Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 450-457
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142044

基于对数函数比值形式变化判别无穷积分的敛散性

何鸿俊，黄晓芳

广州大学数学与信息科学学院，广东 广州

收稿日期：2023年9月13日；录用日期：2023年12月13日；发布日期：2024年2月21日

摘 要

反常积分的基本问题就是探讨其敛散性的判别，这是求解无穷积分近似值的一个先决条件。本文根据定义在$[1,+\infty)$上连续函数$f(x)$的对数形式与自变量*x*的对数形式的比值形式的变化，给出了一种新的判别无穷积分敛散性的判别方法。

关键词

无穷积分，敛散性，比较判别法

On the Ratio Form of Logarithmic Function to Distinguish the Convergence and Divergence of Infinite Integrals

Hongjun He, Xiaofang Huang

School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong

Received: Sep. 13th, 2023; accepted: Dec. 13th, 2023; published: Feb. 21st, 2024

Abstract

The basic problem of infinite integrals is to explore the judgement of their convergence and divergence, this is a prerequisite for solving the approximations of infinite integrals. In this paper, according to change of the ratio form between the logarithmic form of continuous function $f(x)$ defined in $[1,+\infty)$ and the logarithmic form of the variable *x*, we give a new method for distin-

文章引用: 何鸿俊, 黄晓芳. 基于对数函数比值形式变化判别无穷积分的敛散性[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 450-457.
DOI: 10.12677/pm.2024.142044

guishing the convergence and divergence of infinite integrals.

Keywords

Infinite Integrals, Convergence and Divergence, Comparative Judgement Method

1. 引言

众所周知，定积分起源于求平面图形的面积和其他一些实际问题，定积分的思想在古代数学家的工作中就已经有了萌芽。如古希腊时期阿基米德在公元前240年左右就曾用求和的方法计算过抛物线弓形及其它图形的面积；公元263年，三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”。然而，在讨论定积分时有两个默认的前提，即定积分的积分区间都是有限的，被积函数也都是有界的。但在实际应用和理论研究中，还会遇到一些在无限区间上定义的函数或有限区间上的无界函数，对它们也需要考虑类似于定积分的问题，由此引出了反常积分的定义。反常积分又叫广义积分，是对普通定积分的推广，是指含有无穷上限或下限，或者被积函数含有无界点的积分，前者称为无穷限反常积分(简称无穷积分)，后者称为瑕积分(又称无界函数的反常积分)。反常积分在实际生活中有许多应用，如在概率统计中求连续型随机变量的数学期望和方差就要用到无穷区间上的反常积分。

对于反常积分，基本问题就是探讨其敛散性的判别，这也是求解无穷积分近似值的一个先决条件。对于无穷积分敛散性判别的方法有很多，如柯西收敛准则，比较原则，狄利克雷判别法，阿贝尔判别法[1]等。另外，还有很多判别无穷积分的其他方法，诸如郭祖胜[2]给出了非负函数无穷积分敛散性的新判别法；陈亚丽[3]给出了广义积分敛散性的对数判别法；玉璋[4]给出了正函数无穷积分敛散性的一种判别法；曹桂文、程小强[5]给出了非负递减函数无穷积分的敛散性几个新的判别法；边平勇[6]运用极限审敛法的等价定理给出了无穷积分的敛散性的判定定理；徐松林和王龙奎[7]运用阶的估计法给出了判定无穷积分敛散性的判定定理；胡端平和李小刚[8]反常积分敛散性的根值判别法；廉海荣等[9]给出了反常积分敛散性的对数判别法。

本文主要在温朝晖、李天胜、朱存斌[10]给出的无穷积分敛散性的一个新的判别法和郑建南、李志伟[11]给出的无穷积分敛散性的一个判别法的基础上，给出另外一种判别无穷积分敛散性的新方法。该方法对于判定无穷积分的敛散性时，优于比较原则判定法。

2. 无穷积分敛散性判别

华东师范大学1985年研究生入学考试中有一题，给出了判别无穷积分敛散性的一种方法，结果如下：

定理2.1 ([1，例4.5.13]) 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的连续函数，对任意 $x\in[1,+\infty)$ 有 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$。若 $\lambda>1$，则 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

温朝辉等[10]补充完善了定理2.1 (见定理2.2)，并利用被积函数和导函数给出了定理2.2的一个特例(见定理2.3)。

定理2.2 ([2，定理1]) 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的连续函数，对任意 $x\in[1,+\infty)$ 有 $f(x)>0$，且

