Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 549-556
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142053

Hans汉斯

一类p-群的非交换图的谱性质

吴　杨，朱清江

重庆理工大学理学院，重庆

收稿日期：2023年12月30日；录用日期：2024年1月11日；发布日期：2024年2月28日

摘　要

有限非交换群的非交换图是一类简单无向图，它以群的非中心元为顶点，两顶点相邻接当且仅当它们的乘积不可交换。本文研究了p^3阶群的非交换图的相关谱性质，包括邻接谱、拉普拉斯谱，拟拉普拉斯谱以及正规拉普拉斯谱等。

关键词

有限群，非交换图，图的谱，邻接谱，(拟、正规)拉普拉斯谱

The Properties of Spectrum of Non-Commuting Graphs of a Class of p-Groups

Yang Wu, Qingjiang Zhu

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Dec. 30th, 2023; accepted: Jan. 11th, 2024; published: Feb. 28th, 2024

Abstract

Non-commuting graphs of finite non-abelian groups are a class of simple undirected graphs that take the non-central elements of the group as vertices, and two vertices are adjacent if and only if their product is non commutative. This paper investigates the spectral properties of non-commuting graphs of groups of order p^3, including adjacency spectra, Laplace spectra, quasi-Laplace spectra, and normal-Laplace spectra.

Keywords

Finite Groups, Non-Commuting Graph, The Spectrum of a Graph, Adjacency Spectrum, (Quasi-, Normal-) Laplace Spectrum

文章引用：吴杨，朱清江．一类 p-群的非交换图的谱性质[J]．理论数学, 2024, 14(2): 549-556.
DOI: 10.12677/pm.2024.142053

1. 引言

近几十年，有关群上的图及其代数结构的相互关系方面研究产生了很多有趣的结果，该课题也引起了人们的极大关注。人们可以有很多种方式将一个群和图相关联，本文考虑有限群的非交换图。设 G 是一个有限非交换群，G 的非交换图 $\Gamma(G)$ 是一个简单无向图，它以 $G-Z(G)$ 中的元素为顶点集，这里 $Z(G)$ 是 G 的中心，对任意两个顶点 x,y 相邻当且仅当 xs 和 y 作为群 G 中的元素满足 $xy \neq yx$。这个概念是由匈牙利数学家 Paul Erdös 在 1975 年首次引入的。此后，该领域的研究人员对该课题进行了广泛研究，见[1] [2] [3]等。

在图的相关谱理论中，特征向量、特征值和拉普拉斯矩阵等有着举足轻重的地位。有限群的图谱理论也是研究非交换图的有力工具，它通过利用图的邻接矩阵，拉普拉斯矩阵等的特征向量和特征值来研究非交换图的性质和结构，这些特征向量和特征值与非交换图的结构和性质密切相关。谱图理论在许多领域都有应用，包括计算机科学、物理学、化学、生物科学、社会科学等。是近年备受关注的理论，在[4] [5] [6] [7]中利用上述定义的非交换图，计算在不同的有限非交换群下的各类谱。

本文主要对一类非交换 p-群，即 p^3 阶群的非交换图进行研究，得到不同结构的 p^3 阶群的所有非交换图是一致的，近一步计算了该图的邻接谱、拉普拉斯谱以及拟拉普拉斯谱的参数等。

2. 预备知识

首先介绍本文涉及到的一些符号，参考[8]-[13]。

定义 1 [8]设 Γ 是一个图，Γ 的顶点集 $V(\Gamma)$ 中的两个元素 u 和 v 相邻，记为 $u \sim v$，所有与顶点 v 相邻的顶点的总数称为 v 的度数，记为 d_v。图 Γ 的邻接矩阵记为 $A(\Gamma)=(a_{ij})$，其中如果 $v_i \sim v_j$，则 $a_{ij}=1$，如果 v_i 和 v_j 不邻接，则 $a_{ij}=0$。图 Γ 的度矩阵记为 $D(\Gamma)=(d_{ij})$，其中如果 $v_i \sim v_j$，$d_{ij}=1$；否则 $d_{ij}=0$。

