

# 基于随机波动下不同效用函数的集体最优投资问题研究

王孟园, 肖鸿民\*

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2023年12月28日; 录用日期: 2024年1月10日; 发布日期: 2024年2月26日

## 摘要

效用函数是养老基金管理过程中最直接最重要的影响因素之一。本文利用Heston提出的随机波动率模型模拟金融市场, 对基金代理人提供最低担保的混合养老金计划进行研究并给出最优投资策略问题, 以最大化终端财富过程的期望效用为目标函数。假设投资者对风险的偏好程度满足HARA效用函数的一般框架, 运用随机最优控制理论和静态鞅方法确定不同效用函数下的最优终端财富, 并结合伊藤积分给出了不同的最优投资策略的显式表达式。最后通过数值模拟说明在不同效用函数下的参数对最优财富的影响不同, 为决策者提供相应的参考。

## 关键词

最优投资, 效用函数, 鞅方法, 养老金

# Research on Collective Optimal Investment Problem with Different Utility Functions under Stochastic Volatility

Mengyuan Wang, Hongmin Xiao\*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 28<sup>th</sup>, 2023; accepted: Jan. 10<sup>th</sup>, 2024; published: Feb. 26<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Utility function is one of the most direct and important factors in the process of pension fund

\*通讯作者。

文章引用: 王孟园, 肖鸿民. 基于随机波动下不同效用函数的集体最优投资问题研究[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 504-519. DOI: 10.12677/pm.2024.142049

management. This paper uses the stochastic volatility model proposed by Heston to simulate the financial market, studies the hybrid pension plan with minimum guarantee provided by the fund agent, and presents the optimal investment strategy problem, taking maximizing the expected utility of the terminal wealth process as the objective function. Assuming that the degree of investor's preference for risk meets the general framework of HARA utility function, the stochastic optimal control theory and static martingale method are used to determine the optimal terminal wealth under different utility functions, and the explicit expressions of different optimal investment strategies are given by combining ITO integral. Finally, numerical simulation is used to illustrate the different effects of parameters under different utility functions on the optimal wealth, which provides the corresponding reference for decision makers.

## Keywords

Optimal Investment, Utility Function, Martingale Method, Pension

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

目前, 中国已进入深度老龄化社会。从第七次全国人口普查结果来看, 中国 60 岁及以上人口占比达 18.7%, 其中 65 岁及以上人口占比达到 13.5%, 人口老龄化进程不断加快。2021 年, 中共中央、国务院通过了《中共中央、国务院关于加强新时代老龄工作的意见》, 其中明确指出, 要健全养老服务体系, 完善多层次养老保障体系, 健全基本养老保险待遇调整机制, 大力发展职业年金, 促进和规范发展第三支柱养老保险。

养老产品是指人们在退休前将收入的一部分长期投资在养老金计划中, 用来实现养老金账户的积累, 在计划到期时可以获得一次性或者持续性的给付, 用以实现生活保障。目前最常见的 DB 型养老金计划和 DC 型养老金计划各有其特点, 主要差异在于给付金额确定方式, DB 型是在计划开始时就确定了给付金额, 这个金额通常是按照一定规则来决定的, 一般参考的是计划参与者的工作年限、工资水平以及缴费率等等。DC 型是根据在计划期间的缴费积累作为计划参与者的个人账户金额, 由计划参与者本人对账户金额进行投资规划和管理, 最终给付金额取决于个人账户的投资收益。可以看出 DB 型养老金计划全由计划者承担风险, DC 型养老金计划全由计划参与者承担风险, 目前具有 DB 和 DC 型特点的混合型养老金计划开始大量出现[1]。这种混合养老金计划有效地克服了两种计划的缺点, 其关键组成部分是通过提供最低限度的保证(低于纯 DB 计划)来提供安全, 同时, 让员工参与到金融市场的投资中, 相当于在计划者和计划参与者之间建立了一个风险共享机制。这样既能有机会获得投资收益, 又能获得最低保障, 给予计划参与者一个更好的选择。当参与成员委托基金经理进行集体投资时, 如何达到一个最优投资是本文的研究目标。

最优投资最初是采用动态规划将原始随机优化控制问题转化为一个偏微分方程, 即 HJB 方程。Zhang 等[2]考虑了固定缴款养老金计划在积累阶段的最佳资产配置问题, 结合工资因素, 在有限的时间范围内最小化二次损失函数, 通过 HJB 方程得到闭式最优投资策略; 柴忠芃等[3]针对具有保费退还条款的 DC 型养老金个人账户最优投资策略进行研究, 在均值-方差目标下, 建立 HJB 方程, 利用博弈论, 最优控制等方法, 得到时间一致的最优投资策略和最优值函数。陈佳辰等[4]对带有死亡返还和意外返还条款的 DC 型养老金进行了研究。He 等[5]研究了 DC 养老金计划积累期的最优投资策略。在积累阶段, 养老金

成员贡献预定数额的货币作为溢价, 养老金计划的管理层将溢价投资于股票和债券, 以增加积累的价值, 文献[6]研究了在单一管理费计划和具有较低管理费以及额外业绩费的混合计划下, DC 养老基金经理的最佳风险承担政策。Dong 等[7]研究了在损失规避和最低保障条件下, 通过两种 DC 养老金管理报酬方案对经理进行报酬时, DC 养老金经理的投资组合问题。Cox 和 Huang (1989) 基于等价鞅测度和鞅表示定理, 由一个等价的静态规划取代动态规划来解决问题, 即鞅方法。通过这种方法可以得到不同效用函数下最优投资问题的显示解。李仲飞等[8]研究基于生命周期理论, 探讨了在退休养老规划方案定制过程中目标日期基金投资模式的合理性和可行性, 在 Merton 金融市场下, 利用鞅方法, 求解出解析解。常浩等[9]考虑通胀风险下基于 HARA 效用函数的 DC 型养老金计划, 以最大化终端期望效用为目标, 运用随机最优控制理论和 Legendre 变换方法得到了最优投资策略的显式表达式。Wang 等[10]研究了连续时间框架下考虑代际之间风险分担的集体混合型养老金计划, 利用随机最优控制方法, 分别研究了二次损失函数和指数损失函数下养老金的最优控制问题。Deelstra 等[11]在假设市场是完备的情况下, 使用鞅方法推出了随机贡献率和最小保证金情形下的最优投资策略, 文献[12]中研究了在终端财富必须大于最低保障的前提下, 在终端财富水平的效用最大化的情形下得出了养老金的最优投资策略。Chen 等[13]在集体管理的养老基金中, 在恒定波动和随机波动的金融市场环境下, 利用静态鞅的方法在幂效用函数下考虑了池投资者的最优集体投资问题。Andreas 等[14]在 Black-Scholes 金融市场框架和双曲绝对对风险厌恶(HARA)效用函数的情况下, 计算了最佳消费和投资政策。黄多多等[15]通过鞅方法研究了在完备市场下的 HARA 效用函数的最优终端财富及投资策略。

