Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(7), 275-283
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.147293

一类单调递减正项数列的BOX维数估计

张 云，梁永顺*

南京理工大学数学与统计学院，江苏 南京

收稿日期：2024年6月11日；录用日期：2024年7月14日；发布日期：2024年7月31日

摘 要

当使用比较原则、柯西判别法在讨论正项级数敛散性时，会遇到比值极限为1从而无法使用的情况，典型的例子为数组$\{\frac{1}{n}\}$和$\{\frac{1}{n^2}\}$的正项级数具有不同的敛散性。本文讨论了形如$\frac{1}{n^\alpha}(\alpha > 0)$正项级数的敛散性与对应点集的BOX维数存在一定关联，当点集的BOX维数大于等于$\frac{1}{2}$时，正项级数发散；小于$\frac{1}{2}$时，正项级数收敛，同时提出了利用$\frac{1}{n}$为参照对象判断数列正项级数敛散性的一种新方法。

关键词

正项级数，BOX维数，敛散性

Box Dimension Estimation for a Class of Monotonically Decreasing Positive Sequence

Yun Zhang, Yongshun Liang*

School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu

Received: Jun. 11^{th}, 2024; accepted: Jul. 14^{th}, 2024; published: Jul. 31^{st}, 2024

* 通讯作者。

文章引用: 张云, 梁永顺. 一类单调递减正项数列的BOX维数估计[J]. 理论数学, 2024, 14(7): 275-283.
DOI: 10.12677/pm.2024.147293

Abstract

When using the comparison principle and cauchy discriminant method to discuss the convergence and divergence of positive series, we may encounter situations where the ratio limit is 1 and cannot be used. A typical example is that the positive series of arrays $\{\frac{1}{n}\}$ and $\{\frac{1}{n^2}\}$ have different convergence and divergence. This article discusses the convergence and divergence of positive series in the form of $\frac{1}{n^\alpha}(\alpha > 0)$, which is related to the BOX dimension of the corresponding point set. When the BOX dimension of the point set is greater than or equal to $\frac{1}{2}$, the positive series diverges; when it is less than $\frac{1}{2}$, the positive series converges, and a new method is proposed to determine the convergence and divergence of the positive series of a sequence using $\frac{1}{n}$ as the reference object.

Keywords

Positive Series, BOX Dimension, Convergence or Divergence

1. 引言

定义1.1 [1]对数列$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, n = 1, 2, \ldots$，若数列的每一个通项$u_n \geq 0$ 且$u_n \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$表示实数)，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为数组$\{u_n\}$的正项级数。正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充要条件是：它的部分和$\{S_n\}$有界，即存在某正数M，对一切正整数n有$S_n < M$，则称正项级数$\sum u_n$收敛，否则称正项级数$\sum u_n$发散。

判别满足定义1.1条件的数列$\{u_n\}$级数和的敛散性的常用方法包括比较原则、比式判别法和柯西判别法等 [1]，这些方法经常选定一个明确敛散性的其他数列作为参照对象，继而判定原先数列正项级数的敛散性。当使用比较原则、比式判别法和柯西判别法时，注意到对数列$\{u_n = \frac{1}{n}\}$和数列$\{u_n = \frac{1}{n^2}\}$来说，他们同时满足$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$和$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = 1$，但数列$\{\frac{1}{n}\}$的正项级数发散，$\{\frac{1}{n^2}\}$的正项级数收敛，此类数列的正项级数会出现不适用的情况。

分维反映了复杂形体占有空间的有效性，它是复杂形体不规则性的量度 [2, 3]，分形维数是度量具有自相似性、仿射自相似性不规则集几何复杂度的重要工具 [4–7]，近年来也成为了研