定义 2 [9]设 G 是一个非交换群，记非交换图为 $\Gamma(G)$，令 $Z(G)$ 是群 G 的中心，取 $G \setminus Z(G)$ 中的元素为图的顶点集，即 $V(\Gamma(G))=G \setminus Z(G)$，对任意两顶点 $x,y \in V(\Gamma(G))$，若 $x \sim y$ 当且仅当 x 和 y 作为群 G 中的元素满足 $xy \neq yx$

定义 3 [10]设图 Γ 的邻接矩阵为 $A(\Gamma)$，度矩阵为 $D(\Gamma)$，称 $L(\Gamma)=A(\Gamma)-D(\Gamma)$ 为图 Γ 的拉普拉斯矩阵；称 $Q(\Gamma)=A(\Gamma)+D(\Gamma)$ 为拟拉普拉斯矩阵，称 $\mathcal{L}(\Gamma)=(\mathcal{L}_{ij})$ 为正规拉普拉斯矩阵，其中如果 $i=j$ 且 $d_{v_i} \neq 0$，则 $\mathcal{L}_{ij}=1$；如果 $v_i v_j \in E(\Gamma)$，则 $\mathcal{L}_{ij}=-(d_{v_i} d_{v_j})^{-1/2}$，其它情况 $\mathcal{L}_{ij}=0$。

定义 4 [10]设 B 为 n 阶对称矩阵，$\det(\lambda I-B)$ 为 B 的特征多项式，$\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 是其特征值，B 的谱是指其所有不同的特征值以及它们（作为特征多项式的根）的重数，将 B 的谱记为

$$SpecB=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m_1(\lambda_1) & m_2(\lambda_2) & \cdots & m_n(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

这里 $m_i(\lambda_i)$ 表示 λ_i 的重数；称 $\max\{|\lambda_i|, i=1,\cdots,n\}$ 为 B 的谱半径。

一个图 Γ 的邻接谱(拉普拉斯谱、拟拉普拉斯谱、正规拉普拉斯矩阵)即为其对应的邻接矩阵 $A(\Gamma)$ ($L(\Gamma)$、$Q(\Gamma)$、$\mathcal{L}(\Gamma)$)的谱，将邻接谱中最大的特征值称作该图的指标，记作 r。

定理 2.1 [10]设 r 是图 G 的指标，λ_k 是图 G 邻接矩阵的特征值，图 G 是 r-正则图当且仅当 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=r$。

引理 2.2 令 J_n 是一个全部元素都 1 为 $n\times n$ 的矩阵，则 $\det(\lambda I-kJ_n)=\lambda^{n-1}(\lambda-nk)$。

引理 2.3 [11]阶为 p^3 的非交换群有以下两种：

$$G_1=\left\langle a,b\mid a^{p^2}=1,b^p=1,bab^{-1}=a^{p+1}\right\rangle,$$

$$G_2=\left\langle a,b,c\mid a^p=b^p=c^p=1,a^{-1}b^{-1}ab=c,ac=ca,bc=cb\right\rangle。$$

特别地，当 $p=2$ 时，阶为 p^3 的非交换群只有以下两种：二面体群 D_8 和四元数群 Q_8。

引理 2.4 根据非交换图的定义可以将 $\Gamma(G_1)$ 中的顶点集可以记为以下形式：$V(\Gamma(G_1))=\bigcup_{i=0}^{p}U_i$，其中：$U_0=\left\{1,a,\cdots,a^{p^2-1}\right\}-\left\{1,\cdots,a^{kp},\cdots,a^{(p-1)p}\right\}$，$1\le k\le p-1$，$U_i=\left\{a^ib,\cdots,a^{m_ip+in_i}b^{n_i},\cdots,a^{(p-1)p+(p-1)i}b^{p-1}\right\}$，$1\le i\le p$，$0\le m_i\le p-1$，$1\le n_i\le p-1$，。并且对 U_i 与 U_j，若 $i\ne j$，U_i 与 U_j 中任意元素都不可交换，反之，都可交换。

证明：由于 $G_1=\left\langle a,b\mid a^{p^2}=1,b^p=1,bab^{-1}=a^{1+p}\right\rangle$，易知，$G_1$ 的任意元素可以写成如下形式：a^mb^n，$0\le m\le p^2-1$，$0\le n\le p-1$。

