberg 不等式 [4]) 设 $0 < \gamma < 4$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^2|u(y)|^2}{|x-y|^\gamma} dxdy \leq C_\gamma ||u||_2^{\frac{8-\gamma}{2}} ||\Delta u||_2^{\frac{\gamma}{2}}, \tag{2.8}$$

其中

$$C_\gamma = \frac{8}{8-\gamma}\left(\frac{8-\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{4}} \frac{1}{\|Q\|_2^2}.$$

Q 是如下椭圆方程的基态解

$$\Delta^2 Q + Q - (|x|^{-\gamma} * |Q|^2)Q = 0.$$

特别地, 在 L^2-临界的情形下, 即: 当 $\gamma = 4$ 时, 最佳常数为 $C_\gamma = 2\frac{1}{\|Q\|_2^2}$.

接下来, 在质量次临界的情况下, 根据以上引理, 我们可以通过考虑极小化问题 (VP) 来研究方程 (1.1) 驻波解的存在性和稳定性, 即证明集合 $\mathcal{Q}_\mu$ 是非空的且轨道稳定的. 然而, 与文献 [13–15] 相比, 因为方程 (1.1) 中带有 Hartree 项 $(|x|^{-\gamma} * |\psi|^2)\psi$, 导致任何极小化序列都很难有收敛的子列, 故我们利用波形分解可获得极小化问题 (VP) 的所有极小化序列的紧性, 从而证明驻波解的存在性.

3. L^2-次临界情况下驻波解的轨道稳定性

设 $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < \gamma < 4$, 定义极小化问题 (VP) 为

$$A_\mu = \inf_{v \in B_1} E_\mu(v),$$

其中 $A_\mu \neq -\infty$. 根据不等式 (2.8), 对任意 $v \in H^2$, 有

$$\begin{aligned} E_\mu(v) &= \frac{1}{2}\|\Delta v\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|u(x)|^2|u(y)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy \\ &\geq \frac{1}{2}\|\Delta v\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|\nabla v\|_2^2 - C_\gamma\|v\|_2^{\frac{8-\gamma}{2}}\|\Delta v\|_2^{\frac{\gamma}{2}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

当 $\mu > 0$ 时, (3.1) 式可化为

$$E_\mu(v) \geq \frac{1}{2}\|\Delta v\|_2^2 - C_\gamma\|v\|_2^{\frac{8-\gamma}{2}}\|\Delta v\|_2^{\frac{\gamma}{2}}. \tag{3.2}$$

当 $\mu < 0$ 时, 由于 $\|\nabla v\|_2^2 \leq \|\Delta v\|_2\|v\|_2$, 则方程 (3.1) 可表示为

$$E_\mu(v) \geq \frac{1}{2}\|\Delta v\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|\Delta v\|_2\|v\|_2 - C_\gamma\|v\|_2^{\frac{8-\gamma}{2}}\|\Delta v\|_2^{\frac{\gamma}{2}}, \tag{3.3}$$

注意到, 当 $0 < \frac{\gamma}{2} < 2$ 时, 由上式推出 $A_\mu \neq -\infty$. 因此, 极小化问题 (VP) 是有意义的.

在求解极小化问题 (VP) 之前, 通过对引理 3.1 和引理 3.4 的研究可证明 A_μ 的性质.

引理 3.1 设 $0 < \gamma < 4$, 则当 $\mu \in \mathbb{R}$ 时, A_μ 是非减的且处处连续.

证明 对任意的 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, u \in B_1$, $\mu_1 < \mu_2$, 则有 $E_{\mu_1}(u) < E_{\mu_2}(u)$. 根据 A_μ 的定义可知, 有 $A_{\mu_1} \leq A_{\mu_2}$. 因此, A_μ 是非减的.