究复杂函数的重要工具 [8–12]，Besicovitch 和Ursell 最早开始对Weierstrass 函数图像分形维数进行了研究 [9]，梁永顺、Hyde 等分别对连续函数分数阶微积分、典型函数图像进行了维数估计 [10, 11]。Azcan、Kocak对正数数列进行了BOX维数估计 [12]，指出正数数列点集的BOX维数范围为[0, 1]，并给出了以下结果：数列$\{\frac{1}{\log(1+n)}\}$对应点集的BOX维数为1，数列$\{\frac{1}{n^\alpha}\}$当$\alpha > 0$时对应点集的BOX维数为$\frac{1}{1+\alpha}$，数列$\{r^n\}$当$0 < r < 1$ 时的BOX 维数为0。注意到，不同类型数列的BOX维数反映了对应数列的收敛速度，数列收敛速度越快，数列的BOX维数越接近于0；数列收敛速度越慢，数列的BOX维数越接近于1。本文以数列$\{\frac{1}{n^\alpha}\}$为例，探讨其BOX维数估计与正项级数的敛散性是否存在关联，以期为单调数列正项级数的敛散性判断提供新的研究思路。

2. 定义和符号

基本符号

为了便于讨论，我们选取形如$\{\frac{1}{n^\alpha}\}$数列并限制α的取值范围，让其正项级数敛散性具有讨论的意义。同时，我们在这里引入点集Γ的BOX 维数定义。

首先令$\mathbb{N}^+$表示正整数，$\mathbb{R}^n(n \in \mathbb{N}^+)$表示$n$维欧式空间，$\delta$表示实数$\mathbb{R}$上的一个左开右闭区间，$|U|$ 表示实数$\mathbb{R}$上关于0对称的一个闭区间，r表示$\mathbb{R}$中任意实数。

定义2.1 令数列u_n=$\{\frac{1}{n^\alpha}\}$，其中$n \in\mathbb{N}^+$，$\alpha \in\mathbb{R}$且$\alpha > 0$。

定义2.2 [8] 若Γ $(\neq\emptyset)$是n维欧式空间$\mathbb{R}^n$中任意子集，$N_\delta(\Gamma)$表示能够覆盖Γ直径最大的δ的最小集合数，Γ下BOX维数的定义如下：

$$\underline{dim}_B\Gamma = \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(\Gamma)}{-\log\delta},$$

相应地，Γ上BOX维数的定义为：

$$\overline{dim}_B\Gamma = \varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(\Gamma)}{-\log\delta}.$$

如果上、下BOX维数相等，则称其为Γ的BOX维数；

$$dim_B\Gamma = \lim_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(\Gamma)}{-\log\delta}.$$

对于$\mathbb{R}$上的任意子集来说，上、下BOX维数的取值范围如下：

$$0 \le \underline{dim}_B\Gamma \le \overline{dim}_B\Gamma \le 1.$$

若BOX维数存在，则：

$$0 \le \dim_B\Gamma \le 1.$$

讨论满足定义2.1的数列和对应点集的BOX维数时，注意到有以下结论：

(1) $u_n - u_{n+1} > u_{n+1} - u_{n+2}$；

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\{u_n\} = 0$;

(3) 数列$\{u_n\}$对应点集Γ的盒维数$dim_B\Gamma=\frac{1}{1+\alpha}$。

3. 主要结果

定理

引理3.1

对于满足定义2.1的数列$\{u_n\}$，有以下结论：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{(u_n-u_{n+1})\cdot n}=\frac{1}{\alpha}.$$

证明：根据定义2.1可知，

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_n-u_{n+1}}&=\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}}\\&=\frac{\frac{1}{n^\alpha}\cdot n^\alpha\cdot(n+1)^\alpha}{(n+1)^\alpha-n^\alpha}\\&=\frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^\alpha-n^\alpha}.\end{aligned}\tag{1}$$

由Lagrange中值定理，可知

$$\alpha\cdot n^\alpha\cdot\frac{1}{n+1}\le(n+1)^\alpha-n^\alpha\le\alpha\cdot(n+1)^\alpha\cdot\frac{1}{n},\tag{2}$$