如果两个元素 a^mb^n 和 $a^{m'}b^{n'}$ 两个元素可交换，那么就有 $a^mb^na^{m'}b^{n'}=a^{m'}b^{n'}a^mb^n$，所以将两侧都写成上述形式，有 $a^{m+m'(p+1)^n}b^{n+n'}=a^{m'+m(p+1)^{n'}}b^{n+n'}$，化简可得 $a^{nm'p}=a^{mn'p}$，所以 $nm'-mn'\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$，由此式可知群 G_1 的中心 $Z(G_1)=\left\{1,a^p,\cdots,a^{kp},\cdots,a^{(p-1)p}\right\}$。下证 $\bigcup_{i=0}^{p}U_i=G_1-Z(G_1)$，由于 $\bigcup_{i=0}^{p}U_i\subseteq G_1-Z(G_1)$，只需证对任意 $U_i\cap U_j=\varnothing$，$i\ne j$，对 $i=0$ 时，这个结果是显然的，而对 $i\ne 0$ 且 $j\ne 0$，存在 $a^{m_ip+in_i}b^{n_i}=a^{m_jp+jn_j}b^{n_j}$ 即 $n_i=n_j$，$(m_i-m_j)p+(i-j)n_i\equiv 0(\mathrm{mod}\ p^2)$，由于 $(m_i-m_j)p$ 和 $0(\mathrm{mod}\ p^2)$ 能被 p 整除，所以 $(i-j)n_i$ 被 p 整除，所以 $i=j$，矛盾。由此可知两集合中的元素个数是一样的，即 $\left|\bigcup_{i=0}^{p}U_i\right|=|G_1-Z(G_1)|=p(p^2-1)$，所以 $\bigcup_{i=0}^{p}U_i=G_1-Z(G_1)$。然后证明对任意 $x,y\in U_i$，有 $xy=yx$ 成立，当 $i=0$ 时，结果是显然成立的，现考虑 $i\ne 0$，令 $x=a^{m_ip+in_i}b^{n_i}\in U_i$，$y=a^{h_ip+ik_i}b^{k_i}\in U_i$，由于 $(m_ip+in_i)k_i-(h_ip+ik_i)n_i=(m_ik_i-h_in_i)p\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ 所以交换，最后证明对任意 $x\in U_i$，$y\in U_j$，$i\ne j$，$xy\ne yx$，当 $j=0$ 时，令 $x=a^{m_ip+in_i}b^{n_i}$，$y=a^m$，则有 $p\nmid mn_j$，所以 x,y 不交换，而当 $i\ne 0$ 和 $j\ne 0$ 时，令 $x=a^{m_ip+in_i}b^{n_i}$，$y=a^{h_jp+jk_j}b^{k_j}$，由于 $(m_ip+in_i)k_j-(h_jp+jk_j)n_i=(m_ik_j-h_jn_i)p+(i-j)k_jn_i$ 显然 $(i-j)k_jn_i$ 不被 p 整除，所以 x,y 不交换。

引理 2.5 根据非交换图的定义可以将 $\Gamma(G_2)$ 中的顶点集可以记为以下形式：$V(\Gamma(G_2))=\bigcup_{i=0}^{p}U_i$，其中 $U_0=\left\{1,\cdots,a^mc^k,\cdots,a^{p-1}c^{p-1}\right\}-\left\{1,\cdots,c^k,\cdots,c^{p-1}\right\}$，$U_i=\left\{ba^i,\cdots,b^{n_i}a^{in_i}c^{k_i},\cdots,b^{p-1}a^{i(p-1)}c^{p-1}\right\}$，$1\le i\le p$，$1\le n_i\le p-1$，$0\le k_i\le p-1$。并且对 U_i 与 U_j，若 $i\ne j$，U_i 与 U_j 中任意元素都不可交换，反之，都可交换。