下证 A_μ 是处处连续的. 对任意 $\mu_n \to \mu^-$, 当 $n \to +\infty$ 时, 有 $A_{\mu_n} \to A_\mu$. 对任意 $n \in N$, 由 A_μ 的定义得, 存在 $u_n \in B_1$ 使得

$$A_\mu \leq E_{\mu_n}(u_n) < A_{\mu_n} + \frac{1}{n} < A_\mu + \frac{1}{n}. \tag{3.4}$$

根据 (3.1) 式及 $\|\nabla u_n\|_2^2 \leq \|\Delta u_n\|_2\|u_n\|_2$, 则 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 在 H^2 中有界.

$$\begin{aligned} A_\mu \leq E_\mu(u_n) &= E_{\mu_n}(u_n) + [E_\mu(u_n) - E_{\mu_n}(u_n)] \\ &= E_{\mu_n}(u_n) + \frac{\mu-\mu_n}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 \\ &\leq A_{\mu_n} + \frac{1}{n} + \frac{\mu-\mu_n}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 \\ &< A_\mu + \frac{1}{n} + \frac{\mu-\mu_n}{2}\|\nabla u_n\|_2^2. \end{aligned}$$

因此, 当 $\mu_n \to \mu^-$ 时, $A_{\mu_n} \to A_\mu$. 类似地, 可证明当 $\mu_n \to \mu^+$ 时, $A_{\mu_n} \to A_\mu$, 则对任意$u \in \mathbb{R}$, A_μ 是处处连续的.

引理 3.2 设 $\gamma > 2$, 对任意 $\mu \in \mathbb{R}$, 则 $A_\mu \leq 0$.

证明 固定 $v_0 \in B_1$, 对任意 $\lambda > 0$, 令

$$v^\lambda(x) := \lambda^{\frac{d}{2}} v_0(\lambda x), \tag{3.5}$$

则 $v^\lambda \in B_1$,

$$E_\mu(v^\lambda) = \frac{\lambda^4}{2}\|\Delta v_0\|_2^2 + \frac{\mu\lambda^2}{2}\|\nabla v_0\|_2^2 - \frac{\lambda^\gamma}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|v_0(x)|^2|v_0(y)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy. \tag{3.6}$$

因此, 根据 (3.6) 式及 A_μ 的定义, 则有 $A_\mu \leq \lim\limits_{\lambda\to 0^+} E_\mu(v^\lambda) = 0$.

引理 3.3 设 $0 < \gamma < 4$, $\mu > 0$, 则关于 A_μ 的下列性质成立:

(i) 对任意 $\mu > 0$, 若 $0 < \gamma < 2$, 则有 $A_\mu < 0$,

(ii) 若 $2 \leq \gamma < 4$, 令

$$\mu_0 := \sup\{\mu > 0 \mid A_\mu < 0\}, \tag{3.7}$$

则当 $0 < \mu_0 < +\infty$ 时,

$$\begin{cases} A_\mu < 0, \ 0 < \mu < \mu_0, \\ A_\mu = 0, \ \mu > \mu_0. \end{cases}$$

证明 给定 $\mu > 0$, 由 (3.5) 式及 (3.6) 式, 则有

$$\frac{E_\mu(v^\lambda)}{\lambda^\gamma} = \frac{\lambda^{4-\gamma}}{2}\|\Delta v_0\|_2^2 + \frac{\mu\lambda^{2-\gamma}}{2}\|\nabla v_0\|_2^2 - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|v_0(x)|^2|v_0(y)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy. \tag{3.8}$$

若 $0 < \gamma < 2$, 则 $2-\gamma > 0$. 由 (3.8) 式可得, 存在 $\lambda_0 > 0$ 足够小, 使得 $A_\mu \leq E_\mu(v^{\lambda_0}) < 0$. 因此, (i) 得证.

若 $2 \leq \gamma < 4$, 令 $\lambda = \sqrt{\mu}$, 则 (3.8) 式表明

$$\frac{E_\mu(v^\lambda)}{\mu^{\frac{\gamma}{2}}} = \frac{\mu^{\frac{4-\gamma}{2}}}{2}\|\Delta v_0\|_2^2 + \frac{\mu^{\frac{4-\gamma}{2}}}{2}\|\nabla v_0\|_2^2 - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|v_0(x)|^2|v_0(y)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy.$$

若 $\mu > 0$ 足够小, 则 $A_\mu < 0$. 由 μ_0 的定义可知, $\mu_0 > 0$. 当 $\mu > 0$足够大时, $A_\mu = 0$.