根据公式(1)和公式(2)，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^\alpha}{\alpha\cdot(n+1)^\alpha\cdot\frac{1}{n}\cdot n}\le&\frac{u_n}{(u_n-u_{n+1})n}\le\frac{(n+1)^\alpha}{\alpha\cdot n^\alpha\cdot\frac{1}{n+1}\cdot n}\\\frac{1}{\alpha}\le&\frac{u_n}{(u_n-u_{n+1})n}\le\frac{1}{\alpha}\cdot(\frac{n+1}{n})^\alpha.\end{aligned}\tag{3}$$

公式(3)两边当$n\to+\infty$时，极限都为$\frac{1}{\alpha}$，根据介值性定理，可知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{(u_n-u_{n+1})\cdot n}=\frac{1}{\alpha}.$$

定理3.1 对于满足定义2.1的数列$\{u_n\}$，对应ΓBOX维数存在，且

$$dim_B\Gamma=\frac{1}{1-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\log u_n}{\log n}}.$$

证明：令$u_k-u_{k+1}\le\delta<u_k-u_{k-1}$，取$|U|\le\delta$，$U$一次至少能覆盖数列$\{u_n\}$的一个点，至少需要$k$ $(k\in\mathbb{N}^+)$个区间才能够完全覆盖$\{u_n\}$，即$N_\delta(\Gamma)\ge k$。根据以下BOX维数定义有：

$$\underline{dim}_B\Gamma = \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(\Gamma)}{-\log\delta} \geq \underline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{\log k}{\log\frac{1}{u_k - u_{k+1}}} = \underline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{\log k}{\log\frac{u_k}{(u_k - u_{k+1})\cdot u_k}},$$

由引理3.1可知，存在$N_1\in\mathbb{N}^+$，当$k>N_1$时，

$$\frac{u_n}{u_{n-}u_{n+1}} \leq (\frac{1}{\alpha}+1)\cdot k,$$

令$c=\frac{1}{\alpha}+1$，所以有：

$$\begin{aligned}
\underline{dim}_B\Gamma &\geq \underline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{\log k}{\log\frac{ck}{u_k}} \\
&= \underline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{\log k}{\log k+\log c-\log u_k} \\
&= \underline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{\log c}{\log k}-\frac{\log u_k}{\log k}} \\
&= \underline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{\log u_k}{\log k}} \\
&= \frac{1}{1-\underline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{\log u_k}{\log k}}.
\end{aligned}\tag{4}$$

同时，取$|U|\leq\delta$，覆盖$[0,u_k]$，需要$\frac{u_k}{u_k-u_{k+1}}$个区间，覆盖剩下的$k-1$个点，则需要另外$k-1$个区间，因此

$$N_\delta(\Gamma)\leq\frac{u_k}{u_k-u_{k+1}}+k-1$$

则上BOX维数

$$\begin{aligned}
\overline{dim}_B\Gamma = \overline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(\Gamma)}{-\log\delta} &\leq \overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{\log(\frac{u_k}{u_k-u_{k+1}}+k-1)}{\log\frac{1}{u_{k-1}-u_k}} \\
&= \overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{\log k\cdot(\frac{u_k}{(u_k-u_{k+1})\cdot k}+1-\frac{1}{k})}{\log\frac{1}{u_{k-1}-u_k}} \\
&= \overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{\log k}{\log\frac{1}{u_{k-1}-u_k}}+\overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{1}{\log\frac{1}{u_{k-1}-u_k}} \\
&= \overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{\log k}{\log\frac{1}{u_{k-1}-u_k}} \\
&= \overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{\log k}{\log\frac{1}{u_k-u_{k+1}}} \\
&= \frac{1}{1-\lim_{k\to+\infty}\frac{\log u_k}{\log k}}.
\end{aligned}\tag{5}$$

由公式(4)、公式(5)得到

$$\frac{1}{1-\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{\log u_k}{\log k}}\le \underline{dim}_B\Gamma\le\overline{dim}_B\Gamma\le\frac{1}{1-\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{\log u_k}{\log k}}.$$

根据定义2.2，对应点集的ΓBOX维数存在且为给定形式。

定理3.2 对于满足定义2.1的数列$\{u_n\}$，当$dim_B\Gamma<\frac{1}{2}$时，正项级数$\sum u_n$ 收敛，当$dim_B\Gamma\ge\frac{1}{2}$时，正项级数$\sum u_n$发散。