证明：容易判断 G_2 中的任意元素都可以写成如下形式：$b^na^mc^k$，$0\le n,m,k\le p-1$。如果两个元素 $b^na^mc^k$ 和 $b^{n'}a^{m'}c^{k'}$ 可交换，类似地，得到 $nm'-mn'\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$，由此可知群 G_2 的中心 $Z(G_2)=\left\{1,c,\cdots,c^{p-1}\right\}$。下证 $\bigcup_{i=0}^{p}U_i=G_2-Z(G_2)$，由于 $\bigcup_{i=0}^{p}U_i\subseteq G_2-Z(G_2)$，只需证明对任意 $U_i\cap U_j=\varnothing$，$i\ne j$，对 $i=0$ 时，这个结果是显然的，而对 $i\ne 0$ 且 $j\ne 0$，有 $b^{n_i}a^{in_i}c^{k_i}=b^{n_j}a^{jn_j}c^{k_j}$ 得 $(i-j)n_in_j\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$，所以 $i=j$，矛盾。由此可以得到 $\bigcup_{i=0}^{p}U_i=G_2-Z(G_2)$，并且顶点个数为

$$\left|\bigcup_{i=0}^{p}U_i\right|=|G_2-Z(G_2)|=p(p^2-1)$$

然后证明对任意 $x,y\in U_i$，有 $xy=yx$ 成立，当 $i=0$ 时，结果显然成立，当 $i\neq 0$ 时，令

$$x=b^{n_i}a^{in_i}c^{k_i},y=b^{h_i}a^{ih_i}c^{w_i}$$

由于 $i(n_ih_i-h_in_i)\equiv 0(\bmod p)$，所以 x,y 是可交换的，最后证明对任意 $x\in U_i$，$y\in U_j$，$i\neq j$，$xy\neq yx$，当 $j=0$ 时，令 $x=b^{n_i}a^{in_i}c^{k_i}$，$y=a^mc^k$，则有 $p\nmid mn_i$，所以不交换，当 $i\neq 0$ 且 $j\neq 0$ 时，令 $x=b^{n_i}a^{in_i}c^{k_i}$，$y=b^{h_j}a^{jh_j}c^{w_i}$，由于 $p\nmid(i-j)n_ih_i$，所以 x,y 不交换。

3. 阶为 p^3 的非交换群的非交换图的谱

由引理 2.4 和引理 2.5 可知 G_1 和 G_2 的非交换图是同构的，所以只需求 G_1 的谱。

定理 3.1 设 $G_1=\langle a,b\rangle$，其中 $a^{p^2}=1$；$b^p=1$；$b^{-1}ab=a^{1+p}$；p 为奇素数，则非交换图 $\Gamma(G_1)$ 的邻接谱为

$$Spec_A\Gamma(G_1)=\begin{pmatrix}0 & -p(p-1) & p^2(p-1)\\ p^3-2p-1 & p & 1\end{pmatrix}。$$

证明：由引理 2.4 和有限群的非交换图的定义，图的顶点集为 $V(\Gamma(G_1))=\bigcup_{i=0}^{p}U_i$。在同一个集合 U_i 内的两元素是可交换的，而在不同集合 U_i 和 U_j 的两元素是不可交换的，因此只有在不同的 U_i 内的两顶点是相交的，从而，这个图的相邻矩阵是 $A(\Gamma(G_1))$ 是一个 $p(p^2-1)$ 阶方阵，具体形式如下：

$$A(\Gamma(G_1))=\begin{pmatrix}O_{p(p-1)} & J_{p(p-1)} & \cdots & J_{p(p-1)}\\ J_{p(p-1)} & O_{p(p-1)} & \cdots & J_{p(p-1)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ J_{p(p-1)} & J_{p(p-1)} & \cdots & O_{p(p-1)}\end{pmatrix},$$

其中 $O_{p(p-1)}$ 是 $p(p-1)$ 阶零矩阵，$J_{p(p-1)}$ 是一个所有元素都为 1 的 $p(p-1)$ 阶方阵。所以该邻接矩阵的特征多项式为

$$\det(\lambda I-A(\Gamma(G_1)))=\begin{vmatrix}\lambda I_{p(p-1)} & -J_{p(p-1)} & \cdots & -J_{p(p-1)}\\ -J_{p(p-1)} & \lambda I_{p(p-1)} & \cdots & -J_{p(p-1)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -J_{p(p-1)} & -J_{p(p-1)} & \cdots & \lambda I_{p(p-1)}\end{vmatrix},$$

