Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 482-491
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142047

关于矩阵数字特征的一些注记

禹鸥洋，任芳国*

陕西师范大学数学与统计学院，陕西 西安

收稿日期：2023年12月25日；录用日期：2024年1月5日；发布日期：2024年2月23日

摘 要

根据矩阵数字特征的定义，结合矩阵Lie积的定义，利用矩阵迹的性质，矩阵数字特征的性质，以及密度矩阵的性质，对由*Hermite*矩阵组成的实线性空间H_n上的一些数字特征进行了数值计算并且给出了一个例子，其次对*WY*相关系数进行改造使其成为矩阵空间上的半内积并且利用矩阵范数、矩阵迹及矩阵数字特征的性质得出了改造后的*WY*相关系数与原*WY*相关系数、斜信息以及协方差的关系，获得了原*WY*相关系数和斜信息的一些性质，并给出改造后的*WY*相关系数的一个应用。这些结果将在量子信息论中具有一定的应用。

关键词

密度矩阵，矩阵期望，矩阵方差，矩阵协方差，*WY*相关系数，矩阵斜信息

Some Notes on the Numerical Characteristics of Matrix

Ouyang Yu, Fangguo Ren*

School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi’an Shaanxi

Received: Dec. 25th, 2023; accepted: Jan. 5th, 2024; published: Feb. 23rd, 2024

Abstract

According to the definition of matrix numerical characteristics, combined with the definitions of Lie product of matrix, using the properties of matrix traces, matrix numerical characteristics, and density matrix, numerical calculations were performed on some numerical characteristics on real linear space H_n composed of *Hermite* matrices, and an example was given, secondly, the *WY* correlation coefficient was modified to become a semi inner product in the matrix space, and the relationship between the modified *WY* correlation coefficient and the original *WY* correlation coeffi-

*通讯作者。

文章引用: 禹鸥洋, 任芳国. 关于矩阵数字特征的一些注记[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 482-491.
DOI: 10.12677/pm.2024.142047

cient and skew information, as well as some properties of covariance, the original *WY* correlation coefficient and skew information, were obtained using the properties of matrix norm, matrix trace, and matrix numerical characteristics, and an application of the modified *WY* correlation coefficient was also presented. These results will have certain applications in quantum information theory.

Keywords

Density Matrix, Matrix Expectation, Matrix Variance, Matrix Covariance, *WY* Correlation Coefficient, Matrix Skew Information

1. 引言

近年来量子信息的研究与应用受到国内外的广泛关注，而概率与矩阵是研究量子信息的重要的不可缺少的工具，如量子信息论中主要的研究对象(态、量子测量及量子运算)与概率及矩阵密不可分[1] [2] [3]。矩阵数字特征在量子信息中有着广泛的应用，比如量子测量、量子态的度量、量子熵等[1]，因此矩阵数字特征在量子信息中扮演着重要的角色。斜信息作为一个重要的数字特征于 1963 年在[4]中被介绍，并且 *WY* 相关系数及斜信息一直受到有关专家学者的青睐[4]-[16]。在量子信息中，*Hermite* 矩阵又被称作可观测量，*Hermite* 矩阵的数字特征与量子信息中的量子测量理论和不确定性关系等密切相关，并且由于任何一个矩阵都可以写成一个 *Hermite* 矩阵与一个反 *Hermite* 矩阵的和，所以 *Hermite* 矩阵空间上的数字特征对整个矩阵空间上数字特征的研究具有重要的价值；*WY* 相关系数作为矩阵的一个数字特征，它与量子信息中的不确定关系和量子态的量化密切相关，同时斜信息作为 *WY* 相关系数的一个特殊情形，它与量子信息中的许多量子关联量密切相关，所以对 *Hermite* 矩阵空间上的数字特征和 *WY* 相关系数的研究具有一定的价值。在文献[4]-[14]研究的基础上，主要利用矩阵理论，对由 *Hermite* 矩阵组成的实线性空间 H_n 上的一些数字特征进行数值计算并对 *WY* 相关系数进行改造使其成为矩阵空间上的内积，同时运用矩阵范数，矩阵迹以及矩阵数字特征的性质给出协方差，*WY* 相关系数及斜信息的一些性质，得到的结论将为矩阵在量子信息理论中的应用提供有力的研究工具。

2. 符号说明与预备知识

2.1. 符号说明

为了简述方便，我们对文中符号进行说明：M_n 表示所有 n 阶复矩阵组成的复线性空间，H_n 表示所有 n 阶 *Hermite* 矩阵组成的实线性空间，I_n 表示 n 阶单位矩阵，A^* 和 $Tr(A)$ 分别表示矩阵 A 的共轭转置和迹；不特别说明，矩阵空间 M_n 上的默认标准内积为 $(X,Y)=Tr(X^*Y)$，其中 $X,Y\in M_n$。其它未作说明的符号、概念及术语参见文献[1] [2] [3]。

2.2. 预备知识

定义 1 [1]设 $A\in M_n$ 是 *Hermite* 矩阵。如果 A 是迹为 1 的半正定矩阵，则称 A 是密度矩阵，并称秩为 1 的密度矩阵为纯态，秩大于 1 的密度矩阵为混合态。

