Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(7), 266-274
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.147292

Hans汉斯

涉及零点个数的亚纯函数的正规定则

张泽平*, **杨锦华**†

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2024年6月7日；录用日期：2024年7月10日；发布日期：2024年7月31日

摘 要

设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数，$a(z)(\not\equiv 0)$， $a_1(z)$ 和 $b(z)$ 为区域 D 内的全纯函数。当 $a(z)=0$ 时， $f(z)\neq\infty$。对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f 和正整数 k $(k\geq 4)$，满足 $f'(z)+a_1(z)f(z)-a(z)f^k(z)-b(z)$ 在区域 D 内至多有 1 个零点(忽略重级)，则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

关键词

亚纯函数，正规定则，零点个数

A Normal Criterion of Meromorphic Functions Concerning Zero Numbers

Zeping Zhang*, **Jinhua Yang**†

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jun. 7^{th}, 2024; accepted: Jul. 10^{th}, 2024; published: Jul. 31^{st}, 2024

Abstract

Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions on a domain D, $a(z)(\not\equiv 0)$, $a_1(z)$ and $b(z)$ are

* 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 张泽平, 杨锦华. 涉及零点个数的亚纯函数的正规定则[J]. 理论数学, 2024, 14(7): 266-274.
DOI: 10.12677/pm.2024.147292

holomorphic functions on D. If k is a positive integer and $k \geq 4$, $\forall f \in \mathcal{F}$, $f(z) \neq \infty$ when $a(z)=0$, $f'(z)+a_1(z)f(z)-a(z)f^k(z)-b(z)$ has at most 1 zeros (ignoring multiplicity), then $\mathcal{F}$ is normal on D.

Keywords

Meromorphic Function, Normal Criterion, Zero Numbers

1. 引言

在复分析理论中, 亚纯函数族的正规定则是一个很重要的研究课题. 正规族的概念最早由数学家Montel于20世纪初提出, 他将具有某种列紧性的函数族称为正规族. 正规族理论以Nevanlinna建立的亚纯函数值分布理论为基础, 并且Nevanlinna值分布理论的产生使得正规族理论有了空前的发展, 出现了许多著名的正规定则, 如Marty、Miranda正规定则等. 1967 年, Hayman在文献 [1]中提出了下面的猜想.

定理 A　设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $a(\neq 0), b$ 是两个有限复数. 对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f 和正整数 k $(k \geq 5)$, $\forall f \in \mathcal{F}$, 满足 $f'(z)-af^k(z) \neq b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

该猜想已经被多人证明. 迄今为止, 这一结果已经进行了各种扩展和改进. 杨锦华等证明了定理 B [2], C [3].

定理 B　设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $a(z)(\not\equiv 0)$, $b(z)$ 为区域 D 内的全纯函数. 当 $a(z)=0$ 时, 有 $f(z) \neq \infty$. 对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f 和正整数 k $(k \geq 4)$, 满足

$$f'(z)-a(z)f^k(z) \neq b(z),$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

定理 C　设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $a(z)(\not\equiv 0)$, $a_1(z)$ 和 $b(z)$ 为区域 D 内的全纯函数. 当 $a(z)=0$ 时, 有 $f(z) \neq \infty$. 对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f 和正整数 k $(k \geq 4)$, 满足

$$f'(z)+a_1(z)f(z)-a(z)f^k(z) \neq b(z),$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

孙成雄证明了下面的定理 D [4] .

定理 D　设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $a(z)(\not\equiv 0)$ 和 $b(z)$ 为区域 D 内的全纯函数. 当 $a(z)=0$ 时, $f(z)\neq\infty$. 对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f 和正整数 k $(k\geq 4)$, 满足 $f'(z)-a(z)f^k(z)-b(z)$ 在区域 D 内至多有 1 个零点, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

结合定理 B、 C、 D , 条件 "$f'(z)+a_1(z)f(z)-a(z)f^k(z)-b(z)$ 在区域 D 内至多有1个零点" 是否仍然成立? 本文将研究这个问题并证明了一下结果.