利用行列式的初等变换将上述的行列式变换成如下行列式：

$$\begin{vmatrix}\lambda I_{p(p-1)}+J_{p(p-1)} & \cdots & O_{p(p-1)} & O_{p(p-1)}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ O_{p(p-1)} & \cdots & \lambda I_{p(p-1)}+J_{p(p-1)} & O_{p(p-1)}\\ -J_{p(p-1)} & \cdots & -pJ_{p(p-1)} & \lambda I_{p(p-1)}-pJ_{p(p-1)}\end{vmatrix}=\left|\lambda I_{p(p-1)}-pJ_{p(p-1)}\right|\cdot\left|\lambda I_{p(p-1)}+J_{p(p-1)}\right|^p。$$

又由引理 2.2 可知上述的行列式为 $\lambda^{p^3-2p-1}(\lambda+p(p-1))^p(\lambda-p^2(p-1))$。

所以非交换图 $\Gamma(G_1)$ 的邻接谱为

$$Spec_A\Gamma(G_1)=\begin{pmatrix}0 & -p(p-1) & p^2(p-1)\\ p^3-2p-1 & p & 1\end{pmatrix}。$$

定理 3.2 非交换图 $\Gamma(G_1)$ 的拉普拉斯谱为

$$Spec_L(\Gamma(G_1))=\begin{pmatrix}0 & p^3-p^2 & p^3-p\\ 1 & p^3-2p-1 & p\end{pmatrix}。$$

证明：由定理 3.1 的证明，可知$\Gamma(G_1)$的度矩阵是如下的$p\left(p^2-1\right)$阶对角矩阵：

$$D\left(\Gamma\left(G_1\right)\right)=diag\left(p^2\left(p-1\right),\cdots,p^2\left(p-1\right)\right)。$$

所以这个非交换图的拉普拉斯矩阵为

$$L\left(\Gamma\left(G_1\right)\right)=\begin{pmatrix} p^2\left(p-1\right)I_{p(p-1)} & -J_{p(p-1)} & \cdots & -J_{p(p-1)} \\ -J_{p(p-1)} & p^2\left(p-1\right)I_{p(p-1)} & \cdots & -J_{p(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -J_{p(p-1)} & -J_{p(p-1)} & \cdots & p^2\left(p-1\right)I_{p(p-1)} \end{pmatrix},$$

其中$I_{p(p-1)}$是$p\left(p-1\right)$阶单位矩阵，$J_{p(p-1)}$是一个所有元素都为 1 的$p\left(p-1\right)$阶方阵。所以该矩阵的特征多项式为$\det\left(\lambda I-L\left(\Gamma\left(G_1\right)\right)\right)$，具体形式为：

$$\begin{vmatrix} \left(\lambda-p^2\left(p-1\right)\right)I_{p(p-1)} & J_{p(p-1)} & \cdots & J_{p(p-1)} \\ J_{p(p-1)} & \left(\lambda-p^2\left(p-1\right)\right)I_{p(p-1)} & \cdots & J_{p(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{p(p-1)} & J_{p(p-1)} & \cdots & \left(\lambda-p^2\left(p-1\right)\right)I_{p(p-1)} \end{vmatrix},$$

利用行列式的初等变换将上述的行列式变换成如下的下三角的行列式：

$$\begin{vmatrix} \lambda' I_{p(p-1)}-J_{p(p-1)} & \cdots & O_{p(p-1)} & O_{p(p-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_{p(p-1)} & \cdots & \lambda' I_{p(p-1)}-J_{p(p-1)} & O_{p(p-1)} \\ J_{p(p-1)} & \cdots & pJ_{p(p-1)} & \lambda' I_{p(p-1)}+pJ_{p(p-1)} \end{vmatrix}=\left|\lambda' I_{p(p-1)}+pJ_{p(p-1)}\right|\cdot\left|\lambda' I_{p(p-1)}-J_{p(p-1)}\right|^p$$

其中$\lambda'=\lambda-p^2\left(p-1\right)$，所以又由引理 2.2 可知上述的行列式为

$$\lambda\left(\lambda-\left(p^3-p^2\right)\right)^{p^3-2p-1}\left(\lambda-\left(p^3-p\right)\right)^p,$$

所以非交换图$\Gamma\left(G_1\right)$的拉普拉斯谱为

$$Spec_L\left(\Gamma\left(G_1\right)\right)=\begin{pmatrix} 0 & p^3-p^2 & p^3-p \\ 1 & p^3-2p-1 & p \end{pmatrix}。$$