引理 3.4 设 $0 < \gamma < 4$, 对任意 $\mu \leq 0$, 有 $A_\mu < 0$.

证明 对任意的 $\mu \leq 0$, 固定 $v_0 \in B_1$, 定义变换 $v^\lambda = \lambda^{\frac{d}{2}} v_0(\lambda x)$, 对任意 $\lambda > 0$, 有 $v^\lambda \in B_1$. 由于 $\mu \leq 0$, 则有

$$E_\mu(v^\lambda) \leq \frac{\lambda^4}{2}\|\Delta v_0\|_2^2 - \frac{\lambda^\gamma}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|v_0(x)|^2|v_0(y)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy. \tag{3.9}$$

由 (3.9) 式可得, 存在一个仅依赖于 γ, v_0 的常数 $\lambda_0 > 0$, 使得$E_\mu(v^{\lambda_0}) < 0$, 则 $A_\mu < 0$.

接下来, 根据引理 3.1-3.4, 再应用 H^2 空间中的波形分解方法来证明驻波解的存在性.

命题 3.5 设 $0 < \gamma < 4$, $\mu \in \mathbb{R}$ 和 A_μ 满足 $\mu \geq 0$, $A_\mu < 0$ 或存在 $\xi_0 := \xi_0(\gamma, d, \|Q\|_2) > 0$, 使

得$-\xi_0 < \mu < 0$, 则 A_μ 的任意极小化序列在 H^2 都具有紧性, 且存在 $u \in B_1$, 使得 $A_\mu = E_\mu(u)$, 即 $\mathcal{Q}_\mu \neq \emptyset$.

证明 先证明 $\mu \geq 0$, $A_\mu < 0$ 的情况. 设$\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_1$ 是任意序列, 当 $n \to +\infty$ 时, 满足

$$E_\mu(v_n) \to A_\mu. \tag{3.10}$$

当 $n \to \infty$ 时, 有 $A_\mu \leq E_\mu(v_n) < \frac{A_\mu}{2} < 0$,

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|v_n(x)|^2|v_n(y)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy = -E_\mu(v_n) + \frac{1}{2}\|\Delta v_n\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|\nabla v_n\|_2^2 \geq -\frac{A_\mu}{2} > 0. \tag{3.11}$$

通过 Hölder's 不等式, 则 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_1$ 在 L^q 中非消失性成立. 此外, 在 H^2 中, 若 $0 < \gamma < 4$, 由 (3.2) 式及 (3.10) 式得, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界.

接下来, 由引理 2.3 得, 存在 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个弱收敛子列 (仍记为$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$), 使得

$$v_n = \sum_{t=1}^{l} V^t(\cdot - x_n^t) + r_n^l. \tag{3.12}$$

当 $q \in (2, \frac{2d}{(d-4)^+})$ 时, 有 $\lim\limits_{l\to+\infty}\limsup\limits_{n\to\infty}\|r_n^l\|_q = 0$. 把 (3.12) 式代入能量泛函得

$$E_\mu(v_n) = \sum_{t=1}^{l} E_\mu(V^t(x - x_n^t)) + E_\mu(r_n^l) + o_{n,l}(1), \tag{3.13}$$

其中 $\lim\limits_{l\to+\infty}\lim\limits_{n\to\infty} o_{n,l}(1) = 0$. 由于 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_1$, 并且非消失性成立, 故假设对任意 $l \geq 1$, 当 $1 \leq t \leq l$ 时, 有 $\|V^t(x - x_n^t)\|_2 \neq 0$. 根据文献 [17] 中 Lion's 消失性引理假设,

$$V_{\lambda_t}^t = \lambda_t V^t(x - x_n^t), \quad \lambda_t = \frac{1}{\|V^t\|_2} \neq 0.$$