综合以上有关养老金计划最优投资问题的研究文献, 本文将双曲型绝对厌恶效用函数的几种转变形式表达出来, 在随机波动的金融市场环境下, 针对集体管理的养老基金池, 采用静态鞅的方法考虑了不同效用函数下投资者的最优集体投资问题, 求解出不同的最优终端财富水平和动态交易策略。相较于文献[13], 本文有两个创新点: 1) 探讨了在应用更加广泛的 HARA 效用函数下的最优投资策略。较之文献[13]中的 CRRA 效用函数, HARA 效用函数可以转变为绝对风险厌恶函数和相对风险厌恶函数, 包含了各种风险偏好的情况; 2) 本文给出了在平方效用、指数效用、幂效用、对数效用等具体情况下的最优投资策略和最优值函数的显式表达式, 对在指定效用下的投资问题提供了具体的指导。

## 2. 集体效用函数构建

首先假设每个人都要求有最低担保作为保证才有兴趣去投资, 且其效用函数都建立在超过最低担保的财富上, 在此基础上模拟个人偏好。用  $G^i (i=1, \dots, n)$  表示第  $i$  个投资者的生存水平, 也就是投资者  $i$  从现在开始有兴趣去投资的最低保证。结合上述, 我们可以知道这里的每个投资者得到的效用都是来自于最终总财富和担保之间的差值。

对于一个公司或者更多投资者, 我们设有  $n$  个投资者委托一个基金经理代表他们共同投资, 他们的总初始财富  $x = \sum_{i=1}^n x_i$ 。此外, 假定基金经理不收取任何额外费用, 因此总财富  $x$  将完全投资于金融资产。基金经理的主要目标是提供个人担保, 我们用  $G$  代表在  $T$  时刻, 基金经理需要满足的集体担保值, 即  $G = \sum_{i=1}^n G^i$ 。本文中包含了没有担保的情况, 因为所有单独的担保总是可以设置为零, 此刻的混合养老金计划也可以表示为单独的确定性缴付养老金计划。

在经济学中, 考虑到人们对理财投资的惰性, 故提出了效用函数。效用函数的主要目的是在不确定性的情况下, 帮助消费者做出最优的决策。Hara 效用函数, 这类效用函数又称之为双曲型绝对厌恶效用函数, 是直接由它们的风险厌恶的度量  $A(x) = \frac{1}{d+x/\gamma}$  定义。Hara 效用函数的特殊在于, 它可以转化成几种常见的效用函数: 令  $d = \infty$ , 得到  $U(x) = x$ , 此时的效用函数称为线性效用函数(又称风险中性效用函数), 且

$A(x)=0$ , 是一个常数绝对风险厌恶; 若  $\gamma=-1$ ;  $d=1/a$ ; 得到  $U(x)=x-\frac{1}{2}ax^2, a>0, x\in\left[0, \frac{1}{a}\right]$ , 此时效用函数为平方效用函数, 且  $A(x)=\frac{a}{1-ax}$ , 它随着累积财富的增加而增加; 令  $\gamma=\infty$ ;  $d=1/a$ ; 得到  $U(x)=-e^{-ax}, a>0$ , 此时效用函数为负指数效用函数, 且  $A(x)=a$ , 也是一个常数绝对风险厌恶; 当  $d=0, \gamma>0$  且  $\gamma\neq 1$ , 得到  $U(x)=\frac{1}{1-\gamma}x^{1-\gamma}$ , 其代表了幂效用函数, 此时  $A(x)=\frac{\gamma}{x}$ , 而相对风险厌恶系数  $R(x)=-x\frac{U''(x)}{U'(x)}=\gamma$ , 绝对风险厌恶系数随财富的增加而减少, 相对风险厌恶系数则为常数, 也是我们常

说的 CRRA 恒定相对风险厌恶; 令  $d=0, \gamma\rightarrow 1$ , 得到  $U(x)=\log(x)$ , 其代表了对数效用函数, 此时  $A(x)=\frac{1}{x}$ , 它随着累积财富的增加而减少。在此效果函数下, 基金经理人针对具有不同偏好的投资者可以采取不同的效用函数去提供适合他们的最有投资策略。对于存在最低担保的线性效用函数, 由于其不存在逆边际效用函数, 故在此只考虑常见的平方效用函数、指数效用函数、幂效用函数以及对数效用函数构建模型。

现假定基金经理使用以下集体效用函数, 因为这几种效用函数都依赖于集体和个人的担保, 故其可以写成如下形式:

$$U_{B,G}:(G,\infty)\rightarrow(0,\infty), v\mapsto U_{B,G}(v)=\max_{\substack{v_1\geq G^1, \dots, v_n\geq G^n \\ v=\sum_{i=1}^n v_i}} \sum_{i=1}^n \beta_i U_{i,G^i}(v_i), \quad (1)$$

其中  $B=(\beta_1, \dots, \beta_n)$  是和为 1 的正数组成的向量, 其控制着个体投资者在集体投资问题中的权重。其中  $U_{B,G}$  是一个效用函数, 其逆边际效用为:

$$I_{B,G}(\cdot):=(U'_{B,G})^{-1}(\cdot)=\sum_{i=1}^n I_{i,G^i}\left(\frac{\cdot}{\beta_i}\right). \quad (2)$$

且它包含了对于所有个人担保为零的情况。

### 3. 随机波动率下最优投资模型

#### 3.1. 随机波动率模型

经典的 Black-Scholes 模型假设金融市场是恒定波动的情况, 这种假设结果较好但是无法反映现实的金融市场。Heston 模型是一种随机波动率模型, 最早由 Heston 在 1993 年提出。在 Heston 模型中, 标的证券在风险中性测度下满足下面的随机微分方程。波动率(方差的平方根)不再被假定为常数, 而是遵循一个随机(CIR)过程, 波动率数值不会偏离长期均值太远。另外, 标的与波动率变化的相关性也能通过模型参数来刻画。这意味着 Heston 模型既能刻画波动率均值回复的特性, 又能表达金融资产的杠杆效应, 更深层次地考虑了资产价格与其波动性之间的关系。故本文将采用 Heston 提出的随机波动率模型来模拟更现实的金融市场。假设无风险资产  $B$  赚取恒定的利率  $r$ , 即

$$dB_t = rB_t dt, B_0 = 1, \quad (3)$$

进一步, 设  $\{W_t^{(1)}\}_{t\in[0,T]}$  和  $\{W_t^{(2)}\}_{t\in[0,T]}$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  中的两个独立布朗运动, 然后假设风险资产及其波动性遵循 Heston 模型:

$$dS_t = S_t \left( \mu_t dt + \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} \right), \quad (4)$$

$$dV_t = \kappa(\bar{V} - V_t) dt + \delta\sqrt{V_t} \left( \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{(2)} \right), \quad (5)$$

其中,  $\mu_t$  和  $\sqrt{V_t}$  分别代表的是风险资产的漂移和波动性,  $\rho \in (-1, 1)$  是相关系数,  $\bar{V} > 0$  是方差的长期均值,  $\kappa > 0$  是均值回归的速度,  $\delta > 0$  是方差的波动率, 且方差过程遵循平方根过程, 假设  $2\kappa\bar{V} \geq \delta^2$  和  $V_0 > 0$  去保证方差几乎在任何时候都是正的。完全负/正相关意味着方差风险可以通过标的资产交易完全对冲, 在这种情况下, 我们回到一个完整的市场设置, 这个问题的解决方案更类似于恒定波动的情况, 见文献[9]。