定义 2 [2]设 $P\in M_n$ 是密度矩阵， $X,Y\in M_n$。

$$E_P(X)\equiv Tr(PX)\text{；}$$

$$V_P(X)\equiv Tr\left(P\left(X-E_P(X)I_n\right)\left(X-E_P(X)I_n\right)^*\right)\text{；}$$

$$Cov_P(X,Y)\equiv Tr\left(P\left(X-E_P(X)I_n\right)\left(Y-E_P(Y)I_n\right)^*\right)\text{；}$$

$$Corr_P(X,Y)\equiv Tr\left(PXY^*-\sqrt{P}X\sqrt{P}Y^*\right)\text{；}$$

$$I_P(X)\equiv Tr\left(PXX^*-\sqrt{P}X\sqrt{P}X^*\right).$$

分别称为 X 关于 P 的**期望**、X 关于 P 的方差、X 与 Y 关于 P 的协方差、WY 相关系数及斜信息。

定义 3 [2]设 $X,Y\in M_n$。称 $[X,Y]\equiv XY-YX$ 为矩阵**空间** M_n 上关于 X 与 Y 的 Lie 积。

定义 4 在矩阵空间 M_n 上定义二元函数 $Corr_P^G(\cdot,\cdot)$，其中

$$Corr_P^G(X,Y)=\frac{1}{2}Tr\left(PXY^*+PY^*X\right)-Tr\left(\sqrt{P}X\sqrt{P}Y^*\right),\forall X,Y\in M_n.$$

定义 5 $\forall A\in M_n$，矩阵空间 M_n 上的 Frobenius 范数 $\|A\|_F$ 定义为 $\|A\|_F=\left[Tr\left(A^*A\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

引理 1 设 $A,B\in M_n$ 是 **Hermite** 矩阵。则

(1) $Tr(AB)$ 是实数；

(2) 如果 A,B 是半正定矩阵，则 $Tr(AB)$ 是非负实数，且 $Tr(AB)=0$ 当且仅当 $AB=0$。

证明 (1) 由于 A 是 *Hermite* 矩阵，则存在酉矩阵 U，使得 $U^*AU=\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_i\in R$。再由 B 是 *Hermite* 矩阵知，$U^*BU=(b_{ij})_n$ 的对角元 $b_{ii}\in R$，则

$Tr(AB)=Tr\left(U^*AUU^*BU\right)=Tr\left(\Lambda U^*BU\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i b_{ii}\in R$。

(2) $Tr(AB)=Tr\left(\sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{B}\right)=Tr\left(\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{B}\sqrt{A}\right)=Tr\left(\left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right)^*\right)=\left\|\sqrt{A}\sqrt{B}\right\|_2^2$，则 $Tr(AB)\geq 0$，且 $Tr(AB)=0$，当且仅当 $\sqrt{A}\sqrt{B}=0$，当且仅当 $AB=0$。

根据矩阵迹的性质及引理 1 易得：

引理 2 给定半正定矩阵 $P\in M_n$，M_n 上的二元函数 $f_i\,(i=1,\cdots,6)$ 分别为 M_n 上的半内积，定义如下：$\forall X,Y\in M_n$