则 $\|V_{\lambda_t}^t\|_2 = 1$, 并且有

$$E_\mu(V_{\lambda_t}^t) = \lambda_t^2 E_\mu(V^t(x - x_n^t)) - \frac{\lambda_t^2(\lambda_t^2 - 1)}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|V^t(x - x_n^t)|^2|V^t(y - y_n^t)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy,$$

$$E_\mu(V^t(x - x_n^t)) = \frac{1}{\lambda_t^2}E_\mu(V_{\lambda_t}^t) + \frac{\lambda_t^2 - 1}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|V^t(x - x_n^t)|^2|V^t(y - y_n^t)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy. \tag{3.14}$$

类似地, 令 $V_n^l = \frac{r_n^l}{\|r_n^l\|_2}$, 则有

$$E_\mu(V_n^l) = \frac{1}{\|r_n^l\|_2^2}E_\mu(r_n^l) - \frac{1}{4\|r_n^l\|_2^2}\left(\left(\frac{1}{\|r_n^l\|_2}\right)^2 - 1\right)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|r_n^l|^2|r_n^l|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy,$$

$$E_\mu(r_n^l) = \|r_n^l\|_2^2 E_\mu(V_n^l) + \frac{\left(\frac{1}{\|r_n^l\|_2}\right)^2 - 1}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|r_n^l|^2|r_n^l|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy \geq \|r_n^l\|_2^2 E_\mu(V_n^l). \tag{3.15}$$

另一方面, 由 A_μ 的定义可知,

$$E_\mu(V^t_{\lambda_t}) \geq A_\mu,\ \ E_\mu\Big(\frac{r^l_n}{\|r^l_n\|_2}\Big) = E_(V^l_n) \geq A_\mu. \tag{3.16}$$

同时, 可得 $\sum\limits_{t=1}^{l}\|V^t(x-x^t_n)\|_2^2$ 是收敛的, 则存在 $t_0 \geq 1$ 使得

$$\inf_{t\geq 1}\frac{\lambda_t^2-1}{4} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{\|V^{t_0}\|_2^2}-1\Big), \tag{3.17}$$

将 (3.14)-(3.17) 式代入 (3.13) 式得,

$$\begin{aligned} E_\mu(V_n) &\geq \sum_{t=1}^{l}\frac{A_\mu}{\lambda_t^2} + \inf_{t\geq 1}\frac{\lambda_t^2-1}{4}\Bigg(\sum_{t=1}^{l}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|V^t(x-x^t_n)|^2|V^t(y-y^t_n)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy\Bigg) \\ &\quad + \|r^l_n\|_2^2 E_\mu(V^l_n) + o_{n,l}(1) \\ &\geq \sum_{t=1}^{l}\frac{A_\mu}{\lambda_t^2} + \|r^l_n\|_2^2 A_\mu + \frac{C_0}{4}\Big(\frac{1}{\|V^{t_0}\|_2^2}-1\Big) + o_{n,l}(1) \\ &= A_\mu + \frac{C_0}{4}\Big(\frac{1}{\|V^{t_0}\|_2^2}-1\Big) + o_{n,l}(1) \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 C_0 是不依赖于 n, l 的常数. 令 (3.18) 式中的 $n, l \to +\infty$, 则由 (3.10) 式可得

$$\frac{C_0}{4}\Big(\frac{1}{\|V^{t_0}\|_2^2}-1\Big) \leq 0,$$

故必有 $\|V^{t_0}\|_2^2 \geq 1$. 方程 (2.4) 表明在分解式 (3.12) 中存在一项 $V^{t_0} \neq 0$, 使得 $\|V^{t_0}\|_2^2 = 1$. 这意味着, 当 $n \to +\infty$ 时, $\|v_n\|_2 \to \|V^{t_0}\|_2$, $\|r^l_n\|_2 \to 0$. 为证明 $\|v_n\|_2 \to \|\Delta V^{t_0}\|_2$, 由 (3.13) 式及 (2.3) 式得,

$$E_\mu(v_n) = E_\mu(V^{t_0}) + \frac{1}{2}\|\Delta r^{t_0}_n\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|\nabla r^{t_0}_n\|_2^2 + o_n(1). \tag{3.19}$$