定理 3.3 非交换图$\Gamma\left(G_1\right)$的拟拉普拉斯谱为

$$Spec_Q\left(\Gamma\left(G_1\right)\right)=\begin{pmatrix} p\left(p-1\right)^2 & p^2\left(p-1\right) & 2p^2\left(p-1\right) \\ p & p^3-2p-1 & 1 \end{pmatrix}。$$

证明：由定理 3.1 的证明，可知$\Gamma(G_1)$的度矩阵是如下的$p\left(p^2-1\right)$阶对角矩阵：

$$D\left(\Gamma\left(G_1\right)\right)=diag\left(p^2\left(p-1\right),\cdots,p^2\left(p-1\right)\right)。$$

所以这个非交换图的拟拉普拉斯矩阵为$Q\left(\Gamma\left(G_1\right)\right)=A\left(\Gamma\left(G_1\right)\right)+D\left(\Gamma\left(G_1\right)\right)$，具体形式如下：

$$\begin{pmatrix} p^2\left(p-1\right)I_{p(p-1)} & J_{p(p-1)} & \cdots & J_{p(p-1)} \\ J_{p(p-1)} & p^2\left(p-1\right)I_{p(p-1)} & \cdots & J_{p(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{p(p-1)} & J_{p(p-1)} & \cdots & p^2\left(p-1\right)I_{p(p-1)} \end{pmatrix},$$

其中 $I_{p(p-1)}$ 是 $p(p-1)$ 阶单位矩阵，$J_{p(p-1)}$ 是一个所有元素都为 1 的 $p(p-1)$ 阶方阵。所以该矩阵的特征多项式为 $\det\left(\lambda I-Q\left(\Gamma\left(G_1\right)\right)\right)$，具体形式为：

$$\begin{vmatrix} \left(\lambda-p^2(p-1)\right)I_{p(p-1)} & -J_{p(p-1)} & \cdots & -J_{p(p-1)} \\ -J_{p(p-1)} & \left(\lambda-p^2(p-1)\right)I_{p(p-1)} & \cdots & -J_{p(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -J_{p(p-1)} & -J_{p(p-1)} & \cdots & \left(\lambda-p^2(p-1)\right)I_{p(p-1)} \end{vmatrix},$$

利用行列式的初等变换将上述的行列式变换成如下的下三角的行列

$$\begin{vmatrix} \lambda' I_{p(p-1)}+J_{p(p-1)} & \cdots & O_{p(p-1)} & O_{p(p-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_{p(p-1)} & \cdots & \lambda' I_{p(p-1)}+J_{p(p-1)} & O_{p(p-1)} \\ -J_{p(p-1)} & \cdots & -pJ_{p(p-1)} & \lambda' I_{p(p-1)}-pJ_{p(p-1)} \end{vmatrix} = \left|\lambda' I_{p(p-1)}-pJ_{p(p-1)}\right| \cdot \left|\lambda' I_{p(p-1)}+J_{p(p-1)}\right|^p$$

其中 $\lambda'=\lambda-p^2(p-1)$，所以又由引理 2.2 可知上述的行列式为

$$\left(\lambda-2p^2(p-1)\right)\left(\lambda-p^2(p-1)\right)^{p^3-2p-1}\left(\lambda-p(p-1)^2\right)^p$$

所以非交换图 $\Gamma(G_1)$ 的拟拉普拉斯谱为

$$Spec_Q\left(\Gamma(G_1)\right)=\begin{pmatrix} p(p-1)^2 & p^2(p-1) & 2p^2(p-1) \\ p & p^3-2p-1 & 1 \end{pmatrix}。$$

定理 3.4 非交换图 $\Gamma(G_1)$ 的正规拉普拉斯谱为

$$Spec_{\mathcal{L}}\left(\Gamma(G_1)\right)=\begin{pmatrix} 0 & p^3-p^2 & p^3-p \\ 1 & p^3-2p-1 & p \end{pmatrix}。$$