(1) $f_1(X,Y)=Tr\left(PXY^*\right)$；

(2) $f_2(X,Y)=Tr\left(PY^*X\right)$；

(3) $f_3(X,Y)=Tr(PX)Tr\left(PY^*\right)$；

(4) $f_4(X,Y)=Tr\left(\sqrt{P}X\sqrt{P}Y^*\right)$；

(5) $f_5(X,Y)=Tr\left(PXY^*+\sqrt{P}X\sqrt{P}Y^*\right)$；

(6) $f_6(X,Y)=Tr\left(PY^*X+\sqrt{P}X\sqrt{P}Y^*\right)$。

引理 3 [2]设 f 是向量空间 V 上一个半内积。则

(1) $\left|f(x,y)\right|^2\leq f(x,x)f(y,y),\forall x,y\in V$；

(2) 由 f 诱导的 V 上的一元实函数 $\sqrt{f(x,x)},\forall x\in V$ 是 V 上的一个半范数。

引理 4 设 $P\in M_n$ 是密度矩阵， $X,Y,Z\in M_n$， $\lambda,\mu\in C$， $U\in M_n$ 是酉矩阵，则

(1) $Cov_P(X,Y)=Tr(PXY^*)-Tr(PX)\overline{Tr(PY)}$；

(2) $\overline{Cov_P(X,Y)}=Cov_P(Y,X)$；

(3) $Cov_P(\lambda X+\mu Y,Z)=\lambda Cov_P(X,Z)+\mu Cov_P(Y,Z)$；

(4) $V_P(X)\geq 0$；

(5) $\overline{Corr_P(X,Y)}=Corr_P(Y,X)$；

(6) $Corr_P(\lambda X+\mu Y,Z)=\lambda Corr_P(X,Z)+\mu Corr_P(Y,Z)$；

(7) (i) $Cov_P(X,Y)=Cov_{U^*PU}(U^*XU,U^*YU)$；

(ii) $Corr_P(X,Y)=Corr_{U^*PU}(U^*XU,U^*YU)$；

(8) $Cov_P(\cdot,\cdot)$是矩阵空间M_n上的一个半内积；

(9) $\sqrt{V_P(\cdot)}$是矩阵空间M_n上的一个半范数；

(10) $V_{U^*PU}(U^*XU)=V_P(X)$，$I_{U^*PU}(U^*XU)=I_P(X)$。

证明 由定义 2 且通过直接计算可知(2)，(3)，(5)，(6)，(7)成立，下证(1)，(4)，(8)，(9)，(10)。

(1)
$$\begin{aligned}Cov_P(X,Y)&=Tr\left(P\left(XY^*-\overline{E_P(Y)}X-E_P(X)Y^*+E_P(X)\overline{E_P(Y)}I_n\right)\right)\\&=Tr(PXY^*)-\overline{E_P(Y)}Tr(PX)-E_P(X)Tr(PY^*)+E_P(X)\overline{E_P(Y)}Tr(P)\\&=Tr(PXY^*)-\overline{E_P(Y)}Tr(PX)-E_P(X)\overline{Tr(YP)}+E_P(X)\overline{E_P(Y)}\\&=Tr(PXY^*)-E_P(X)\overline{E_P(Y)}\\&=Tr(PXY^*)-Tr(PX)\overline{Tr(PY)}\end{aligned}$$

(4) 由$V_P(\cdot)$的定义及(1)知，$V_P(X)=Tr(PXX^*)-|Tr(PX)|^2$。再由柯西不等式知，

$|Tr(PX)|^2=\left|Tr\left(\left(\sqrt{P}X\right)\sqrt{P}\right)\right|^2\leq Tr\left(\left(\sqrt{P}X\right)\left(\sqrt{P}X\right)^*\right)Tr\left(\sqrt{P}\sqrt{P}\right)=Tr\left(\sqrt{P}XX^*\sqrt{P}\right)Tr(P)=Tr(PXX^*)$，所以 $V_P(X)\geq 0$。

(8) 由(2)，(3)，(4)可知，(8)成立。

(9) 由(8)及引理 3 可知，(9)成立。

(10) 由(7)可知，(10)成立。

引理 5 设$P\in M_n$是密度矩阵，$A,B\in H_n$。则$Im\,Cov_P(A,B)=\frac{1}{2i}Tr(P[A,B])$。

证明 由引理 4 (1)可得

$2iIm\,Cov_P(A,B)=Cov_P(A,B)-\overline{Cov_P(A,B)}=Tr(P(AB-BA))=Tr(P[A,B])$，所以 $Im\,Cov_P(A,B)=\frac{1}{2i}Tr(P[A,B])$。

3. 主要结论

讨论在实线性空间H_n上数字特征的数值计算。由引理 4 (7)，(10)可知，下面讨论的数字特征具有酉相似不变性，再由于任何一个 **Hermite** 矩阵都酉相似于一个对角矩阵，因此将密度矩阵取为非负对角矩阵。下面结合矩阵 Lie 积的定义，利用迹的循环性(即$Tr(XY)=Tr(YX)$，其中X是$m\times n$矩阵，Y是$n\times m$矩阵)，密度矩阵P的性质(即$Tr(P)=1$)，矩阵数字特征的性质(引理 4)，对由 *Hermite* 矩阵组成的实线性空间H_n上的一些数字特征进行数值计算。

定理 1 设 $P=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in M_n$ 是密度矩阵， $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in H_n$。则

(1) $E_P(A)=\sum_{i=1}^n\lambda_i a_{ii}$ ，且 $\min\{a_{ii}\}\le E_P(A)\le\max\{a_{ii}\}$；

(2) $V_P(A)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_i|a_{ij}|^2-\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i a_{ii}\right)^2$；

(3) $Cov_P(A,B)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_i a_{ij}\overline{b_{ij}}-\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i a_{ii}\right)\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i b_{ii}\right)$；

(4) $Tr(P[A,B])=2i\sum_{1\le k<j\le n}^n(\lambda_k-\lambda_j)Im\left(a_{kj}\overline{b_{kj}}\right)$；

(5) $I_P(A)=\sum_{1\le k<j\le n}^n\left(\lambda_i+\lambda_j-2\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\right)|a_{ij}|^2$；

(6) $Corr_P(A,B)=\sum_{1\le k<j\le n}^n\left(\left(\lambda_k+\lambda_j-2\sqrt{\lambda_k\lambda_j}\right)Re\left(a_{kj}\overline{b_{kj}}\right)+i(\lambda_k-\lambda_j)Im\left(a_{kj}\overline{b_{kj}}\right)\right)$。

证明 (1) 由定义易知， $E_P(A)=\sum_{i=1}^n\lambda_i a_{ii}$ 。由引理 1 可知 $E_P(A)$ 是实数，又由于 $TrP=1$，所以 $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$，故 $E_P(A)=\sum_{i=1}^n\lambda_i a_{ii}$ 是 a_{ii} 的一个凸组合 $i=1,2,\cdots,n$ ，因此 $\min\{a_{ii}\}\le E_P(A)\le\max\{a_{ii}\}$。

(2) $V_P(A)=Tr(PA^2)-(Tr(PA))^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_i|a_{ij}|^2-\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i a_{ii}\right)^2$。