方差过程包含了风险来源, 且这个风险不是在市场上交易的, 也不能被对冲。因此, 基础金融市场是不完整的。故根据文献里常做的, 可以在金融市场上加入一种针对风险资产的衍生品来达到这个金融市场相对完整。我们首先假设:

$$\frac{\mu_t - r}{\sqrt{V_t}} = \eta_1 \sqrt{V_t},$$

并定义波动性风险溢价为  $\eta_2 \sqrt{V_t}$ , 当  $\eta_1$  和  $\eta_2$  为常数时。我们设置

$$\tilde{W}_t^{(i)} = W_t^{(i)} + \int_0^t \eta_i \sqrt{V_s} ds,$$

对于  $i = 1, 2$ 。根据 Girsanov 定理,  $\tilde{W}_t^{(1)}$  和  $\tilde{W}_t^{(2)}$  是概率测度  $\mathbb{P}^\eta$  下的独立布朗运动,  $\eta := (\eta_1, \eta_2)$ , 定义:

$$\xi_t := \frac{d\mathbb{P}^\eta}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left( -\int_0^t \eta_1 \sqrt{V_s} dW_s^{(1)} - \int_0^t \eta_2 \sqrt{V_s} dW_s^{(2)} - \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{2} \int_0^t V_s ds \right), \quad (6)$$

对于任意  $t \in [0, T]$ , 它是一种密度。在完全市场中, 状态价格密度过程由以下随机微分方程唯一确定:

$$d\xi_t = -\xi_t (rdt + \chi dW_t), \quad \xi_0 = 1, \quad \chi = \frac{\mu - r}{\sigma}. \quad (7)$$

$\xi_t$  表示为在  $t$  时刻的经济状态: 市场表现越好,  $\xi_t$  越低, 对于等效鞅测度  $\mathbb{P}^{(\eta)}$ , 过程

$$\xi_t^{(\eta)} = e^{-rt} \frac{d\mathbb{P}^{(\eta)}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{-rt} \xi_t, \quad t \in [0, T],$$

是相应的定价核或随机贴现过程。在完全市场中,  $\xi_t^{(\eta)}$  值与状态价格密度  $\xi_t$  有相似的解释:  $\xi_t^{(\eta)}$  值越低, 市场表现越好。下面我们将用  $\xi_t^{(\eta)}$  来表达最优财富和投资策略, 从而可以很容易地解释它们在随机波动市场状态下的表现。在这个市场中, 对于期限为  $T_1 \leq T$  的风险资产上的任何衍生品  $O$ ,  $t \leq T_1$  时刻的

无套利价格现在由  $O_t := \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_{T_1}^{(\eta)}}{\xi_t^{(\eta)}} O_{T_1} \Big| \mathcal{F}_t \right]$  给出。

现在设  $g$  是一个光滑函数, 使  $O_t = g(t, S_t, V_t)$  ( $\{S_t, V_t\}_{t \in [0, T]}$  是一个马尔可夫过程)。由于  $e^{-rt} O_t$  是  $\mathbb{P}^{(\eta)}$  下的鞅, 伊藤公式得到

$$dO_t = rO_t dt + g_S S_t \sqrt{V_t} d\tilde{W}_t^{(1)} + \delta g_V \sqrt{V_t} (\rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^{(2)}), \quad (8)$$

其中,  $g_S$  和  $g_V$  是  $g$  对风险资产和方差过程的一阶偏导数。  $\pi_t$  为投资于风险资产  $S$  的财富的比例,  $\phi_t$  表示投资于衍生品  $O$  的财富的比例。余数  $1 - \pi_t - \phi_t$  表示投资于无风险资产。设  $\{\pi_t, \phi_t\}_{t \in [0, T]}$  为自筹资金, 这就产生了集体财富过程  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  的以下动态:

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \left( rdt + \left( \pi_t + \phi_t \frac{g_S S_t + \delta \rho g_V}{O_t} \right) \sqrt{V_t} d\tilde{W}_t^{(1)} + \phi_t \frac{g_V \delta \sqrt{1 - \rho^2}}{O_t} \sqrt{V_t} d\tilde{W}_t^{(2)} \right) \\ &= X_t \left( rdt + \Theta_t^{(1)} \sqrt{V_t} d\tilde{W}_t^{(1)} + \Theta_t^{(2)} \sqrt{V_t} d\tilde{W}_t^{(2)} \right) \\ &= X_t \left( r + \eta_1 \Theta_t^{(1)} V_t + \eta_2 \Theta_t^{(2)} V_t \right) dt + \Theta_t^{(1)} \sqrt{V_t} d\tilde{W}_t^{(1)} + \Theta_t^{(2)} \sqrt{V_t} d\tilde{W}_t^{(2)} \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $X_0 = x$ ,  $\Theta_i^{(1)}$  为对冲需求,  $\Theta_i^{(2)}$  为投机需求, 对冲性需求反映了基金经理在风险资产中可对冲的头寸。投机性需求反映了基金经理的风险头寸, 这种头寸不能通过交易风险资产来对冲。在优化问题中, 对冲性需求和投机性需求将被明确地确定。

由于计算的复杂性, 我们先用一些符号代表一些公式, 如下所示:

$$\begin{aligned}\eta_+ &:= \rho\eta_1 + \sqrt{1-\rho^2}\eta_2, \\ \eta_- &:= \sqrt{1-\rho^2}\eta_1 - \rho\eta_2, \\ a_i &:= q_i\eta_+\delta^{-1}, \\ b_i &:= q_i\left(\eta_+\kappa\delta^{-1} + \frac{\eta_+^2}{2} + (1-q_i)\frac{\eta_-^2}{2}\right)\end{aligned}$$

假设:

$$\kappa^2 + q_i(2\eta_+\kappa\delta + \eta_+^2\delta^2 + \frac{1}{\gamma_i}\eta_-^2\delta^2) \geq 0, \quad i=1, \dots, n. \quad (10)$$

然后对于所有  $i=1$ , 它拥有

$$\begin{aligned}k_i^{(\eta)}(t) &:= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_T^{(\eta)}}{\xi_t^{(\eta)}}\right)^{q_i} \middle| \mathcal{F}_t\right] = e^{-rq_i(T-t) + \kappa\bar{V}q_i(T-t)}\Psi_i(T-t, a_i, b_i, V_t) \\ \Psi_i(T-t, a_i, b_i, V_t) &= \exp(-A_i(s) - V_t(B_i(s) - a_i)), \\ A_i(s) &= -\frac{2\kappa\bar{V}}{\delta^2} \ln\left(\frac{2\theta_i e^{\frac{(\theta_i + \kappa)s}{2}}}{\delta^2 a_i (e^{\theta_i s} - 1) + \theta_i (e^{\theta_i s} + 1) + \kappa (e^{\theta_i s} - 1)}\right), \\ B_i(s) &= \frac{a_i(\theta_i + \kappa + e^{\theta_i s}(\theta_i - \kappa)) + 2b_i(e^{\theta_i s} - 1)}{\delta^2 a_i (e^{\theta_i s} - 1) + \theta_i (e^{\theta_i s} + 1) + \kappa (e^{\theta_i s} - 1)}, \\ \theta_i &= \sqrt{\kappa^2 + 2b_i\delta^2}.\end{aligned}$$