证明：由定理3.1可知，

$$dim_B\Gamma=\frac{1}{1-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\log u_n}{\log n}}=\frac{1}{1+\alpha}.$$

同时得到，

$$\alpha=\lim_{n\to+\infty}\frac{-u_n}{\log n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\log n^{-1}},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}}=(\frac{n}{n+1})^\alpha.$$

当$dim_B\Gamma<\frac{1}{2}$时，$\alpha>1$，根据实数完备性可知，存在一个$q\in\mathbb{R}$满足

$$0<\frac{n}{n+1}<q<1,$$

数列$\{u_n\}$中的每一项，都满足

$$u_n\le u_1\cdot qn-1(n>1).$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}q_n$收敛，根据比较原则，可知正项级数$\sum u_n$收敛。

若$dim_B\Gamma\ge\frac{1}{2}$，则$\alpha\le 1$，易知数列$\{u_n\}$ 中的每一项，都满足

$$u_n\ge\frac{1}{n},$$

由于正向级数$\sum\frac{1}{n}$发散，根据比较原则，可知正项级数$\sum u_n$发散。

由定理3.2可知，对于形如$\frac{1}{n^\alpha}$的正项级数，BOX维数估计直接体现了数列的收敛速度，并以$\frac{1}{2}$为界，BOX维数小于$\frac{1}{2}$ 时，正项级数收敛，反之发散。同时，可以留意到引理3.1的条件直接反映出数列的收敛速度，并与BOX维数的范围有一定关联，当$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{(a_{n-}a_{n+1})\cdot n}$等于1时，BOX维数为$\frac{1}{2}$，当$0<\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{(a_{n-}a_{n+1})\cdot n}<1$时，BOX 维数小于$\frac{1}{2}$，当$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{(a_{n-}a_{n+1})\cdot n}>1$，BOX维数大于$\frac{1}{2}$，考虑利用引理3.1的判别条件作为单调递减正向数列正项级数敛散性的一种新方式。

定理3.3 对于任意单调递减正向数列$\{a_n\}$，若

$$0<\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{(a_{n-}a_{n+1})\cdot n}=r<1,$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，若

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{(a_{n-}a_{n+1})\cdot n}=r\ge 1,$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

证明：当条件为

$$0<\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{(a_{n-}a_{n+1})\cdot n}<1,$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})\cdot n=\frac{1}{r}>1.$$

结合极限定义，可知存在$N_2\in\mathbb{N}^+$，对任意$k\in\mathbb{N}^+>N_2$，满足

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1-\frac{1}{nr}. \tag{6}$$

令$1<p<\frac{1}{r}$，由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-(1-\frac{1}{n+1})^p}{\frac{1}{rn}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x))^p}{\frac{x}{r}}=pr<1$$

存在$N_3\in\mathbb{N}^+$，对任意$k\in\mathbb{N}^+>N_3$，满足

$$\frac{1}{rn}>1-(1-\frac{1}{n+1})^p.$$

结合(6)，可知

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}. \tag{7}$$

现将数列$\{a_n\}$分为前N_3项、N_3+1到n项两个子数列来考虑其和是否有界。先考虑N_3+1到n项，根据比式判别法结合(7)，可知存在一个正数$M\in\mathbb{R}$，使得

$$\sum_{n=N_3}^{\infty}a_n\leq M.$$

同时，对于数列$\{a_n\}$的前N_3项子列，令$A\in\mathbb{R}$且$A=\sum_{n=1}^{N_3}a_n$，可以得到

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}a_n\leq A+M.$$

由定义知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

当条件为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{(a_{n-}a_{n+1})\cdot n}\geq 1,$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})\cdot n=\frac{1}{r}\leq 1.$$

结合极限定义，可知存在正整数$N_4 \in \mathbb{N}^+$，对任意整数$k > N_4$，满足

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

于是有

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot a_2 \\ &> \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot a_2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot a_2 . \end{aligned}$$