(3) 由于 $Tr(PAB)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_i a_{ij}\overline{b_{ij}}$ ，则

$$Cov_P(A,B)=Tr(PAB)-Tr(PA)Tr(PB)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_i a_{ij}\overline{b_{ij}}-\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i a_{ii}\right)\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i b_{ii}\right)。$$

(4)
$$\begin{aligned}Tr(P[A,B])&=Tr(PAB-PBA)\\&=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_k a_{kj}\overline{b_{kj}}-\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_j b_{jk}\overline{a_{jk}}\\&=\sum_{1\le k<j\le n}^n(\lambda_k-\lambda_j)\left(a_{kj}\overline{b_{kj}}-b_{kj}\overline{a_{kj}}\right)\\&=\sum_{1\le k<j\le n}^n\left((\lambda_k-\lambda_j)\left(Re\left(a_{kj}\overline{b_{kj}}\right)+iIm\left(a_{kj}\overline{b_{kj}}\right)-Re\left(\overline{a_{kj}}b_{kj}\right)-iIm\left(\overline{a_{kj}}b_{kj}\right)\right)\right)\\&=2i\sum_{1\le k<j\le n}^n(\lambda_k-\lambda_j)Im\left(a_{kj}\overline{b_{kj}}\right).\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}I_P(A)&=Tr\left(PA^2-\sqrt{P}A\sqrt{P}A\right)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_i|a_{ij}|^2-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sqrt{\lambda_i\lambda_j}|a_{ij}|^2\\&=\sum_{1\le k<j\le n}^n\left(\lambda_i+\lambda_j-2\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\right)|a_{ij}|^2.\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}Corr_P(A,B)&=Tr\left(PAB-\sqrt{P}A\sqrt{P}B\right)\\&=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_k a_{kj}\overline{b_{kj}}-\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\sqrt{\lambda_k\lambda_j}a_{kj}\overline{b_{kj}}\\&=\sum_{k\ne j}^n\left(\lambda_k-\sqrt{\lambda_k\lambda_j}\right)a_{kj}\overline{b_{kj}}=\sum_{1\le k<j\le n}^n\left(\left(\lambda_k-\sqrt{\lambda_k\lambda_j}\right)a_{kj}\overline{b_{kj}}+\left(\lambda_j-\sqrt{\lambda_k\lambda_j}\right)a_{jk}\overline{b_{kj}}\right)\\&=\sum_{1\le k<j\le n}^n\left(\left(\lambda_k-\sqrt{\lambda_k\lambda_j}\right)\left(Re\left(a_{kj}\overline{b_{kj}}\right)+iIm\left(a_{kj}\overline{b_{kj}}\right)\right)+\left(\lambda_j-\sqrt{\lambda_k\lambda_j}\right)\left(Re\left(a_{kj}\overline{b_{kj}}\right)+iIm\left(\overline{a_{kj}}b_{kj}\right)\right)\right)\\&=\sum_{1\le k<j\le n}^n\left(\left(\lambda_k+\lambda_j-2\sqrt{\lambda_k\lambda_j}\right)Re\left(a_{kj}\overline{b_{kj}}\right)+i(\lambda_k-\lambda_j)Im\left(a_{kj}\overline{b_{kj}}\right)\right)\end{aligned}$$

推论 1 设 $P=diag(\lambda_1,\lambda_2)\in M_2$ 是密度矩阵， $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in H_2$， $X=(x_{ij})\in M_2$。则

(1) $|Tr(P[A,B])|^2=4(\lambda_1-\lambda_2)^2\left|Im\left(a_{12}\overline{b_{12}}\right)\right|^2$；

(2) $I_P(A)=\left(\lambda_1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right)|a_{12}|^2=\left(1-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right)|a_{12}|^2$；

(3) $Corr_P(A,B)=\left(\lambda_1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right)Re\left(a_{12}\overline{b_{12}}\right)+i(\lambda_1-\lambda_2)Im\left(a_{12}\overline{b_{12}}\right)$；

(4) $I_P(X)=Tr\left(PXX^*-\sqrt{P}X\sqrt{P}X^*\right)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\lambda_i\left|x_{ij}\right|^2-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\left|x_{ij}\right|^2$。

定理 1 对 H_n 上的一些数字特征进行了计算，并且给出了具体的计算结果。由于 M_n 中的任何一个矩阵都可以写成一个 *Hermite* 矩阵与一个反 *Hermite* 矩阵的和，所以研究 H_n 上的数字特征对 M_n 上的数字特征的研究有着很大的价值，故定理 1 中对 H_n 上数字特征的计算结果将有助于对 M_n 上数字特征的研究。

下面给出一个计算 H_2 上数字特征的例子。

例 1 设 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$。则

(1) 由 $E_P(A)=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i a_{ii}$ 知，$E_P(A)=0$，$E_P(B)=0$；

(2) 由 $Tr(PAB)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\lambda_i a_{ij}\overline{b_{ij}}$ 知，$Cov_P(A,B)=i\frac{1}{3}-i\frac{2}{3}=-i\frac{1}{3}$；

(3) 由 $V_P(A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\left|a_{ij}\right|^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_{ii}\right)^2$ 知，$V_P(A)=1$，$V_P(B)=1$；