### 3.2. 集体优化问题

基金经理人的职责就是要求在终端时刻达到一个最优的财富, 故以最大化终端期望效用函数为目标函数, 结合集体效用函数, 随机波动率下的集体优化问题可以表示为:

$$\max_{(\pi, \phi)_{t \in [0, T]}} \mathbb{E}[U_{B,G}(X_T)] \text{ 受限于式(9)}. \quad (11)$$

在随机波动的市场中, 针对于集体最优投资, 动态规划不允许我们实现价值函数和投资策略的显式解决方案, 传统的 HJB 方程求解价值函数无法操作。因此, 我们采用 Cox 和 Huang (1989) 提出的鞅方法来解决, 鞅方法的核心思想是通过构造一个等价的概率测度, 使得衍生品的价格在这个等价的概率测度下是一个鞅过程。而鞅过程简单的说就是随着时间的变化, 期望保持不变, 以这样的方式简化, 优化问题就会得到一个显式的解。此外, 通过额外添加对冲工具形成一个完备市场, 此时的优化问题为:

$$\max_{X_T} \mathbb{E}[U_{B,G}(X_T)] \text{ 受限于 } \mathbb{E}\left[\frac{\xi_T^{(\eta)}}{\xi_0^{(\eta)}} X_T\right] = x. \quad (12)$$

为了继续研究集体效用最大化问题, 我们需要检验下面两个式子的可积条件, 以确保优化问题等价

鞅的定义是明确的:

$$\mathbb{E}\left[\xi_T^{(\eta)} I_{B,G}(\lambda \xi_T^{(\eta)})\right] < \infty, \tag{13}$$

$$\mathbb{E}\left[U_{B,G}\left(I_{B,G}(\lambda \xi_T^{(\eta)})\right)\right] < \infty, \tag{14}$$

对于所有的  $\lambda > 0$ 。假设式(10)对于满足两个条件都是充分的: 对于第一个不等式(13), 这是显而易见的。为了验证第二个不等式, 我们用(1)来求得

$$\mathbb{E}\left[U_{B,G}\left(I_{B,G}(\lambda \xi_T^{(\eta)})\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \beta_i U_{i,G^i}\left(I_{i,G^i}\left(\frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)}\right)\right)\right]$$

这又导致式(14)。因此, 简单地说, 在 HJB 环境中需要的验证结果现在可以归结为鞅方法中的可积假设。

### 3.2.1. 平方效用函数下的投资策略

优化问题(11)的解可由拉格朗日方法得到, 不同的效用函数下有不同的解。结合平方效用函数, 我们可以观察到最优终端财富为:

$$X_T^* = I_{B,G}(\lambda \xi_T^{(\eta)}) = \sum_{i=1}^n I_{i,G^i}\left(\frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)}\right) = \sum_{i=1}^n G_i^i + \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \left(\frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)}\right),$$

其中  $\lambda$  由预算约束决定。

对于  $n=1$ , 将集体优化问题简化为个体优化问题(以初始财富为  $x_i > G^i e^{-r}$  的个体  $i$  为例), 此时优化问题表示为:

$$\max_{X_T^i} \mathbb{E}\left[U_{i,G^i}(X_T^i)\right] \text{ 受限于 } \mathbb{E}\left[\xi_T^{(\eta)} X_T^i\right] = x_i。$$

个体  $i$  的个体最优解为:

$$X_T^{(i,*)} = I_{i,G^i}(\lambda_i \xi_T^{(\eta)}),$$

其中  $\lambda_i$  可以由预算约束显式确定, 由不同的效用函数给出的预算约束不同, 在平方效用函数下  $\lambda_i$  的显式表达为:

$$\lambda_i = \frac{\mathbb{E}\left[\xi_T^{(\eta)}\right] - m(x_i - G_0^i)}{\mathbb{E}\left[\left(\xi_T^{(\eta)}\right)^2\right]},$$

结合所给符号公式, 我们现在可以明确地给出优化问题在平方效用函数下的最优策略, 如下:

命题 1 考虑优化问题。利用上述的符号,  $t \in [0, T)$  时刻的最优财富由

$$X_t^* = X_t^* \left(\xi_T^{(\eta)}, V_t\right) = \sum_{i=1}^n G_i^i + \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \left(\frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)}\right) k_i^{(\eta)}(t).$$

此时  $q_i = 2$ , 并给出了最优的对冲和投机需求

$$\Theta_t^{(1,*)} = \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_1 - \delta \rho H_i(T-t)}{m} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t),$$

$$\Theta_t^{(2,*)} = \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_2 - \delta \sqrt{1-\rho^2} H_i(T-t)}{\gamma_i} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t),$$

其中  $H_i(s) := B_i(s) - a_i$ 。特别地,  $t \in [0, T]$  时刻投资于衍生品和风险资产的财富的最优比例为

$$\phi_t^* = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_2 - \delta \sqrt{1 - \rho^2} H_i(T-t)}{\gamma_i} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t)}{\frac{g_V \delta \sqrt{1 - \rho^2}}{O_t} X_t^*},$$

$$\pi_t^* = \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_1 - \delta \rho H_i(T-t)}{m} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) - \phi_t^* \frac{g_S S_t + \delta \rho g_V}{O_t}.$$

证明: 利用上述引出的符号, 我们可以得到

$$X_t^* = \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_T^{(n)}}{\xi_t^{(n)}} I_{B,G} \left( \lambda \xi_T^{(n)} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_T^{(n)}}{\xi_t^{(n)}} \left( G_t^i + \frac{1 - \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right)}{m} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n G_t^i + \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t)$$

接下来, 我们计算投资于风险资产  $\pi_t^*$  和导数  $\phi_t^*$  的财富的最优比例。观察到

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial \xi_t^{(n)}} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \right) k_i^{(n)}(t)$$

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial V_t} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) H_i(T-t)$$

回想一下:

$$d\xi_t^{(n)} = -\xi_t^{(n)} \left( r dt + \eta_1 \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} + \eta_2 \sqrt{V_t} dW_t^{(2)} \right)$$

$$dV_t = \kappa (\bar{V} - V_t) dt + \delta \sqrt{V_t} \left( \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^{(2)} \right)$$

这将导致

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial \xi_t^{(n)}} d\xi_t^{(n)} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) \left( r dt + \eta_1 \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} + \eta_2 \sqrt{V_t} dW_t^{(2)} \right)$$

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial V_t} dV_t = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) H_i(T-t) \left( \kappa (\bar{V} - V_t) dt + \delta \sqrt{V_t} \left( \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^{(2)} \right) \right)$$