由 A_μ 的定义, $\mu \geq 0$ 的正定性及 (2.6) 式和 (3.19) 式可得,

$$E_\mu(V^{t_0}) = A_\mu = \lim_{n\to+\infty}E_\mu(v_n),\ \lim_{n\to+\infty}\|\Delta r^{t_0}_n\|_2 = \lim_{n\to+\infty}\|\nabla r^{t_0}_n\|_2 = 0,\ \lim_{n\to+\infty}\|\Delta v_n\|_2 = \|\Delta V^{t_0}\|_2.$$

因此, 由 (2.2) 式可知, $\{v_n\}$ 在 H^2 中弱收敛和范数收敛$\|v_n\|_{H^2} \to \|V^{t_0}\|_{H^2}$, 从而在 H^2 中, $v_n(x+x^{t_0}_n) \to V^{t_0}$, $E_\mu(V^{t_0}) = A_\mu$. 由此可以说明当 $\mu \geq 0$ 时, 极小化问题 (VP) 的极小值可以在 V^{t_0} 处取到.

下证 $\mu < 0$ 的情况. 根据引理 3.3 可知, 对任意 $\mu < 0$, $A_\mu < 0$. 设 $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset B_1$ 是 A_μ 的任意极小化序列, 由 (3.3)式得, $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 H^2 中有界. 不失一般性, 假设 $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset B_1$ 在 H^2 中弱收敛, 故存在常数$\xi_0 := \xi_0(\gamma, d, \|Q\|_2) > 0$. 当 $\xi_0 < \mu < 0$ 时, 存在 C_0, 使得 $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 非消失性成立, 即

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|v_n(x)|^2|v_n(y)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy \geq C_0 > 0. \tag{3.20}$$

事实上, 由 (2.8) 式可得,

$$E_\mu(u) \geq \frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|\nabla u\|_2 - C_\gamma \|\Delta u\|_2^{\frac{\gamma}{2}}. \tag{3.21}$$

对任意 $k>0$, $y \geq 0$, 令

$$g_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{k}{2}x - C_\gamma x^{\frac{\gamma}{2}}. \tag{3.22}$$

则有 $g_k(0)=0$, 并且 $0<\frac{\gamma}{2}<2$. 定义 $A_0 := \inf\limits_{u\in B_1} E_\mu(u)$, 根据引理 3.4 可得, $A_0<0$, 则存在唯一的常数$x_{1,k} := x_{1,k}(\gamma, d, \|Q\|_2) > 0$, $x_{2,k} := x_{2,k}(\gamma, d, \|Q\|_2) > 0$, $x_{1,k} < x_{2,k}$, 使得

$$A_0 > g_k(x) \Longleftrightarrow x \in (x_{1,k}, x_{2,k}).$$

定义

$$\xi_0 := \sup_{k>0}(\min\{k, x_{1,k}\}), \tag{3.23}$$

根据 $k \mapsto \min\{k, x_{1,k}\}$ 的连续性, 设 $-\xi_0 < \mu < 0$, 由 ξ_0 的定义可得, 存在 k_0 使得 $-\xi_0 < \min\{k_0, x_{1,k_0}\} < \mu < 0$. 由于$\{v_n\} \subset B_1$ 是 A_μ 的极小化序列, 则根据 (3.21) 式得