(4) 由 $Corr_P(A,B)=\left(\lambda_1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right)Re\left(a_{12}\overline{b_{12}}\right)+i(\lambda_1-\lambda_2)Im\left(a_{12}\overline{b_{12}}\right)$ 知，$Corr_P(A,B)=i\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)Im(i)=-i\frac{1}{3}$。由 $I_P(A)=\left(\lambda_1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right)\left|a_{12}\right|^2$ 知，$I_P(A)=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}=I_P(B)$，由 $\left|Tr\left(P[A,B]\right)\right|^2=4(\lambda_1-\lambda_2)^2\left|Im\left(a_{12}\overline{b_{12}}\right)\right|^2$ 知，$\left|Tr\left(P[A,B]\right)\right|^2=\frac{4}{9}$，故 $V_P(A)V_P(B)=1\geq\frac{1}{9}=\frac{\left|Tr\left(P[A,B]\right)\right|^2}{4}$，即 $V_P(A)V_P(B)\geq\frac{\left|Tr\left(P[A,B]\right)\right|^2}{4}$，这便是量子信息中 Heisenberger 不确定性关系的常见形式。

由例 1 可以看出矩阵数字特征与量子信息中的不确定性关系密切相关。

例 2 设 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}1+i & 2+4i\\ 0 & 2+3i\end{pmatrix}$。则

$$Tr\left(PXX^*\right)=Tr\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+i & 2+4i\\ 0 & 2+3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i & 0\\ 2-4i & 2-3i\end{pmatrix}\right)=16$$

$$Tr\left(\sqrt{P}X\sqrt{P}X^*\right)=Tr\left(\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{3}} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+i & 2+4i\\ 0 & 2+3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{3}} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i & 0\\ 2-4i & 2-3i\end{pmatrix}\right)=\frac{28+20\sqrt{2}}{3}$$

$$Corr_P(X,X)=I_P(X)=Tr\left(PXX^*-\sqrt{P}X\sqrt{P}X^*\right)=16-\frac{28+20\sqrt{2}}{3}=\frac{20\left(1-\sqrt{2}\right)}{3}<0。$$

由例 2 可以看到存在密度矩阵 P，使得矩阵空间 M_2 上的 *WY* 相关系数 $Corr_P(\cdot,\cdot)$ 不满足半内积的非负性，所以存在密度矩阵 P 使得 $Corr_P(\cdot,\cdot)$ 不是矩阵空间 M_2 上的半内积。对任意的 $X,Y\in M_n$ 以及密度矩阵 P，现在对 *WY* 相关系数 $Corr_P(X,Y)\equiv Tr\left(PXY^*-\sqrt{P}X\sqrt{P}Y^*\right)$ 进行改造，将其变为

$$Corr_P^G(X,Y)\equiv\frac{1}{2}Tr\left(PXY^*+PY^*X\right)-Tr\left(\sqrt{P}X\sqrt{P}Y^*\right)。$$

下面证明$Corr_P^G(\cdot,\cdot)$是矩阵空间M_n上的半内积并利用矩阵迹的性质(即$Tr(XY)=Tr(YX)$，其中X是$m\times n$矩阵，Y是$n\times m$矩阵)、矩阵范数的性质(即$\|A\|_F\geq 0$，$\forall A\in M_n$且$\|A\|_F=0$当且仅当$A=0$)、以及矩阵数字特征的性质(引理4)，得出$Corr_P^G(\cdot,\cdot)$以及$Corr_P(\cdot,\cdot)$、协方差、斜信息的一些性质并给出$Corr_P^G(\cdot,\cdot)$的一个应用。

定理2 设$P\in M_n$是密度矩阵，$A,B\in H_n$，$X,Y\in M_n$。则

(1) $Corr_P^G(\cdot,\cdot)$是矩阵空间M_n上的一个半内积；

(2) 若X是正规矩阵，则$Corr_P^G(X,X)=Corr_P(X,X)=I_P(X)\geq 0$；

(3) 如果P是一个纯态，则$Corr_P(X,Y)=Cov_P(X,Y)$；

(4) (i) $Corr_P^G(A,B)=Re\,Corr_P(A,B)=\frac{1}{4}\left(I_P(A+B)-I_P(A-B)\right)$；

(ii) $Im\,Corr_P(A,B)=\frac{1}{2i}Tr\left(P[A,B]\right)=Im\,Cov_P(A,B)$；

(iii) $2I_P(A)=\left\|\left[\sqrt{P},A\right]\right\|_F^2\geq 0$，即当$A\in H_n$时，$I_P(A)\geq 0$；

(iv) $I_P(A)=0$当且仅当$A\in C(P)=\{X\in H_n\mid PX=XP\}$，$dim\{A\in H_n\mid I_P(A)=0\}\geq n$.