由此结合(9)可得

$$\Theta_t^{(1,*)} X_t^* \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_1 - \delta \rho H_i(T-t)}{m} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) \sqrt{V_t} dW_t^{(1)}$$

$$\Theta_t^{(2,*)} X_t^* \sqrt{V_t} dW_t^{(2)} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_2 - \delta \sqrt{1 - \rho^2} H_i(T-t)}{\gamma_i} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) \sqrt{V_t} dW_t^{(2)}$$

再根据(9)可以得到



$$\begin{aligned} \Theta_t^{(1)} X_t^* &= \left( \pi_t + \phi_t \frac{g_s S_t + \delta \rho g_v}{O_t} \right) X_t^* = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_1 - \delta \rho H_i(T-t)}{m} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) \\ \Leftrightarrow \pi_t &= \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_1 - \delta \rho H_i(T-t)}{m} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) - \phi_t \frac{g_s S_t + \delta \rho g_v}{O_t} \\ \Theta_t^{(2)} X_t^* &= \left( \phi_t \frac{g_v \delta \sqrt{1-\rho^2}}{O_t} \right) X_t^* = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_2 - \delta \sqrt{1-\rho^2} H_i(T-t)}{\gamma_i} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) \\ \Leftrightarrow \phi_t &= \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_2 - \delta \sqrt{1-\rho^2} H_i(T-t)}{\gamma_i} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t)}{\frac{g_v \delta \sqrt{1-\rho^2}}{O_t} X_t^*} \end{aligned}$$

### 3.2.2. 指数效用函数下的投资策略

结合指数效用函数, 我们可以观察到最优终端财富为:

$$X_T^* = I_{B,G} \left( \lambda \xi_T^{(n)} \right) = \sum_{i=1}^n I_{i,G^i} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(n)} \right) = \sum_{i=1}^n G_t^i - \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(n)} \right),$$

其中  $\lambda$  由预算约束决定。对于  $n=1$  时的  $\lambda_i$  则表示为:

$$\lambda_i = \frac{e^{-\frac{m(x_i - G_0^i)}{\mathbb{E}[\xi_T^{(n)}]}}}{\mathbb{E}[\xi_T^{(n)}]},$$

结合上述公式, 可以明确地给出优化问题在指数效用函数下的最优策略, 如命题 2:

命题 2 在指数效用函数下, 考虑优化问题。利用上述的符号,  $t \in [0, T]$  时刻的最优财富为

$$X_t^* = X_T^* \left( \xi_t^{(n)}, V_t \right) = \sum_{i=1}^n G_t^i - \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) + k_i^{(n)}(t) \log \left( k_i^{(n)}(t) \right).$$

此时  $q_i = 1$ , 并给出了最优的对冲和投机需求

$$\begin{aligned} \Theta_t^{(1,*)} &= \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_1}{m} k_i^{(n)}(t) - \delta \rho \left( \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) H_i(T-t) \right. \\ &\quad \left. + k_i^{(n)}(t) H_i(T-t) \log \left( k_i^{(n)}(t) + H_i(T-t) \right) \right), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \Theta_t^{(2,*)} &= \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_2}{m} k_i^{(n)}(t) - \delta \sqrt{1-\rho^2} \left( \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) H_i(T-t) \right. \\ &\quad \left. + k_i^{(n)}(t) H_i(T-t) \log \left( k_i^{(n)}(t) + H_i(T-t) \right) \right), \end{aligned} \tag{16}$$

其中  $H_i(s) := B_i(s) - a_i$ 。特别地,  $t \in [0, T]$  时刻投资于衍生品和风险资产的财富的最优比例由

$$\phi_t^* = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\eta_2}{m} k_i^{(n)}(t) - \delta \sqrt{1-\rho^2} \left( \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right) k_i^{(n)}(t) H_i(T-t) + k_i^{(n)}(t) H_i(T-t) \log \left( k_i^{(n)}(t) + H_i(T-t) \right) \right)}{X_t^* \frac{g_v \delta \sqrt{1-\rho^2}}{O_t}},$$

$$\begin{aligned} \pi_t^* &= \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{m} k_i^{(\eta)}(t) - \delta \rho \left( \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \right. \\ &\quad \left. + k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \log \left( k_i^{(\eta)}(t) + H_i(T-t) \right) - \phi_t^* \frac{g_S S_t + \delta \rho g_V}{O_t} \right). \end{aligned}$$

### 3.2.3. 幂效用函数下的投资策略

结合幂效用函数, 我们可以观察到最优终端财富为:

$$X_T^* = I_{B,G} \left( \lambda \xi_T^{(\eta)} \right) = \sum_{i=1}^n I_{i,G^i} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)} \right) = \sum_{i=1}^n G_t^i + \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}},$$

其中  $\lambda$  由预算约束决定。对于  $n=1$  时的  $\lambda_i$  则表示为:

$$\lambda_i = \left( \frac{x_i - G_0^i}{\mathbb{E} \left[ \left( \xi_T^{(\eta)} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma_i}} \right]} \right)^{-\gamma_i},$$

结合上述公式, 可以明确地给出优化问题在指数效用函数下的最优策略, 如命题 3:

命题 3 在幂效用函数下, 考虑优化问题。利用所给符号公式,  $t \in [0, T)$  时刻的最优财富为

$$X_T^* = X_t^* \left( \xi_T^{(\eta)}, V_t \right) = \sum_{i=1}^n G_t^i + \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t).$$

这里的  $q_i = 1 - \frac{1}{\gamma_i}$ , 给出了最优的对冲和投机需求

$$\Theta_i^{(1,*)} = \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_1}{\gamma_i} - \delta \rho H_i(T-t) \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t),$$

$$\Theta_t^{(2,*)} = \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_2}{\gamma_i} - \delta \sqrt{1 - \rho^2} H_i(T-t) \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t),$$

其中  $H_i(s) := B_i(s) - a_i$ 。特别地,  $t \in [0, T]$  时刻投资于衍生品和风险资产的财富的最优比例由

$$\phi_t^* = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_2}{\gamma_i} - \delta \sqrt{1 - \rho^2} H_i(T-t) \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t)}{X_t^* \frac{g_V \delta \sqrt{1 - \rho^2}}{O_t}},$$

$$\pi_t^* = \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_1}{\gamma_i} - \delta \rho H_i(T-t) \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t) - \phi_t^* \frac{g_S S_t + \delta \rho g_V}{O_t}.$$

### 3.2.4. 对数效用函数下的投资策略

结合幂效用函数, 我们可以观察到最优终端财富为:

$$X_T^* = I_{B,G} \left( \lambda \xi_T^{(\eta)} \right) = \sum_{i=1}^n I_{i,G^i} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)} \right) = \sum_{i=1}^n G_t^i + \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_T^{(\eta)} \right)^{-1},$$

其中  $\lambda$  由预算约束决定。对于  $n=1$  时的  $\lambda_i$  则表示为:

$$\lambda_i = \frac{1}{x_i - G_0^i},$$

结合上述公式, 可以明确地给出优化问题在指数效用函数下的最优策略, 如命题 4:

命题 4 在对数效用函数下, 考虑优化问题。利用上述的符号,  $t \in [0, T)$  时刻的最优财富

$$X_t^* = X_t^* (\xi_t^{(n)}, V_t) = \sum_{i=1}^n G_t^i + \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right)^{-1}.$$