证明：由定理 3.1 的证明，可知其是一个正则图。其度为 $q^2(q-1)$。

所以这个非交换图的正规拉普拉斯矩阵为 $\mathcal{L}(\Gamma)=\left(\mathcal{L}_{ij}\right)$ 其中如果 $i=j$ 且 $d_{v_i}\neq 0$；则 $\mathcal{L}_{ij}=1$；如果 $v_iv_j\in E(\Gamma)$；则 $\mathcal{L}_{ij}=-\left(p^2(p-1)\right)^{-1}$，其他情况 $\mathcal{L}_{ij}=0$，具体形式如下：

$$\begin{pmatrix} I_{p(p-1)} & kJ_{p(p-1)} & \cdots & kJ_{p(p-1)} \\ kJ_{p(p-1)} & I_{p(p-1)} & \cdots & kJ_{p(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kJ_{p(p-1)} & kJ_{p(p-1)} & \cdots & I_{p(p-1)} \end{pmatrix},$$

其中 $I_{p(p-1)}$ 是 $p(p-1)$ 阶单位矩阵，$J_{p(p-1)}$ 是一个所有元素都为 1 的 $p(p-1)$ 阶方阵，$k=-\left(p^2(p-1)\right)^{-1}$。所以该矩阵的特征多项式为 $\det\left(\lambda I-\mathcal{L}\left(\Gamma\left(G_1\right)\right)\right)$，具体形式为：

$$\begin{vmatrix} (\lambda-1)I_{p(p-1)} & -kJ_{p(p-1)} & \cdots & -kJ_{p(p-1)} \\ -kJ_{p(p-1)} & (\lambda-1)I_{p(p-1)} & \cdots & -kJ_{p(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -kJ_{p(p-1)} & -kJ_{p(p-1)} & \cdots & (\lambda-1)I_{p(p-1)} \end{vmatrix},$$

利用行列式的初等变换将上述的行列式变换成如下的下三角的行式

$$\begin{vmatrix} \lambda' I_{p(p-1)} + kJ_{p(p-1)} & \cdots & O_{p(p-1)} & O_{p(p-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_{p(p-1)} & \cdots & \lambda' I_{p(p-1)} + kJ_{p(p-1)} & O_{p(p-1)} \\ -kJ_{p(p-1)} & \cdots & -pkJ_{p(p-1)} & \lambda' I_{p(p-1)} - pkJ_{p(p-1)} \end{vmatrix} = \left|\lambda' I_{p(p-1)} + pkJ_{p(p-1)}\right| \cdot \left|\lambda' I_{p(p-1)} - kJ_{p(p-1)}\right|^{p}$$

其中 $\lambda' = \lambda - 1$，所以又由引理 2.2 可知上述的行列式为 $(\lambda-1)^{p^3-2p}(\lambda - 1/p)^{p}$。

所以非交换图 $\Gamma(G_1)$ 的正规拉普拉斯谱为

$$Spec_{\mathcal{L}}(\Gamma(G_1)) = \begin{pmatrix} 1/p & 1 \\ p & p^3-2p \end{pmatrix}。$$

推论 3.5 设 F 是一个非交换有限群，且群的阶 $|F| = |G_1| = p^3$，则非交换图满足 $\Gamma(G_1) \cong \Gamma(F)$ 同时 $spec_A \Gamma(G_1) = spec_A \Gamma(F)$。

定理 3.6 设 F 是一个非交换有限群，且群的非交换图的邻接谱 $spec_A \Gamma(F) = spec_A \Gamma(G_1)$，则对应的非交换图满足 $\Gamma(G_1) \cong \Gamma(F)$，$|G_1| = |F|$。

证明 我们知道图 $\Gamma(G_1)$ 的指标为 $r = p^2(p-1)$，由定理 3.1，我们知道

$$\frac{1}{p(p^2-1)}\left(p^3(p-1)^2 + p^4(p-1)^2\right) = r$$

所以通过定理 2.1，我们知道 $\Gamma(G_1)$ 是一个度为 r 的一个正则图，取任意一个非中心元素 $x \in F$，由于图的度为 $r = p^2(p-1)$，则除中心元素之外可与 x 交换的元素个数为 $p(p-1)$，故 $|C_F(x)| = p(p-1) + |Z(F)|$，又因为 $Z(F) < C_F(x) < F$，$|Z(F)|$ 只可能为 $1, p, p-1, p(p-1)$。同时顶点个数为 $|F| = p(p^2-1) + |Z(F)|$。