证明 (1) $Corr_P^G(\cdot,\cdot)$是矩阵空间M_n上的一个半内积；根据前面引理2、引理3和引理4的论述，只需证明非负性即可。由柯西不等式及算术-几何不等式知，

$$\begin{aligned}Tr\left(\sqrt{P}X\sqrt{P}X^*\right)&=\left|Tr\left(\sqrt{P}X\left(X\sqrt{P}\right)^*\right)\right|\leq\sqrt{Tr\left(\sqrt{P}XX^*\sqrt{P}\right)}\sqrt{Tr\left(X\sqrt{P}\sqrt{P}X^*\right)}\\&=\sqrt{Tr\left(PXX^*\right)}\sqrt{Tr\left(PX^*X\right)}\leq\frac{1}{2}\left(Tr\left(PXX^*\right)+Tr\left(PX^*X\right)\right)\end{aligned}。$$

再由$Corr_P^G(I_n,I_n)=\frac{1}{2}Tr(P+P)-Tr(P)=0$知，$Corr_P^G(\cdot,\cdot)$是矩阵空间$M_n$上的一个半内积。

(2) 若X是正规矩阵，则由(1)可知$Corr_P^G(X,X)=Corr_P(X,X)=I_P(X)\geq 0$。

(3) 如果P是一个纯态，由$r(P)=1$及$Tr(P)=1$知，P只有唯一的非零特征值1，再由P是半正定矩阵知，存在单位向量$\alpha\in C^n$，使得$P=\alpha\alpha^*$，于是P是一个正交投影矩阵，有$\sqrt{P}=P=P^2$，则

$$\begin{aligned}Tr\left(\sqrt{P}X\sqrt{P}Y^*\right)&=Tr\left(\alpha\alpha^*X\alpha\alpha^*Y^*\right)=Tr\left(\left(\alpha^*X\alpha\right)\left(\alpha^*Y^*\alpha\right)\right)=Tr\left(\left(\alpha^*X\alpha\right)\left(\alpha^*Y\alpha\right)^*\right)\\&=\left(\alpha^*X\alpha\right)\overline{\left(\alpha^*Y\alpha\right)}=Tr\left(\alpha\alpha^*X\right)\overline{Tr\left(\alpha\alpha^*Y\right)}=Tr(PX)\overline{Tr(PY)}\end{aligned},$$

所以$Corr_P(X,Y)=Cov_P(X,Y)$。

(4) (i) 由$Tr\left(P(AB+BA)\right)=\frac{1}{2}Tr\left(P\left((A+B)^2-(A-B)^2\right)\right)$，

$$\begin{aligned}Corr_P(A,B)+\overline{Corr_P(A,B)}&=Tr(PAB)+Tr(PBA)-Tr\left(\sqrt{P}A\sqrt{P}B\right)-Tr\left(\sqrt{P}B\sqrt{P}A\right)\\&=Tr(PAB)+Tr(PBA)-2Tr\left(\sqrt{P}A\sqrt{P}B\right)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}Tr\left(\sqrt{P}A\sqrt{P}B\right)&=Tr\left(\sqrt{P}\frac{(A+B)+(A-B)}{2}\sqrt{P}\frac{(A+B)-(A-B)}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}Tr\left(\sqrt{P}(A+B)\sqrt{P}(A+B)-\sqrt{P}(A+B)\sqrt{P}(A-B)\right.\\&\quad\left.+\sqrt{P}(A-B)\sqrt{P}(A+B)-\sqrt{P}(A-B)\sqrt{P}(A-B)\right)\\&=\frac{1}{4}Tr\left(\sqrt{P}(A+B)\sqrt{P}(A+B)-\sqrt{P}(A-B)\sqrt{P}(A-B)\right)\end{aligned}$$

可知，

$$Re\,Corr_P(A,B)=\frac{1}{2}\left(Corr_P(A,B)+\overline{Corr_P(A,B)}\right)=\frac{1}{2}Tr\left(P(AB+BA)\right)-Tr\left(\sqrt{P}A\sqrt{P}B\right)$$
$$=\frac{1}{4}Tr\left(P(A+B)^2-\sqrt{P}(A+B)\sqrt{P}(A+B)\right)-\frac{1}{4}Tr\left(P(A-B)^2-\sqrt{P}(A-B)\sqrt{P}(A-B)\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(I_P(A+B)-I_P(A-B)\right)$$

(ii) 由
$$\begin{aligned}&Corr_P(A,B)-\overline{Corr_P(A,B)}\\&=Tr\left(PAB-\sqrt{P}A\sqrt{P}B\right)-Tr\left(PBA-\sqrt{P}B\sqrt{P}A\right)\\&=Tr(PAB)-Tr(PBA)+Tr\left(\sqrt{P}B\sqrt{P}A\right)-Tr\left(\sqrt{P}A\sqrt{P}B\right)\\&=Tr(PAB)-Tr(PBA)\end{aligned}$$

及引理 5 可知

$$Im\,Corr_p(A,B)=\frac{1}{2i}\left(Corr_P(A,B)-\overline{Corr_P(A,B)}\right)=\frac{1}{2i}Tr(PAB-PBA)=\frac{1}{2i}Tr\left(P[A,B]\right)=Im\,Cov_P(A,B).$$