这里的  $q_i = 0$ , 给出了最优的对冲和投机需求

$$\Theta_t^{(1,*)} = \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \eta_1 \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right)^{-1},$$

$$\Theta_t^{(2,*)} = \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \eta_2 \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right)^{-1},$$

其中  $H_i(s) := B_i(s) - a_i$ 。特别地,  $t \in [0, T)$  时刻投资于衍生品和风险资产的财富的最优比例由

$$\phi_t^* = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_2 \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right)^{-1}}{X_t^* \frac{g_V \delta \sqrt{1-\rho^2}}{O_t}},$$

$$\pi_t^* = \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \eta_1 \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(n)} \right)^{-1} - \phi_t^* \frac{g_S S_t + \delta \rho g_V}{O_t}.$$

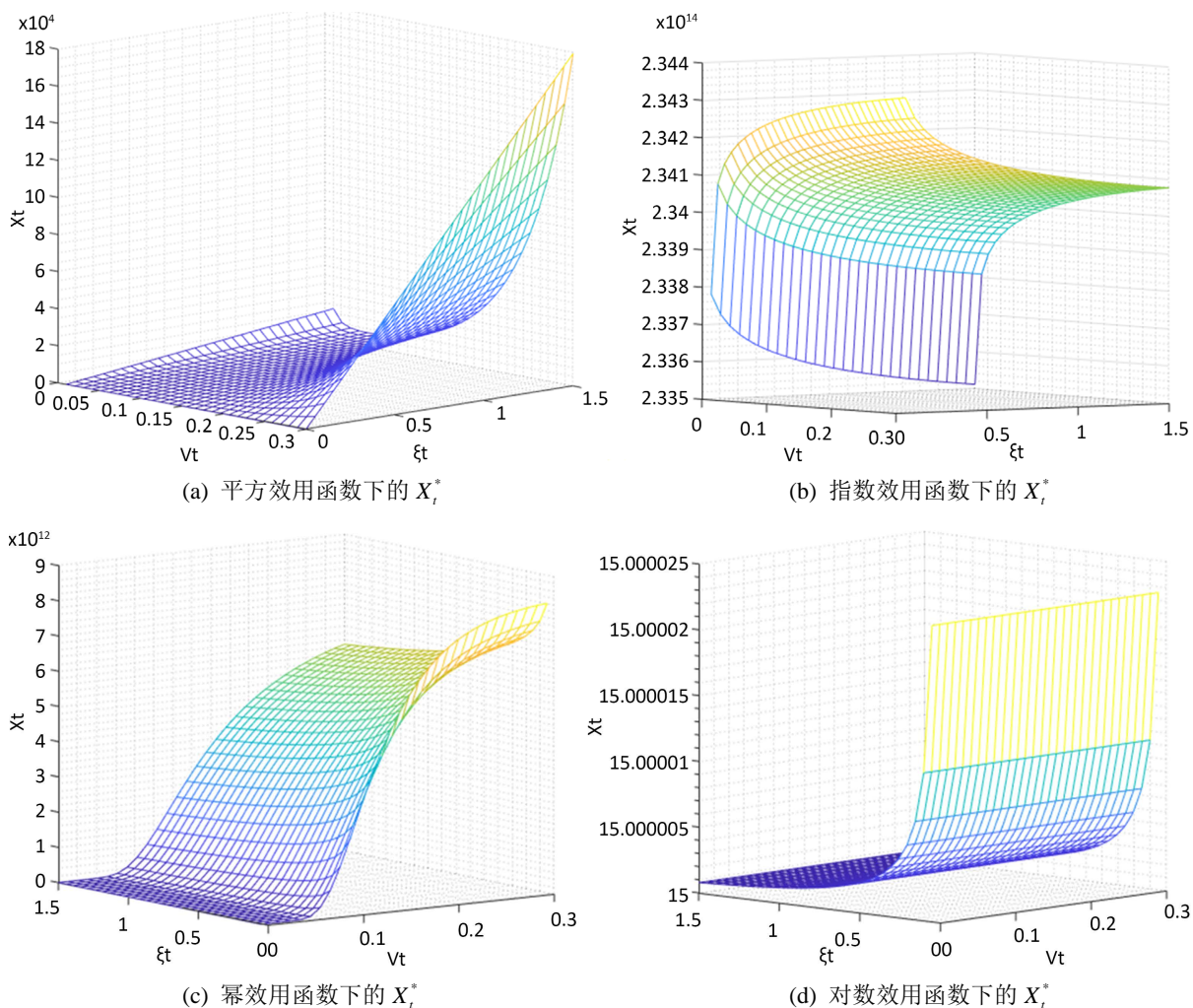
#### 4. 数值模拟

假设波动性参数为  $\bar{V} = 0.13^2$ 、 $V_0 = 0.13^2$ 、 $\kappa = 5$ 、 $\delta = 0.25$ , 风险溢价为  $\eta_1 = 4$ 、 $\eta_2 = -6$ , 相关系数设置为  $\rho = -0.4$ , 无风险利率  $r = 0.02$ , 池子容量  $n = 30$ , 到期日  $T = 1$ , 初始财富  $x_i = 1, i = 1, \dots, n$ , 担保  $G_i = 0.5$ , 权重  $\beta_i = \lambda_i^{-1} / \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1}$ , 平方效用函数下的绝对风险规避  $m = 0.8$ , 指数效用函数下的绝对风险规避为  $m = 100$ , 幂效用函数下的风险厌恶程度设置为  $\gamma_i = \frac{1}{2} + \frac{9.5(i-1)}{n-1}$ 。数值模拟得到在不同效用函数下最优终端财富随参数而变化的三维图。

从图 1(a)中可以看出在平方效用函数下, 最优终端财富随着  $V_t$  的变大而随之上升, 且最优终端财富随着  $\xi_t^{(n)}$  的增大也随之增大, 而  $\xi_t^{(n)}$  代表值越小, 市场表现越好, 可以理解为此时的投资策略为风险越大, 投资回报越高, 风险与机遇同存, 符合投资者偏好风险的特点, 基金经理人可以根据此类投资者的偏好采取大胆地投资。

从图 1(b)中可以看出在指数效用函数下, 最优终端财富在  $\xi_t^{(n)}$  减小的时候逐渐上升,  $V_t$  增加的时候随之上升, 此时的投资策略则显示为在市场表现良好时, 风险越大, 投资回报越好。投资者们表现出理性投资的状态, 在市场稳定的状态下追求高风险高回报。

从图 1(c)中可以看出在幂效用函数下, 终端财富水平呈现的变化和指数效用水平一致, 在  $\xi_t^{(n)}$  增加的时候逐渐下降,  $V_t$  增加的时候随之上升, 只是变化的幅度不一致, 说明两者的厌恶风险程度不一致, 可以看出相对于指数效用下, 投资者们表现出更加理性的投资状态, 在市场更为稳定的时候下追求高风险高回报。