定理 1　设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $a(z)(\not\equiv 0)$, $a_1(z)$ 和 $b(z)$ 为区域 D 内的全纯函数. 当 $a(z)=0$ 时, $f(z)\neq\infty$. 对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f 和正整数 k $(k\geq 4)$, 满足 $f'(z)+a_1(z)f(z)-a(z)f^k(z)-b(z)$ 在区域 D 内至多有 1 个零点(忽略重级), 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

注 1　本文中, 令 $\delta>0$, 记 $\Delta_\delta=\{z:|z|<\delta\}$, ${\Delta_\delta}'=\{z:|z|<\delta\}$, $\Delta=\{z:|z|<1\}$, $\Delta'=\{z:0<|z|<1\}$. 在区域D内, $f_n(z)\overset{\chi}{\Rightarrow}f(z)$ 表示 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内按球距内闭一致收敛到 $f(z)$, $f_n(z)\Rightarrow f(z)$ 表示 $\{f_n(z)\}$ 在D内按 $Euclid$ 距离内闭一致收敛到 $f(z)$.

2. 引理

为了证明本文的结果, 我们需要下列引理.

引理 1 [5–7]　设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, 对于每一个 $f\in\mathcal{F}$, f 的零点重数至少为 k, 存在一个数 $A\geq 1$, 使得当 $f\in\mathcal{F}$ 且 $f(z)=0$ 时, $|f^{(k)}(z)|\leq A$. 若 $\mathcal{F}$ 在 D 内一点 z_0 不正规, 则对 $-1\leq\alpha\leq k$, 存在

(1) 点列 $z_n\in D, z_n\to z_0$;

(2) $\mathcal{F}$ 中函数列 f_n;

(3) 正数序列 $\rho_n\to 0^+$;

使得函数列 $g_n(\zeta)=\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, 其零点重数至少为 k , 且满足 $g^{(\sharp)}(\zeta)\leq g^{(\sharp)}(0)=kA+1$ 且 $g(\zeta)$ 的级至多是2 ($g^{(\sharp)}(\zeta)$ 表示球面导数).

引理 2 [8]　设 f 是一个有穷级超越亚纯函数, k 是正整数, R 是一个不恒为 0 的多项式. 若 f 的零点重级均 ≥ 2, 则 $f^{(k)}-R$ 有无穷多个零点.

引理 3 [9]　设 f 是一个有穷级超越亚纯函数, k 是正整数. 若 f 的零点重级均 $\geq k+1$, 则 $f^{(k)}-1$ 有无穷多个零点.

引理 4 [10]　设 f 是一个非常数有理函数, k 是正整数, 若所有零点重级均 $\geq k+2$, 所有极点重级均 ≥ 3 , 则 $f^{(k)}-1$ 至少有 2 个零点.

引理 5 [11]　设 f 是一个非常数亚纯函数, $k\geq 4$ 是一个正整数, $a\neq 0$ 是一个有限复数, 则 $f'-af^k(z)$ 至少有 2 个不同的零点.

引理 6 [12]　设 Q 是一个非常数有理函数, m,k 是正整数, 若 Q 的零点重级均 $\geq k+2$, 且它的极点的重级均 ≥ 2 (除 $z=0$ 外), 则在复平面 C 上 $Q^{(k)}(z)=z^m$ 有解.

DOI: 10.12677/pm.2024.147292

引理7 [13] 设 f 是一个有理函数，m, k 是两个正整数，若对于 $z \in C$，有 $f(z) \neq 0$，且对于 $z \neq z_0$，有 $f^{(k)}(z) \neq z^m$，其中 $z_0 \in C$，则 $f(z)$ 是一个常数.

引理8 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数，$a(z)(\neq 0)$，$a_1(z), ..., a_{k-1}(z)$ 和 $b(z)$ 为区域 D 内的全纯函数. 对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f 和正整数 k $(k \geq 4)$，$f_n'(z) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(z) {f_n}^i(z) - a(z) {f_n}^k(z) - b(z)$ 至多有1个零点, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