$$\begin{aligned}
A_0 > A_\mu &= E_\mu(v_n) + o_n(1) \\
&\geq \frac{1}{2}\|\Delta v_n\|_2^2 - \frac{k_0}{2}\|\Delta v_n\|_2 - C_\gamma\|\Delta v_n\|_2^{\frac{\gamma}{2}} + o_n(1) \\
&= g_{k_0}(\|\Delta v_n\|_2) + o_n(1).
\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时, $o_n(1) \to 0$, 则$A_0 > g_{k_0}(\|v_n\|_2)$, 从而 $\|\Delta v_n\|_2 > x_{1,k_0} > 0$. 若$-\xi_0 < \mu < 0$, 则有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|v_n(x)|^2|v_n(y)|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy &\geq \frac{1}{2}\|\Delta v_n\|_2(\|\Delta v_n\|_2 + \mu) - \frac{A_\mu}{2} \\
&\geq \frac{1}{2}(y_{1,k_0} + \mu)\|\Delta v_n\|_2 - \frac{A_\mu}{2} \\
&\geq -\frac{A_\mu}{2} > 0,
\end{aligned}$$

因此, $\{v_n\} \subset B_1$ 的非消失性成立. 在 (3.20) 式中, 当 $n \to +\infty$ 时, 则 $\|\Delta v_n\|_2 \to \|\Delta V^{j_0}\|_2$. 由于 $\mu < 0$, 则有

$$E_\mu(v_n) \geq E_\mu(V^{t_0}) + \frac{1}{2}\|\Delta r_n^{t_0}\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|\Delta r_n^{t_0}\|_2\|r_n^{t_0}\|_2 + o_n(1) = E_\mu(V^{t_0}) + \frac{1}{2}\|\Delta r_n^{t_0}\|_2^2 + o_n(1).$$

其中 $\|\Delta r_n^{t_0}\|_2\|r_n^{t_0}\|_2 \to 0$, 由于 $\|\Delta r_n^{t_0}\|_2$ 有界且 $\|r_n^{t_0}\|_2 \to 0$, 可得

$$E_\mu(V^{t_0}) = A_\mu = \lim_{n\to+\infty} E_\mu(v_n), \ \lim_{n\to+\infty}\|\Delta r_n^{t_0}\|_2 = 0, \ \lim_{n\to+\infty}\|\Delta v_n\|_2 = \|\Delta V^{t_0}\|_2.$$

根据 $\{v_n\}$ 在 H^2 中弱收敛, 则有 $v_n(x + x_n^{t_0}) \to V^{t_0}$. 综上所述, 分别在 $\mu \geq 0$ 和 $\mu < 0$ 的情况下, 极小化问题 (VP) 的极小值均可以在 V^{t_0} 处取得. 因此, 定理得证.

以下, 将证明驻波解的轨道稳定性.

定理 1.2 的证明 定义 $\psi(t)=\psi(t,\cdot)$, 若 $\mu\in\mathbb{R}$, $0<\gamma<4$, 则 $\{\|\psi(t)\|_{H^2}^2\}$ 对所有的 $t\in I$ 有界. 根据引理 2.1 可知, 方程 (1.1) 的解 ψ 在时间上全局存在. 为了证明上述结论, 将讨论以下两种情形.

情形(i): $\mu\geq 0$. 由 (2.8) 式和引理 2.1 可得, 对任意 $t\in I$, 当$0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned}E_\mu(\psi_0)=E_\mu(\psi)&=\frac{1}{2}\|\Delta\psi(t)\|_2^2+\frac{\mu}{2}\|\nabla\psi(t)\|_2^2-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\psi|^2|\psi|^2}{|x-y|^\gamma}dxdy\\&\geq\frac{1}{2}\|\Delta\psi(t)\|_2^2+\frac{\mu}{2}\|\nabla\psi(t)\|_2^2-C_\gamma\|\psi(t)\|_2^{\frac{8-\gamma}{2}}\|\Delta\psi(t)\|_2^{\frac{\gamma}{2}}\\&\geq(\frac{1}{2}\|\Delta\psi(t)\|_2^2-C_\gamma(\varepsilon,\gamma,d,\|\psi_0\|_2).\end{aligned}$$

因此, $\{\|\psi(t)\|_{H^2}^2\}$ 对所有的 $t\in I$ 都有界.