**Figure 1.** Optimal terminal wealth at  $t = 1/2$  under different utility functions

**图 1.** 不同效用函数下  $t = 1/2$  时的最优终端财富

从图 1(d)中可以看出在对数效用函数下, 终端财富水平不受波动性的影响, 只和市场状态的变化紧密连接, 当市场状态表现不好时, 财富水平逐渐降低。此时的投资者偏好为一个固定的值, 故其不受波动性影响, 而市场状态影响整个投资环境, 故随之变化而变化。

结合上图可以发现不同的效用函数有着不同的最优终端财富水平和不同的投资策略。投资者的风险偏好决定了效用函数的选取, 从而影响了最优终端财富水平, 故针对效用函数的研究对于最大化终端财富具有深刻意义。

## 5. 结论

本文采用 Heston 模型模拟金融市场, 在 HARA 效用函数可以转换的几种形式, 如平方效用函数、指数效用函数、幂效用函数以及对数效用函数下, 对基金经理提供最低担保的养老基金池进行研究, 以最大化终端财富过程的期望效用为目标函数, 结合伊藤积分, 采用鞅方法得到不同效用函数下的最优投资策略的显式解。数值模拟发现在不同的效用函数下有着不同的最优终端财富水平和投资策略。投资者的风险偏好决定了效用函数的选取, 从而影响了最优终端财富水平。较之前期工作者更多的是研究在幂效用函数下的最优投资, 并没有针对各种偏好进行完整讨论, 本文在一定程度上帮助基金经理人针对不同

的效用偏好选择不同的投资策略, 更好地做出决策; 同时, 目前还没有将不同效用函数和混合养老金计划结合起来研究的, 因此本文对于集体养老金池的研究具有一定的参考价值。

## 基金项目

感谢国家自然科学基金资助项目(12061066); 甘肃省自然科学基金(20JR5RA528)给予资金的支持。

## 参考文献

- [1] 陈凯, 何银深. 混合型养老金产品的定价及风险分析[J]. 保险研究, 2011(12): 80-87.
- [2] Zhang, X.Y. and Guo, J.Y. (2020) Optimal Defined Contribution Pension Management with Salary and Risky Assets Following Jump Diffusion Processes. *East Asian Journal on Applied Mathematics*, **10**, 22-39. <https://doi.org/10.4208/eajam.301218.170419>
- [3] 柴忠茆, 荣喜民, 赵慧. 具有保费退还条款的 DC 养老金最优投资研究[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(7): 1688-1696.
- [4] 陈佳辰, 荣喜民, 赵慧. 带有死亡和意外返还条款的 DC 型养老金的最优投资问题[J]. 工程数学学报, 2020, 37(6): 651-663.
- [5] He, L. and Liang, Z.X. (2013) Optimal Investment Strategy for the DC Plan with the Return of Premiums Clauses in a Mean-Variance Framework. *Insurance: Mathematics and Economics*, **53**, 643-649. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.09.002>
- [6] He, L., Liang, Z.X., Liu, Y. and Ma, M. (2019) Optimal Control of DC Pension Plan Management under Two Incentive Schemes. *North American Actuarial Journal*, **23**, 120-141. <https://doi.org/10.1080/10920277.2018.1513371>
- [7] Dong, Y.H., Lv, W.X., Wei, S.Y. and Gong, Y.Y. (2020) Optimal Investment of DC Pension Plan under Incentive Schemes and Loss Aversion. *Mathematical Problems in Engineering*, **2020**, Article ID: 5145848. <https://doi.org/10.1155/2020/5145848>
- [8] 陈峥, 李仲飞. 目标日期基金应对养老金投资的有效性及其最优策略选择[J]. 系统工程理论与实践, 2022, 42(12): 3231-3246.
- [9] 常浩, 王春峰, 房振明. 通胀风险下基于 HARA 效用的 DC 型养老金计划[J]. 运筹学学报, 2016, 20(4): 39-51. <https://doi.org/10.15960/j.cnki.issn.1007-6093.2016.04.005>
- [10] Wang, S.X. and Lu, Y. (2019) Optimal Investment Strategies and Risk-Sharing Arrangements for a Hybrid Pension Plan. *Insurance: Mathematics and Economics*, **89**, 46-62. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2019.09.005>
- [11] Deelstra, G., Grasselli, M. and Koehl, P.F. (2004) Optimal Design of the Guarantee for Defined Contribution Funds. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **28**, 2239-2260. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2003.10.003>
- [12] Deelstra, G., Grasselli, M. and Koehl, P.F. (2003) Optimal Investment Strategies in the Presence of a Minimum Guarantee. *Insurance: Mathematics and Economics*, **33**, 189-207. [https://doi.org/10.1016/S0167-6687\(03\)00153-7](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(03)00153-7)
- [13] An, C., Nguyen, T. and Rach, M. (2021) A Collective Investment Problem in a Stochastic Volatility Environment: The Impact of Sharing Rules. *Annals of Operations Research*, **302**, 85-109. <https://doi.org/10.1007/s10479-021-03983-8>
- [14] Lichtenstern, A., Shevchenko, P.V. and Zagst, R. (2021) Optimal Life-Cycle Consumption and Investment Decisions under Age-Dependent Risk Preferences. *Mathematics and Financial Economics*, **15**, 275-313. <https://doi.org/10.1007/s11579-020-00276-9>
- [15] 黄冬冬, 陈传钟. 基于 HARA 效用函数最优投资问题的显示解[J]. 统计与决策, 2017(5): 81-84.

## 附录

命题 2 证明:

利用上述引出的符号, 我们可以得到

$$\begin{aligned} X_t^* &= \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_T^{(\eta)}}{\xi_t^{(\eta)}} I_{B,G} \left( \lambda \xi_T^{(\eta)} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_T^{(\eta)}}{\xi_t^{(\eta)}} \left( G_t^i - \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sum_{i=1}^n G_t^i - \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) + k_i^{(\eta)}(t) \log \left( k_i^{(\eta)}(t) \right) \end{aligned}$$

接下来, 我们计算投资于风险资产  $\pi_t^*$  和导数  $\phi_t^*$  的财富的最优比例。观察到

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_t^*}{\partial \xi_t^{(\eta)}} &= - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) \\ \frac{\partial X_t^*}{\partial V_t} &= - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) + k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \log \left( k_i^{(\eta)}(t) + H_i(T-t) \right) \end{aligned}$$

这将导致

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_t^*}{\partial \xi_t^{(\eta)}} d\xi_t^{(\eta)} &= - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) \left( rdt + \eta_1 \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} + \eta_2 \sqrt{V_t} dW_t^{(2)} \right) \\ \frac{\partial X_t^*}{\partial V_t} dV_t &= - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) + \left( k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \log \left( k_i^{(\eta)}(t) + H_i(T-t) \right) \right) \\ &\quad \times \left( \kappa (\bar{V} - V_t) dt + \delta \sqrt{V_t} \left( \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{(2)} \right) \right) \\ \Theta_t^{(1,*)} X_t^* \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} &= \sum_{i=1}^n \frac{\eta_1}{m} k_i^{(\eta)}(t) - \delta \rho \left( \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \right) \\ &\quad + k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \log \left( k_i^{(\eta)}(t) + H_i(T-t) \right) \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} \\ \Theta_t^{(2,*)} X_t^* \sqrt{V_t} dW_t^{(2)} &= \sum_{i=1}^n \frac{\eta_2}{m} k_i^{(\eta)}(t) - \delta \sqrt{1-\rho^2} \left( \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \right) \\ &\quad + k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \log \left( k_i^{(\eta)}(t) + H_i(T-t) \right) \sqrt{V_t} dW_t^{(2)} \end{aligned}$$