证明 假设 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in D$ 处不正规. 由引理1，存在 $f_n \in \mathcal{F}, z_n \to z_0$，$\rho_n \to 0^+$，使得 $g_n(\zeta) = {\rho_n}^{\frac{1}{k-1}} f_n(z_n + \rho_n \zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $G(\zeta)$. 由于

$$
\begin{aligned}
&g_n'(\zeta) + \sum_{i=1}^{k-1} {\rho_n}^{\frac{k-i}{k-1}} a_i(z_n + \rho_n\zeta) g_n^i(\zeta) - a(z_n + \rho_n\zeta) g_n^k(\zeta) - {\rho_n}^{\frac{k}{k-1}} b(z_n + \rho_n\zeta) \\
=&{\rho_n}^{\frac{k}{k-1}} f_n'(z_n + \rho_n\zeta) + {\rho_n}^{\frac{k}{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} a_i(z_n + \rho_n\zeta) f_n^i(z_n + \rho_n\zeta) \\
&- {\rho_n}^{\frac{k}{k-1}} a(z_n + \rho_n\zeta) f_n^k(z_n + \rho_n\zeta) - {\rho_n}^{\frac{k}{k-1}} b(z_n + \rho_n\zeta) \neq 0.
\end{aligned}
$$

又因为 $g_n'(\zeta) + \sum_{i=1}^{k-1} {\rho_n}^{\frac{k-i}{k-1}} a_i(z_n + \rho_n\zeta) g_n^i(\zeta) - a(z_n + \rho_n\zeta) g_n^k(\zeta) - {\rho_n}^{\frac{k}{k-1}} b(z_n + \rho_n\zeta)$ 在 Δ 去掉 $g(\zeta)$ 的极点的区域内闭一致收敛于 $g'(\zeta) - a(z_0) g^k(\zeta)$.

若 $g'(\zeta) - a(z_0) g^k(\zeta) \equiv 0$,则 $g(\zeta)$ 是一个整函数. 因为, 当 $k \geq 3, a(z_0) \neq 0$ 时, 有

$$
kT(r, g) = T(r, g^k) = T(r, \frac{g'}{a(z_0)}) = T(r, g') + \log^+ \frac{1}{|a(z_0)|} \leq T(r, g) + S(r, g).
$$

由此可得 $T(r, g) = S(r, g)$. 但是, 这与 $g(\zeta)$ 是一个非常数亚纯函数矛盾.

因此，$g'(\zeta) - a(z_0) g^k(\zeta) \not\equiv 0$.

断言: 函数 $g'(\zeta) - a(z_0) g^k(\zeta)$ 至多有1个零点.

若不然, 假设函数 $g'(\zeta) - a(z_0) g^k(\zeta)$ 有2个不同的零点 ζ_j ($j = 1, 2$). 不妨取一个充分小的 δ，$\delta > 0$，使得 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ 并且 $g'(\zeta) - a(z_0) g^k(\zeta)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 内除 ζ_1, ζ_2 外没有其他零点, 其中 $D_1 = \{\zeta : |\zeta - \zeta_1| < \delta\}, D_2 = \{\zeta : |\zeta - \zeta_2| < \delta\}$.

由$Hurwizt$定理, 对于充分大的 n，存在点 $\zeta_{n,1} \to \zeta_1$，$\zeta_{n,2} \to \zeta_2$ 使得

$$
\begin{aligned}
&f_n'(z_n + \rho_n\zeta_{n,1}) + \sum_{i=1}^{k-1} {\rho_n}^{\frac{k-i}{k-1}} a_i(z_n + \rho_n\zeta_{n,1}) f_n^i(z_n + \rho_n\zeta_{n,1}) \\
&- a(z_n + \rho_n\zeta_{n,1}) f_n^k(z_n + \rho_n\zeta_{n,1}) - b(z_n + \rho_n\zeta_{n,1}) = 0
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&f_n'(z_n + \rho_n\zeta_{n,2}) + \sum_{i=1}^{k-1} {\rho_n}^{\frac{k-i}{k-1}} a_i(z_n + \rho_n\zeta_{n,2}) f_n^i(z_n + \rho_n\zeta_{n,2}) \\
&- a(z_n + \rho_n\zeta_{n,2}) f_n^k(z_n + \rho_n\zeta_{n,2}) - b(z_n + \rho_n\zeta_{n,2}) = 0
\end{aligned}
$$

又因为 $f_n'(z) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(z) f_n^i(z) - a(z) f_n^k(z) - b(z)$ 至多有1个零点, 则 $z_n + \rho_n\zeta_{n,1} = z_n + \rho_n\zeta_{n,2}$，

得

$$\zeta_{n,1} = \zeta_{n,2} = \frac{z_0 - z_n}{\rho_n}$$

这与 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ 矛盾. 因此, 断言成立.