先考虑 p 为奇素数的情况：

当 $|Z(F)| = 1$ 时，$|F| = p^3 - p + 1$，$|C_F(x)| = p^2 - p + 1$，显然 $|C_F(x)|$ 不整除 $|F|$，与 $C_F(x)$ 是 F 的子群矛盾。当 $|Z(F)| = p-1$ 时，$|F| = p^3 - 1$，$|C_F(x)| = p^2 - 1$，显然 $|C_F(x)|$ 不整除 $|F|$，与 $C_F(x)$ 是 F 的子群矛盾。当 $|Z(F)| = p(p-1)$ 时，$|F| = p(p-1)(p+2)$，$|C_F(x)| = 2p(p-1)$，由于 p 为奇素数，显然 $|C_F(x)|$ 不整除 $|F|$，与 $C_F(x)$ 是 F 的子群矛盾。

所以 $|Z(F)| = p$，$|F| = p^3$

再考虑 $p = 2$ 的情况，该情形下 $|Z(F)|$ 只可能为 1，2。

由于当 $|Z(F)| = 1$ 时，$|F| = 7$，$|C_F(x)| = 3$，显然 $|C_F(x)|$ 不整除 $|F|$，与 $C_F(x)$ 是 F 的子群矛盾。

所以 $|Z(F)| = 2$，$|F| = 2^3$。

综上可知，$|F| = p^3$，再由推论 2.5 可 $\Gamma(G_1) \cong \Gamma(F)$。

基金项目

重庆市自然科学基金项目(CSTB2022NSCQ-MSX0831, cstc2021jcyj-msxmX0575)；重庆理工大学研究生教育高质量发展行动计划资助成果(gzljg2022319)；重庆理工大学自科基金培育项目(2022PYZ023)。

参考文献

[1] Lennox, J.C. and Wiegold, J. (1981) Extensions of a Problem of Paul Erdös on Groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **31**, 459-463. https://doi.org/10.1017/S1446788700024253

[2] Longobardi, P. (2001) On Locally Graded Groups with an Engel Condition on Infinite Subsets. *Archiv der Mathematik*, **76**, 88-90. https://doi.org/10.1007/s000130050546

[3] Mahmoud, R., *et al*. (2017) On the Energy of Non-Commuting Graph of Dihedral Groups. *AIP Conference Proceedings*, **1830**, Article 070011. https://doi.org/10.1063/1.4980960

[4] Wu, B.-F., Lou, Y.-Y. and He, C.-X. (2014) Signless Laplacian and Normalized and Normalized Laplacian on the H-Join Operation of Graphs. *Discrete Mathematics*, *Algorithms and Applications*, **6**, Article ID: 1450046. https://doi.org/10.1142/S1793830914500463

[5] Torktaz, M. and Ashrafi, A.R. (2019) Spectral Properties of the Commuting Graphs of Certain Groups. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, **16**, 300-309. https://doi.org/10.1016/j.akcej.2018.09.006

[6] Grone, R., Merris, R. and Sunder, V.S. (1990) The Laplacian Spectrum of a Graph. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **11**, 218-238. https://doi.org/10.1137/0611016

[7] Dutta, P., Dutta, J. and Nath, R.K. (2018) Laplacian Spectrum of Non-Commuting Graphs of Finite Groups. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **49**, 205-216. https://doi.org/10.1007/s13226-018-0263-x

[8] Douglas B. West. 图论导引[M]. 骆吉洲, 李建中, 译. 北京: 机械工业出版社, 2020.

[9] Abdollahi, A., Akbari, S. and Maimani, H.R. (2006) Non-Commuting Graph of a Group. *Journal of Algebra*, **298**, 468-492. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.02.015

[10] Brouwer, A.E. and Haemers, W.H. (2012) Spectra of Graphs. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6

[11] 徐明曜. 有限群初步(现代数学基础丛书 152) [M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[12] Biggs, N. (1994) Algebraic Graph Theory. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge.

[13] Cvetković, D.M., Doob, M. and Sachs, H. (1980) Spectra of Graphs: Theory and Application. Academic Press, Cambridge.