由于正向级数$\sum \frac{1}{n}$发散，可知正项级数$\sum a_n$发散。

4. 结论

本文讨论了特定数列$\{\frac{1}{n^\alpha} | n \in \mathbb{N}^+, \alpha>0\}$的BOX维数估计，指出了数列正项级数敛散性同BOX 维数有一定关联，当BOX 维数大于等于$\frac{1}{2}$时，正项级数发散；小于$\frac{1}{2}$ 时，正项级数收敛。在此基础上提出选取$\frac{1}{n}$作为参考对象，探讨判断单调正向数列敛散性的新方法，作者注意到$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{(a_n - a_{n+1})\cdot n}$可以直接表现数列的收敛速度，对于$\{\frac{1}{n^\alpha} | n \in \mathbb{N}^+, \alpha>0\}$类型数列，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{(a_n - a_{n+1})\cdot n}$的值与BOX维数的大小有直接的对应关系，也证明了对于任意单调递减正向数列，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{(a_n - a_{n+1})\cdot n}$的值与正向级数敛散性具有同样的对应关系，可以直接用来判断数列正项级数敛散性，不过相比之下，BOX维数对于数列收敛速度的表现更为简单、便捷。

本文的研究对象是特定的，但研究所提出的新方法，能够推广到任意单调递减正向数列。下一步将继续研究对于一般形式的单调递减正向数列的BOX维数是否确定存在，数列正项级数敛散性同BOX维数是否有同样的关联。笔者猜测新方法中的敛散性判断条件与BOX维数具有对应关系，若BOX维数存在且小于$\frac{1}{2}$时，正项级数收敛，BOX维数大于$\frac{1}{2}$时，正项级数发散，BOX维数等于$\frac{1}{2}$时，则需要区分不同情况讨论，正项级数可能收敛，也可能发散。

基金项目

本论文得到国家自然科学基金(批准号12071218)的支持。

参考文献

[1] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析(第五版) [M]. 北京：高等教育出版社, 2023：6-20.

[2] Mandelbrot, B.B. (1982) The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman and Company.

[3] Mandelbrot, B.B. (2020) Fractals: Form, Chance and Dimension. Echo Point Books and Media.

[4] Allen, D., Edwards, H., Harper, S. and Olsen, L. (2016) Average Distances on Self-Similar Sets and Higher Order Average Distances of Self-Similar Measures. *Mathematische Zeitschrift*, **287**, 287-324. https://doi.org/10.1007/s00209-016-1826-3

[5] Jordan, T. and Rapaport, A. (2020) Dimension of Ergodic Measures Projected onto Self-Similar Sets with Overlaps. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **122**, 191-206. https://doi.org/10.1112/plms.12337

[6] Takahashi, Y. (2019) Sums of Two Self-Similar Cantor Sets. Journal of Mathematical Analysis and Applications, **477**, 613-626. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.051

[7] Gu, Y. and Miao, J.J. (2022) Dimensions of a Class of Self-Affine Moran Sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **513**, Article 126210. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126210

[8] Falconer, K. (2003). Fractal Geometry. Wiley. https://doi.org/10.1002/0470013850

[9] Besicovitch, A.S. and Ursell, H.D. (1937) Sets of Fractional Dimensions (V): On Dimensional Numbers of Some Continuous Curves. *Journal of the London Mathematical Society*, **1**, 18-25. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-12.45.18

[10] Liang, Y.S. (2017) Definition and Classification of One-Dimensional Continuous Functions with Unbounded Variation. *Fractals*, **25**, Article 1750048. https://doi.org/10.1142/s0218348x17500487

[11] Hyde, J., Laschos, V., Olsen, L., Petrykiewicz, I. and Shaw, A. (2012) On the Box Dimensions of Graphs of Typical Continuous Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **391**, 567-581. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.02.044

[12] Azcan, H. and Kocak, S. (1993) Fractal Dimensions of Some Sequences of Real Numbers. *Turkish Journal of Mathematics*, **17**, 298-304.