(iii) $2I_P(A)=\left\|\left[\sqrt{P},A\right]\right\|_F^2$，因为

$$\begin{aligned}I_P(A)&=Tr\left(PA^2-\sqrt{P}A\sqrt{P}A\right)=Tr\left(\sqrt{P}AA\sqrt{P}-\sqrt{P}A\sqrt{P}A\right)\\&=-Tr\left(\sqrt{P}A\left(\sqrt{P}A-A\sqrt{P}\right)\right)=-\frac{1}{2}Tr\left(\left[\sqrt{P}A-A\sqrt{P}\right]^2\right)=\frac{1}{2}\left\|\left[\sqrt{P},A\right]\right\|_F^2\end{aligned}$$

，所以 $I_P(A)\ge 0$。

(iv) 由 $2I_P(A)=\left\|\left[\sqrt{P},A\right]\right\|_F^2$ 知，$I_P(A)=0$ 当且仅当 $\left\|\left[\sqrt{P},A\right]\right\|_F^2=0$，当且仅当 $\left[\sqrt{P},A\right]=0$，进而有 $PA=\sqrt{P}\left(\sqrt{P}A\right)=\sqrt{P}\left(A\sqrt{P}\right)=\left(\sqrt{P}A\right)\sqrt{P}=\left(A\sqrt{P}\right)\sqrt{P}=AP$；

如果 $PA=AP$，于是由 $\sqrt{P}$ 是 P 的多项式可知，$\sqrt{P}A=A\sqrt{P}$，故 $I_P(A)=0$。由于 $A\in C(P)$，P 是半正定矩阵，则存在酉矩阵 U，使得 $U^*PU=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{k_1}&&\\&\ddots&\\&&\lambda_m I_{k_m}\end{pmatrix}$，其中 $\lambda_i(i=1,\cdots,m)$ 非负互不相同且 $\sum_{i=1}^m k_i=n$，于是 $C\left(U^*PU\right)=\left\{\begin{pmatrix}X_{k_1}&&\\&\ddots&\\&&X_{k_m}\end{pmatrix}\middle| X_{k_i}\in H_{k_i},i=1,\cdots,m\right\}$，再由 H_n 作为实线性空间是 n^2 维的知，$\dim C\left(U^*PU\right)=\sum_{i=1}^m k_i^2$，故由 $I_P(\cdot)$ 具有酉相似不变性及酉相似保持可交换性知，$\dim C(P)=\dim C\left(U^*PU\right)\ge n$。

下面给出改造后的 WY 相关系数 $Corr_P^G(\cdot,\cdot)$ 的一个应用。

推论 2 设 $P\in M_n$ 是密度矩阵，$A,B\in H_n$，则

$$\frac{1}{16}\left(I_P(A+B)-I_P(A-B)\right)^2\le I_P(A)I_P(B)\le\frac{1}{16}\left(I_P(A+B)+I_P(A-B)\right)^2$$

证明 因为 $A,B\in H_n$，所以 A 和 B 是正规矩阵，故由定理 2 (2)知，$Corr_P^G(A,A)=I_P(A)$ 且 $Corr_P^G(B,B)=I_P(B)$，由定理 2 (4)的(i)和(iii)知，$Corr_P^G(A,B)=\frac{1}{4}\left(I_P(A+B)-I_P(A-B)\right)$ 且 $I_P(A+B)$ 和 $I_P(A-B)$ 是实数，又由于 $Corr_P^G(\cdot,\cdot)$ 是矩阵空间 M_n 上的一个半内积，则由引理 3 (1)知，

$Corr_P^G(A,B) \le \left|Corr_P^G(A,B)\right| \le \sqrt{Corr_P^G(A,A)}\sqrt{Corr_P^G(B,B)} = \sqrt{I_P(A)}\sqrt{I_P(B)}$。即 $\frac{1}{16}\left(I_P(A+B)-I_P(A-B)\right)^2 \le I_P(A)I_P(B)$。

另一方面，由于 $\sqrt{I_P(\cdot)}$ 是由矩阵空间 M_n 上的一个半内积 $Corr_P^G(\cdot,\cdot)$ 诱导出来的半范数，满足平行四边形法则，于是 $2\sqrt{I_P(A)I_P(B)} \le I_P(A)+I_P(B) = \frac{1}{2}\left(I_P(A+B)+I_P(A-B)\right)$，即有 $I_P(A)I_P(B) \le \frac{1}{16}\left(I_P(A+B)+I_P(A-B)\right)^2$，所以综上，有

$$\frac{1}{16}\left(I_P(A+B)-I_P(A-B)\right)^2 \le I_P(A)I_P(B) \le \frac{1}{16}\left(I_P(A+B)+I_P(A-B)\right)^2$$

注意：不一定有 $I_P(A)I_P(B) \ge \frac{\left|Tr\left(P[A,B]\right)\right|^2}{4}$ 成立。

例 3 设 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0\\ 0 & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$。$I_P(A)I_P(B) \ge \frac{\left|Tr\left(P[A,B]\right)\right|^2}{4}$ 不成立。

由 $I_P(A)=\left(1-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right)\left|a_{12}\right|^2$ 知，$I_P(A)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}=I_P(B)$。由 $\left|Tr\left(P[A,B]\right)\right|^2 = 4(\lambda_1-\lambda_2)^2\left|Im\left(a_{12}\overline{b_{12}}\right)\right|^2$ 知，$\frac{1}{4}\left|Tr\left(P[A,B]\right)\right|^2=\frac{9}{25}$，则 $I_P(A)I_P(B)-\frac{\left|Tr\left(P[A,B]\right)\right|^2}{4}=\frac{1}{25}-\frac{9}{25}=\frac{-8}{25}<0$，即有 $I_P(A)I_P(B)<\frac{\left|Tr\left(P[A,B]\right)\right|^2}{4}$。