由引理 5, 函数 $g'(\zeta) - a(z_0)g^k(\zeta)$ 至少有 2 个零点, 与断言矛盾. 因此, $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

3. 定理1的证明

证明 由引理 8, 我们只需要证明 $\mathcal{F}$ 在 $a(z)$ 的零点处正规. 不妨设 $D = \Delta$, 并且 $a(z) = z^m\varphi(z), z \in \Delta$, 其中 $m \geq 1, \varphi(0) = 1$, 且在 $0 < |z| < 1$ 内 $a(z) \neq 0$.

由于当 $a(z) = 0$时，$f(z) \neq \infty$ 并且 $f'(z) + a_1(z)f(z) - a(z)f^k(z) - b(z)$ 在区域 $\triangle$ 内至多有 1 个零点, 则 $\frac{f'(z)}{a(z)f^k(z)} + \frac{a_1(z)f(z)}{a(z)f^k(z)} - \frac{b(z)}{a(z)f^k(z)} - 1$ 在区域 $\triangle$ 内至多有 1 个零点.

令

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ g_n | g_n(z) = \frac{1}{a(z)f_n^{k-1}(z)} \right\},$$

g_n 的所有零点重级均 $k-1$. 0 是 g_n 的至少 m 重极点, 其余极点至少是 $k-1$ 重.

假设 $\mathcal{F}_1$ 在 $z = 0$ 处不正规. 由引理 1 知, 存在 $g_n \in \mathcal{F}_1, z_n \to 0, \rho_n \to 0^+$, 使得

$$G_n(\zeta) = \frac{g_n(z_n + \rho_n\zeta)}{\rho_n}$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $G(\zeta)$. $G_n(\zeta)$ 所有的零点和极点至少是 $k-1$ 重, 0 是 $G_n(\zeta)$ 的至少 m 重极点. 以下分两种情况讨论.

情形 1 $\frac{z_n}{\rho_n} \to \infty$.

$$\begin{aligned}
G_n'(\zeta) &= \left[\frac{1}{\rho_n a(z_n + \rho_n\zeta)f_n^{k-1}(z_n + \rho_n\zeta)}\right]' \\
&= (1-k)\frac{f_n'(z_n + \rho_n\zeta)}{a(z_n + \rho_n\zeta)f_n^k(z_n + \rho_n\zeta)} - \frac{a'(z_n + \rho_n\zeta)}{a^2(z_n + \rho_n\zeta)f_n^{k-1}(z_n + \rho_n\zeta)} \\
&= (1-k)\left[\frac{f_n'(z_n + \rho_n\zeta)}{a(z_n + \rho_n\zeta)f_n^k(z_n + \rho_n\zeta)} + \frac{a_1(z_n + \rho_n\zeta)f_n(z_n + \rho_n\zeta)}{a(z_n + \rho_n\zeta)f_n^k(z_n + \rho_n\zeta)} - \frac{b(z_n + \rho_n\zeta)}{a(z_n + \rho_n\zeta)f_n^k(z_n + \rho_n\zeta)}\right] \\
&+ (1-k)\left[\frac{b(z_n + \rho_n\zeta)}{a(z_n + \rho_n\zeta)f_n^k(z_n + \rho_n\zeta)} - \frac{a_1(z_n + \rho_n\zeta)f_n(z_n + \rho_n\zeta)}{a(z_n + \rho_n\zeta)f_n^k(z_n + \rho_n\zeta)}\right] \\
&- \frac{a'(z_n + \rho_n\zeta)}{a^2(z_n + \rho_n\zeta)f_n^{k-1}(z_n + \rho_n\zeta)}.
\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}
I_1 &= (1-k)\frac{b(z_n + \rho_n\zeta)}{a(z_n + \rho_n\zeta)f_n^k(z_n + \rho_n\zeta)}, \\
I_2 &= (1-k)\frac{a_1(z_n + \rho_n\zeta)f_n(z_n + \rho_n\zeta)}{a(z_n + \rho_n\zeta)f_n^k(z_n + \rho_n\zeta)}, \\
I_3 &= \frac{a'(z_n + \rho_n\zeta)}{a^2(z_n + \rho_n\zeta)f_n^{k-1}(z_n + \rho_n\zeta)}.
\end{aligned}$$