情形(ii): $\mu<0$. 类似地, 对任意 $0<\varepsilon<\frac{2}{4-\mu}$, 有

$$\begin{aligned}E_\mu(\psi_0)=E_\mu(\psi)&\geq\frac{1}{2}\|\Delta\psi(t)\|_2^2+\frac{\mu}{2}\|\nabla\psi(t)\|_2^2-C_\gamma\|\psi(t)\|_2^{\frac{8-\gamma}{2}}\|\Delta\psi(t)\|_2^{\frac{\gamma}{2}}\\&\geq(\frac{1}{2}+\frac{\mu\varepsilon}{4}-\varepsilon)\|\Delta\psi(t)\|_2^2+\frac{\mu}{4\varepsilon}\|\psi_0\|_2^2-C_\gamma(\varepsilon,\gamma,d,\|\psi_0\|_2).\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{2}+\frac{\mu\varepsilon}{4}-\varepsilon>0$, 故对任意 $t\in I$, $\{\|\psi(t)\|_{H^2}^2\}$ 有界. 因此, ψ 在时间上全局存在.

接下来, 假设定理的结论不成立, 即 $\mathcal{Q}_\mu$ 不是轨道稳定的, 则存在$\varepsilon_0>0$ 和初始序列 $\{\psi_0^n\}_{n=1}^{+\infty}$, 使得

$$\inf_{u\in\mathcal{Q}_\mu}\|\psi_0^n-u\|_{H^2}<\frac{1}{n},\tag{3.24}$$

存在一个序列 $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 使得对应解序列$\{\psi_n(t_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足

$$\inf_{u\in\mathcal{Q}_\mu}\|\psi_n(t_n)-u\|_{H^2}\geq\varepsilon_0,\tag{3.25}$$

由守恒定律可得, 当 $n\to+\infty$ 时, 有

$$\begin{cases}\|\psi_n(t_n)\|_2^2dx=\|\psi_0^n\|_2^2\to\|u\|_2^2=1,\\E_\mu(\psi_n(t_n))=E_\mu(\psi_0^n)\to E_\mu(u)=A_\mu.\end{cases}$$

设 $\varphi_n(t_n):=\lambda_n\cdot\psi_n(t_n)$, $\lambda_n=\frac{1}{\|\psi_n(t_n)\|_2}$, 则 $\varphi_n(t_n)\in B_1$, $\lambda_n\to 1$. 特别地, $\{\psi_n(t_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ 是 A_μ 的一个极小化序列. 由引理 3.3 和引理 3.5 可推出, 在定理 1.2 的假设下, 存在一个极小值点 $\rho\in B_1$, 使得 $\|\varphi_n(t_n)-\rho\|_{H^2}\to 0$. 这表明当 $n\to+\infty$ 时, 有 $\|\psi_n(t_n)-\rho\|_{H^2}\to 0$, 这与 (3.25) 式矛盾. 因此, $\mathcal{Q}_\mu$ 是轨道稳定的.

基金项目

甘肃省杰出青年基金(No. 20JR10RA111)。

参考文献

[1] Jeanjean, L., Jendrej, J., Le, T.T. and Visciglia, N. (2022) Orbital Stability of Ground States for a Sobolev Critical Schrödinger Equation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **164**, 158-179. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2022.06.005

[2] Lieb, E.H. and Yau, H. (1987) The Chandrasekhar Theory of Stellar Collapse as the Limit of Quantum Mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, **112**, 147-174. https://doi.org/10.1007/bf01217684

[3] Banquet, C. and J. Villamizar-Roa, É. (2020) On the Management Fourth-Order Schrödinger-Hartree Equation. *Evolution Equations & Control Theory*, **9**, 865-889. https://doi.org/10.3934/eect.2020037

[4] Shi, C. (2022) Existence of Stable Standing Waves for the Nonlinear Schrödinger Equation with Mixed Power-Type and Choquard-Type Nonlinearities. *AIMS Mathematics*, **7**, 3802-3825. https://doi.org/10.3934/math.2022211

[5] Tarek, S. (2020) Non-Linear Bi-Harmonic Choquard Equations. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **11**, 5033-5057.