例 4 对于给定的密度矩阵 P，不一定有 $Corr_P^G(X,Y)=Corr_P(X,Y)$，$X,Y\in M_n$。

当 P 为纯态时，设 $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$，可得 $XY^*=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$，$Y^*X=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$，$Tr\left(PXY^*\right)=i$，$Tr\left(PY^*X\right)=-i$，于是 $Corr_P^G(X,Y)=\frac{1}{2}Tr\left(PXY^*+PY^*X\right)-Tr\left(\sqrt{P}X\sqrt{P}Y^*\right)=-Tr\left(\sqrt{P}X\sqrt{P}Y^*\right)$，$Corr_P(X,Y)=Tr\left(PXY^*\right)-Tr\left(\sqrt{P}X\sqrt{P}Y^*\right)=i-Tr\left(\sqrt{P}X\sqrt{P}Y^*\right)$，所以 $Corr_P^G(X,Y)\ne Corr_P(X,Y)$。

4. 总结

本文首先对 *Hermite* 矩阵组成的实线性空间 H_n 上的一些数字特征进行了数值计算，并且给出了一个具体的例子，通过例子体现了矩阵数字特征与量子信息中的不确定性关系密切相关。其次对原有的 *WY* 相关系数进行改造，使其成为矩阵空间 M_n 上的内积并且通过矩阵范数、矩阵迹以及矩阵数字特征的性质，得出了改造后的 *WY* 相关系数与原 *WY* 相关系数和斜信息之间的关系以及矩阵协方差，原 *WY* 相关系数和斜信息的一些性质，并且给出了改造后的 *WY* 相关系数的一个应用以及斜信息不一定满足 Heisenberger 不确定性关系的一个例子。所获得的结果充实并完善了矩阵数字特征的性质，为矩阵在量子信息中的研究和应用提供了理论资源。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(批准号：11471200)。

参考文献

[1] Watrous, J. (2018) Theory of Quantum Information. Cambridge University Press, Cambridge.

https://doi.org/10.1017/9781316848142

[2] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1985) Matrix Analysis. Cambridge University Press, London. https://doi.org/10.1017/CBO9780511810817

[3] Nielsen M A,Chuang I L, Quantum Computation and Quantum Information[M]. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[4] Wiger, E.P. and Yanase, M.M. (1963) Information Contents of Distributions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **49**, 910-918. https://doi.org/10.1073/pnas.49.6.910

[5] Luo, S.L. (2003) Wigner-Yanase Skew Information and Uncertainty Relations. *Physical Review Letters*, **91**, Article 180403. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.180403

[6] Luo, S. and Zhang, Q. (2004) On Skew Information. *IEEE Transactions on Information Theory*, **50**, 1778-1782. https://doi.org/10.1109/TIT.2004.831853

[7] Luo, S.L. (2005) Heisenberg Uncertainty Relation for Mixed States. *Physics Letters A*, **72**, 440-450. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.042110

[8] Yanagi, K., Furuichi, S. and Kuriyama, K. (2005) A Generalized Skew Information and Uncertainty Relation. *IEEE Transactions on Information Theory*, **51**, 4401-4404. https://doi.org/10.1109/TIT.2005.858971

[9] Luo, S.L. (2006) Quantum Uncertainty of Mixed States Based on Skew Information. *Physical Review A*, **73**, 457-460. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.022324

[10] Li, D., Li, X., Wang, F., Huang, H., Li, X. and Kwek, L.C. (2009) Uncertainty Relation of Mixed States by Means of Wigner-Yanase-Dyson Information. *Physical Review A*, **79**, Article 052106. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.052106

[11] Furuichi, S., Yanagi, K. and Kuriyama, K. (2012) Trace Inequalities on a Generalized Wigner-Yanase Skew Information. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **356**, 179-185. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.02.043

[12] Ko, C.K. (2010) Comments on Conjectures of Trace Inequalities on a Generalized Wigner-Yanase Skew Information. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **369**, 164-167. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.02.037

[13] Yanagi K. (2010) Uncertainty Relation on Wigner-Yanase-Dyson Skew Information. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **365**, 12-18. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.09.060

[14] Chen, B. and Fei, S.M. (2015) Uncertainty Relations Based on Mutually Unbiased Measurements. *Quantum Information Processing*, **14**, 2227-2238. https://doi.org/10.1007/s11128-015-0949-5

[15] Chen, B., Fei, S.M. and Long, G.L. (2016) Sum Uncertainty Relations Based on Wigner-Yanase Skew Information. *Quantum Information Processing*, **15**, 2639-2648. https://doi.org/10.1007/s11128-016-1274-3

[16] Zhang, Y. and Luo, S.L. (2021) Wigner Function, Wigner-Yanase Skew Information, and Parity Asymmetry. *Physics Letters A*, **395**, Article ID: 127222. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2021.127222