注意到

$$
\begin{aligned}
I_1^{k-1} &= a(z_n+\rho_n\zeta)[(1-k)b(z_n+\rho_n\zeta)]^{k-1}[\rho_n G_n(\zeta)]^k \Rightarrow 0,\\
I_2 &= (1-k)\rho_n a_1(z_n+\rho_n\zeta)G_n(\zeta) \Rightarrow 0,\\
I_3 &= \frac{m(z_n+\rho_n\zeta)^{m-1}\varphi(z_n+\rho_n\zeta)+(z_n+\rho_n\zeta)^m\varphi'(z_n+\rho_n\zeta)}{(z_n+\rho_n\zeta)^m\varphi(z_n+\rho_n\zeta)}G_n(\zeta)\rho_n\\
&= \frac{m\rho_n}{z_n+\rho_n\zeta}G_n(\zeta)+\frac{\rho_n\varphi'(z_n+\rho_n\zeta)}{\varphi(z_n+\rho_n\zeta)}G_n(\zeta) \Rightarrow 0.
\end{aligned}
$$

从而

$$
G_n'(\zeta)-(1-k) \overset{\mathcal{X}}{\Rightarrow} G'(\zeta)-(1-k)
$$

如果 $G'(\zeta)\equiv 1-k(\neq 0)$，则 $G(\zeta)=(1-k)\zeta+C$，C 是常数. 因此, $G(\zeta)$ 是一次多项式, 这与 $G(\zeta)$ 的所有零点至少 $k-1$ 重矛盾.

因此, $G'(\zeta)\not\equiv 1-k$. 类似引理 8 的证明, 我们可以得到 $G'(\zeta)-(1-k)$ 至多有 1 个零点. 由引理 3，$G(\zeta)$ 是一个有理函数. 但这与引理 4 矛盾.

情形 2 $\frac{z_n}{\rho_n}\to\alpha\neq\infty$. 则令

$$
\Phi_n(\zeta)=\frac{1}{\rho_n^{1+m}f_n^{k-1}(\rho_n\zeta)}=\zeta^m\varphi(\rho_n\zeta)\frac{g_n(z_n+\rho_n(\zeta-\frac{z_n}{\rho_n}))}{\rho_n},
$$

有

$$
\Phi_n(\zeta) \overset{\mathcal{X}}{\Rightarrow} \zeta^m G(\zeta-\alpha)=\Phi(\zeta)
$$

在复平面去掉 $G(\zeta-\alpha)$ 的极点处外按照球面距离一致成立. 因为 $\Phi_n(\zeta)$ 所有的零点和极点至少是 $k-1$ 重, $\Phi_n(\zeta)$ 在 $\zeta=0$ 处有至少 m 重极点, 因此, $\Phi(0)\neq 0$.

$$
\begin{aligned}
\Phi_n'(\zeta) &= \left[\frac{f_n^{1-k}(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{1+m}}\right]'\\
&= (1-k)\frac{f_n'(\rho_n\zeta)}{\rho_n^m f_n^k(\rho_n\zeta)}\\
&= (1-k)\zeta^m\varphi(\rho_n\zeta)\left[\frac{f_n'(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)}+\frac{a_1(\rho_n\zeta)f_n(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)}-\frac{b(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)}\right]\\
&+(1-k)\zeta^m\varphi(\rho_n\zeta)\left[\frac{b(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)}-\frac{a_1(\rho_n\zeta)f_n(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)}\right].
\end{aligned}
$$

记

$$
\begin{aligned}
I_4 &= (1-k)\zeta^m\varphi(\rho_n\zeta)\frac{b(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)},\\
I_5 &= (1-k)\zeta^m\varphi(\rho_n\zeta)\frac{a_1(\rho_n\zeta)f_n(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)}.
\end{aligned}
$$