随之可得:

$$\begin{aligned} \Theta_t^{(1)} X_t^* &= \left( \pi_t + \phi_t \frac{g_S S_t + \delta \rho g_V}{O_t} \right) X_t^* \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\eta_1}{m} k_i^{(\eta)}(t) - \delta \rho \left( \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \right) \\ &\quad + k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \log \left( k_i^{(\eta)}(t) + H_i(T-t) \right) \\ \Leftrightarrow \pi_t &= \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_1}{m} k_i^{(\eta)}(t) - \delta \rho \left( \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \right) \\ &\quad + k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \log \left( k_i^{(\eta)}(t) + H_i(T-t) \right) - \phi_t^* \frac{g_S S_t + \delta \rho g_V}{O_t} \end{aligned}$$

$$\Theta_t^{(2)} X_t^* = \left( \phi_t \frac{g_v \delta \sqrt{1-\rho^2}}{O_t} \right) X_t^* = \sum_{i=1}^n \frac{\eta_2}{m} k_i^{(\eta)}(t) - \delta \sqrt{1-\rho^2} \left( \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \right. \\ \left. + k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \log(k_i^{(\eta)}(t) + H_i(T-t)) \right) \\ \Leftrightarrow \phi_t = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\eta_2}{m} k_i^{(\eta)}(t) - \delta \sqrt{1-\rho^2} \left( \frac{1}{m} \log \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) + k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \log(k_i^{(\eta)}(t) + H_i(T-t)) \right)}{X_t^* \frac{g_v \delta \sqrt{1-\rho^2}}{O_t}}$$

命题 3 证明:

利用上述引出的符号, 我们可以得到

$$X_t^* = \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_T^{(\eta)}}{\xi_t^{(\eta)}} I_{B,G} \left( \lambda \xi_T^{(\eta)} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_T^{(\eta)}}{\xi_t^{(\eta)}} \left( G_t^i + \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \sum_{i=1}^n G_t^i + \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t)$$

接下来, 我们计算投资于风险资产  $\pi_t^*$  和导数  $\phi_t^*$  的财富的最优比例。观察到

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial \xi_t^{(\eta)}} = - \sum_{i=1}^n - \frac{1}{\gamma_i} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}} \left( \xi_t^{(\eta)} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}-1} k_i^{(\eta)}(t)$$

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial V_t} = - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t)$$

这将导致

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial \xi_t^{(\eta)}} d\xi_t^{(\eta)} = - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t) \left( rdt + \eta_1 \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} + \eta_2 \sqrt{V_t} dW_t^{(2)} \right)$$

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial V_t} dV_t = - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \left( \kappa(\bar{V} - V_t) dt + \delta \sqrt{V_t} \left( \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{(2)} \right) \right)$$

$$\Theta_t^{(1,*)} X_t^* \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_1}{\gamma_i} - \delta \rho H_i(T-t) \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t) \sqrt{V_t} dW_t^{(1)}$$

$$\Theta_t^{(2,*)} X_t^* \sqrt{V_t} dW_t^{(2)} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_2}{\gamma_i} - \delta \sqrt{1-\rho^2} H_i(T-t) \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t) \sqrt{V_t} dW_t^{(2)}$$

随之可得:

$$\Theta_t^{(1)} X_t^* = \left( \pi_t + \phi_t \frac{g_S S_t + \delta \rho g_V}{O_t} \right) X_t^* = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_1}{\gamma_i} - \delta \rho H_i(T-t) \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t)$$

$$\Leftrightarrow \pi_t = \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_1}{\gamma_i} - \delta \rho H_i(T-t) \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t) - \phi_t^* \frac{g_S S_t + \delta \rho g_V}{O_t}$$

$$\Theta_t^{(2)} X_t^* = \left( \phi_t \frac{g_V \delta \sqrt{1-\rho^2}}{O_t} \right) X_t^* = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_2 - \delta \sqrt{1-\rho^2} H_i(T-t)}{\gamma_i} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t)$$

$$\Leftrightarrow \phi_t = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_2 - \delta \sqrt{1-\rho^2} H_i(T-t)}{\gamma_i} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}} k_i^{(\eta)}(t)}{X_t^* \frac{g_V \delta \sqrt{1-\rho^2}}{O_t}}$$

命题 4 证明:

利用上述引出的符号, 我们可以得到

$$X_t^* = \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_T^{(\eta)}}{\xi_t^{(\eta)}} I_{B,G} \left( \lambda \xi_T^{(\eta)} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_T^{(\eta)}}{\xi_t^{(\eta)}} \left( G_t^i + \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-1} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \sum_{i=1}^n G_t^i + \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-1}$$

接下来, 我们计算投资于风险资产  $\pi_t^*$  和导数  $\phi_t^*$  的财富的最优比例。观察到

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial \xi_t^{(\eta)}} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \right) \xi_t k_i^{(\eta)}(t)$$

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial V_t} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t \right) k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t)$$

这将导致

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial \xi_t^{(\eta)}} d\xi_t^{(\eta)} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t \right) k_i^{(\eta)}(t) \left( rdt + \eta_1 \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} + \eta_2 \sqrt{V_t} dW_t^{(2)} \right)$$

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial V_t} dV_t = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t \right) k_i^{(\eta)}(t) H_i(T-t) \left( \kappa (\bar{V} - V_t) dt + \delta \sqrt{V_t} \left( \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{(2)} \right) \right)$$

$$\Theta_t^{(1,*)} X_t^* \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_1 - \delta \rho H_i(T-t)}{m} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) \sqrt{V_t} dW_t^{(1)}$$

$$\Theta_t^{(2,*)} X_t^* \sqrt{V_t} dW_t^{(2)} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\eta_2 - \delta \sqrt{1-\rho^2} H_i(T-t)}{\gamma_i} \right) \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right) k_i^{(\eta)}(t) \sqrt{V_t} dW_t^{(2)}$$

随之可得:

$$\Theta_t^{(1)} X_t^* = \left( \pi_t + \phi_t \frac{g_S S_t + \delta \rho g_V}{O_t} \right) X_t^* = \sum_{i=1}^n \eta_1 \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \pi_t = \frac{1}{X_t^*} \sum_{i=1}^n \eta_1 \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-1} - \phi_t \frac{g_S S_t + \delta \rho g_V}{O_t}$$

$$\Theta_t^{(2)} X_t^* = \left( \phi_t \frac{g_V \delta \sqrt{1-\rho^2}}{O_t} \right) X_t^* = \sum_{i=1}^n \eta_2 \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-1} \Leftrightarrow \phi_t = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_2 \left( \frac{\lambda}{\beta_i} \xi_t^{(\eta)} \right)^{-1}}{X_t^* \frac{g_V \delta \sqrt{1-\rho^2}}{O_t}}$$