[6] Karpman, V.I. (1996) Stabilization of Soliton Instabilities by Higher-Order Dispersion: Fourth-Order Nonlinear Schrödinger-Type Equations. *Physical Review E*, **53**, R1336-R1339. https://doi.org/10.1103/physreve.53.r1336

[7] Karpman, V.I. and Shagalov, A.G. (2000) Stability of Solitons Described by Nonlinear Schrödinger-Type Equations with Higher-Order Dispersion. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **144**, 194-210. https://doi.org/10.1016/s0167-2789(00)00078-6

[8] Fernández, A.J., Jeanjean, L., Mandel, R. and Mariş, M. (2022) Non-Homogeneous Gagliardo-Nirenberg Inequalities in R^N and Application to a Biharmonic Non-Linear Schrödinger Equation. *Journal of Differential Equations*, **330**, 1-65. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.04.037

[9] Luo, T., Zheng, S. and Zhu, S. (2022) The Existence and Stability of Normalized Solutions for a Bi-Harmonic Nonlinear Schrödinger Equation with Mixed Dispersion. *Acta Mathematica Scientia*, **43**, 539-563. https://doi.org/10.1007/s10473-023-0205-5

[10] Cho, Y., Hajaiej, H., Hwang, G. and Ozawa, T. (2013) On the Cauchy Problem of Fractional Schrödinger Equation with Hartree Type Nonlinearity. *Funkcialaj Ekvacioj*, **56**, 193-224. https://doi.org/10.1619/fesi.56.193

[11] Feng, B. and Zhang, H. (2018) Stability of Standing Waves for the Fractional Schrödinger-Hartree Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **460**, 352-364. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.11.060

[12] Cazenave, T. and Lions, P.L. (1982) Orbital Stability of Standing Waves for Some Nonlinear Schröodinger Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **85**, 549-556. https://doi.org/10.1007/BF01403504

[13] Bonheure, D., Casteras, J., dos Santos, E.M. and Nascimento, R. (2018) Orbitally Stable Standing Waves of a Mixed Dispersion Nonlinear Schrödinger Equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **50**, 5027-5071. https://doi.org/10.1137/17m1154138

[14] Feng, W., Stanislavova, M. and Stefanov, A. (2018) On the Spectral Stability of Ground States of Semi-Linear Schrödinger and Klein-Gordon Equations with Fractional Dispersion. *Communications on Pure & Applied Analysis*, **17**, 1371-1385. https://doi.org/10.3934/cpaa.2018067

[15] Posukhovskyi, I. and G. Stefanov, A. (2020) On the Normalized Ground States for the Kawahara Equation and a Fourth Order NLS. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **40**, 4131-4162. https://doi.org/10.3934/dcds.2020175

[16] Gérard, P. (1998) Description of the Lack of Compactness for the Sobolev Imbedding. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **3**, 213-233. https://doi.org/10.1051/cocv:1998107

[17] Hmidi, T. and Keraani, S. (2005) Blowup Theory for the Critical Nonlinear Schrödinger Equations Revisited. *International Mathematics Research Notices*, **2005**, 2815-2828. https://doi.org/10.1155/imrn.2005.2815

[18] Yang, H., Zhang, J. and Zhu, S. (2010) Limiting Profile of the Blow-Up Solutions for the Fourth-Order Nonlinear Schrödinger Equation. *Dynamics of Partial Differential Equations*, **7**, 187-205. https://doi.org/10.4310/dpde.2010.v7.n2.a4

[19] Carles, R., Markowich, P.A. and Sparber, C. (2008) On the Gross-Pitaevskii Equation for Trapped Dipolar Quantum Gases. *Nonlinearity*, **21**, 2569-2590. https://doi.org/10.1088/0951-7715/21/11/006

[20] Lieb, E.H. (1983) Sharp Constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and Related Inequalities. *The Annals of Mathematics*, **118**, 349-374. https://doi.org/10.2307/2007032