其中

$$I_4^{k-1} = \left[(1-k)\zeta^m\varphi(\rho_n\zeta)\frac{b(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)}\right]^{k-1}$$
$$= a(\rho_n\zeta)[(1-k)\zeta^m\varphi(\rho_n\zeta)b(\rho_n\zeta)]^{k-1}\left[\rho_n G_n(\zeta-\frac{z_n}{\rho_n})\right]^k \Rightarrow 0,$$
$$I_5 = (1-k)\rho_n\zeta^m\varphi(\rho_n\zeta)a_1(\rho_n\zeta)G_n(\zeta-\frac{z_n}{\rho_n}) \Rightarrow 0.$$

所以

$$\begin{aligned}
&\Phi_n'(\zeta)-(1-k)\zeta^m\varphi(\rho_n\zeta)\\
&=(1-k)\zeta^m\varphi(\rho_n\zeta)\left[\frac{f_n'(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)}+\frac{a_1(\rho_n\zeta)f_n(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)}-\frac{b(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)}-1\right]\\
&+(1-k)\zeta^m\varphi(\rho_n\zeta)\left[\frac{b(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)}-\frac{a_1(\rho_n\zeta)f_n(\rho_n\zeta)}{a(\rho_n\zeta)f_n^k(\rho_n\zeta)}\right]\\
&\overset{\chi}{\Rightarrow}\Phi'(\zeta)-(1-k)\zeta^m.
\end{aligned}$$

因为 $\frac{f_n'(z)}{a(z)f_n^k(z)}+\frac{a_1(z)f_n(z)}{a(z)f_n^k(z)}-\frac{b(z)}{a(z)f_n^k(z)}-1$ 在 Δ 上至多有 1 个零点. 所以 $\Phi'(\zeta)-(1-k)\zeta^m$ 在 Δ 上至多有 1 个零点.

如果 $\Phi'(\zeta)\equiv(1-k)\zeta^m$, 则 $\Phi(\zeta)=\frac{1-k}{1+m}\zeta^{m+1}+C$, 其中 C 是一个常数. 因此, $\Phi(\zeta)$ 在 C 上至少有一个零点. 令 ζ_0 是 $\Phi(\zeta)$ 的一个零点, 则 ζ_0 至少 $k-1$ 重, 因此 $\Phi'(\zeta_0)=0$,得 $\zeta_0=0$. 所以 $\Phi(0)=0$ 与 $\Phi(0)\neq 0$ 矛盾.

因此, $\Phi'(\zeta)\not\equiv(1-k)\zeta^m$. 又因为 $\Phi'(\zeta)-(1-k)\zeta^m$ 在 Δ 上至多有 1 个零点. 接下来, 考虑 $\Phi'(\zeta)-(1-k)\zeta^m$ 在 Δ 上没有零点或有一个零点. 由引理 2 知, $\Phi(\zeta)$ 是有理函数.

情形 2.1 $\Phi'(\zeta)\neq(1-k)\zeta^m$. 这与引理 6 矛盾.

情形 2.2 $\Phi'(\zeta_0)=(1-k)\zeta_0^m$. 当 $\zeta\neq\zeta_0$ 时, 有 $\Phi'(\zeta)\neq(1-k)\zeta^m$, 其中 $\zeta_0\in C$.

情形 2.2.1 如果 $\Phi(\zeta_0)=0$. 由 $\Phi(\zeta)$ 的所有零点至少 $k-1$ 重, 则 $\Phi'(\zeta_0)=0$. 因此, $\zeta_0=0$, 与 $\Phi(0)\neq 0$ 矛盾.

情形 2.2.2 如果 $\Phi(\zeta_0)\neq 0$, 再分两种情况讨论.

情形 2.2.2.1 $\Phi(\zeta)\neq 0,\ \zeta\in C$. 对于 $\zeta\neq\zeta_0$, $\Phi'(\zeta)\neq(1-k)\zeta^m$, 其中 $\zeta_0\in C$. 由引理7知, $\Phi(\zeta)$ 是一个常数, 矛盾.

情形 2.2.2.2 $\Phi(\zeta)\doteq 0,\ \zeta\in C\backslash\{\zeta_0\}$, 对于 $\zeta\in C\backslash\{\zeta_0\}$, $\Phi'(\zeta)\neq(1-k)\zeta^m$, 与引理 6 矛盾.

因此, $\mathcal{F}_1$ 在 0 处正规. 下面我们将证明 $\mathcal{F}$ 在 0 处正规.

根据 $\mathcal{F}_1$ 在 0 处正规且 $g_n(0)=\infty$, 存在 $\delta>0$ 使得在 Δ_δ 内 $|g_n(z)|\geq 1$, 故 $|a(z)f_n^{k-1}(z)|\leq 1$, 因此, 在 Δ_δ 内 $f_n(z)\neq\infty$. 于是, $f_n(z)$ 在 Δ_δ 全纯. 选取 δ 足够小, 使得当 n 足够大时, 在 $|z|\leq\delta$ 内 $|a(z)|\geq\frac{|z|^m}{2}$. 我们有

$$|f_n(z)|=\left|\frac{1}{a(z)g_n(z)}\right|^{\frac{1}{k-1}}\leq\left(\frac{2^{m+1}}{\delta^m}\right)^{\frac{1}{k-1}},|z|=\frac{\delta}{2}$$

由最大模原理和 $Montel$ 正规定则知, 存在 $\mathcal{F}$ 的子列在 Δ_δ 内正规, 即 $\mathcal{F}$ 在 0 处正规.

基金项目

国家自然科学基金项目(12061077; 11961068); 新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2022D01A217).

参考文献

[1] Hayman, W.K. (1967) Research Problems of Function Theory. Athlone Press of University of London.

[2] Yang, J.H., Yang, Q. and Pang, X.C. (2019) A Normal Criterion Concerning Omitted Holomorphic Function. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **35**, 1972-1978. https://doi.org/10.1007/s10114-019-9058-1

[3] 杨锦华, 庞学诚. 涉及微分多项式的正规定则献给杨乐教授80华诞[J]. 中国科学: 数学, 2019, 49(10): 1439-1444.

[4] Sun, C. (2021) A Normal Criterion Concerning Zero Numbers. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series* 2, **72**, 515-523. https://doi.org/10.1007/s12215-021-00636-4

[5] Pang, X. and Zalcman, L. (2000) Normal Families and Shared Values. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **32**, 325-331. https://doi.org/10.1112/s002460939900644x

[6] Long, H. (1990) On Normal Criterion of Meromorphic Functions. *Science in China Series A—Mathematics, Physics, Astronomy & Technological Science*, **33**, 521-527. https://doi.org/10.1360/ya1990-33-5-521

[7] Zhang, G., Pang, X. and Zalcman, L. (2009) Normal Families and Omitted Functions II. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **41**, 63-71. https://doi.org/10.1112/blms/bdn103

[8] Fang, M.-L. (2001) Picard Values and Normality Criterion. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **38**, 379-387.

[9] Wang, Y. and Fang, M. (1998) Picard Values and Normal Families of Meromorphic Functions with Multiple Zeros. *Acta Mathematica Sinica*, **14**, 17-26. https://doi.org/10.1007/bf02563879

[10] Chang, J. (2010) Normality of Meromorphic Functions Whose Derivatives Have 1-Points. *Archiv der Mathematik*, **94**, 555-564. https://doi.org/10.1007/s00013-010-0125-1

[11] Deng, B., Qiu, H., Liu, D. and Fang, M. (2013) Hayman's Question on Normal Families Concerning Zero Numbers. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **59**, 616-630. https://doi.org/10.1080/17476933.2012.750307

[12] Pang, X., Yang, D. and Zalcman, L. (2003) Normal Families of Meromorphic Functions Whose Derivatives Omit a Function. *Computational Methods and Function Theory*, **2**, 257-265. https://doi.org/10.1007/bf03321020

[13] Chang, J. (2013) Normality of Meromorphic Functions and Uniformly Discrete Exceptional Sets. *Computational Methods and Function Theory*, **13**, 47-63.
https://doi.org/10.1007/s40315-012-0003-x