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$，

1) 当 $\lambda>1$ 或 $\lambda=+\infty$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

2) 当 $\lambda<1$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散；

3) 当 $\lambda=1$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 可能收敛也可能发散。

定理 2.3 ([2，定理 2]) 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上有连续的导函数，对任意 $x\in[1,+\infty)$ 有 $f(x)>0$，且 $f(x)=0$，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=-\lambda$，则

1) 当 $\lambda>1$ 或 $\lambda=+\infty$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

2) 当 $\lambda<1$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散；

3) 当 $\lambda=1$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 可能收敛也可能发散。

郑建南，李志伟给出了判别无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 敛散性的一个新方法，即推广了定理 2.2 和定理 2.3。

定理 2.4 ([3，定理 3]) 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上连续，对任意 $x\in[1,+\infty)$ 有 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln[xf(x)]}{\ln\ln x}=-\lambda$，则

1) 当 $\lambda>1$ 或 $\lambda=+\infty$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

2) 当 $\lambda<1$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散；

3) 当 $\lambda=1$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 可能收敛也可能发散。

推论 2.5 ([3，推论 1])。设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上有连续的导函数，对任意 $x\in[1,+\infty)$ 有 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\left(1+\dfrac{xf'(x)}{f(x)}\right)=-\lambda$，则

1) 当 $\lambda>1$ 或 $\lambda=+\infty$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

2) 当 $\lambda<1$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散；

3) 当 $\lambda=1$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 可能收敛也可能发散。

例 1 对任意正数 δ，讨论反常积分 $\int_{1+\delta}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ 的敛散性。

解 由于 $\int_{1+\delta}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\int_{1+\delta}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^p}=\int_{\ln(1+\delta)}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}u}{u^p}$，故当 $p>1$ 时 $\int_{1+\delta}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ 收敛；

当 $p\le1$ 时，$\int_{1+\delta}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ 发散。

根据例 1，可将定理 2.4 进一步改进为如下定理。

定理 2.6 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上连续，对任意 $x\in[1,+\infty)$ 有 $f(x)>0$，且对某一固定正数 p，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln[xf(x)]}{\ln(\ln x)^p}=-\lambda$，则

1) 当 $\lambda>\dfrac{1}{p}$ 或 $\lambda=+\infty$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

2) 当 $\lambda < \frac{1}{p}$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散；

3) 当 $\lambda = \frac{1}{p}$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 可能收敛也可能发散。

证明 由于对某一固定正数 p，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[xf(x)\right]}{\ln(\ln x)^p} = -\lambda$，故对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $X > e$，

当 $x > X$ 时，有

$$-\lambda - \varepsilon < \frac{\ln\left[xf(x)\right]}{\ln(\ln x)^p} < -\lambda + \varepsilon,$$

即

$$\ln(\ln x)^{p(-\lambda-\varepsilon)} < \ln\left[xf(x)\right] < \ln(\ln x)^{p(-\lambda+\varepsilon)}.$$

又因为对任意 $x \in [1,+\infty)$ 有 $f(x) > 0$，从而有

$$\frac{1}{x(\ln x)^{p(\lambda+\varepsilon)}} < f(x) < \frac{1}{x(\ln x)^{p(\lambda-\varepsilon)}}.$$

根据假设，即 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，知 $f(x)$ 在任何有限区间 $[1,u) \in [1,\infty)$ 上可积。从而，通过比较判别法和例 1 知，当 $\lambda > \frac{1}{p}$ 时，取 $\varepsilon < \lambda - \frac{1}{p}$，得 $p(\lambda-\varepsilon) > 1$，从而可得 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。当 $\lambda < \frac{1}{p}$ 时，取 $\varepsilon < \frac{1}{p} - \lambda$，得 $p(\lambda+\varepsilon) < 1$，从而可得 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散。另外，当 $\lambda = +\infty$ 时，即 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[xf(x)\right]}{\ln(\ln x)^p} = -\infty$，则对任意 $M > \frac{1}{p} > 0$，存在 $X > e$，使得当 $x > X$ 时，有

$$\frac{\ln\left[xf(x)\right]}{\ln(\ln x)^p} < -M$$

进一步有

$$\ln\left[xf(x)\right] < -M\ln(\ln x)^p = \ln(\ln x)^{-pM} = \frac{1}{\ln(\ln x)^{pM}}.$$

因而

$$f(x) < \frac{1}{x(\ln x)^{pM}}.$$

根据比较判别法和例 1 可得，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

另一方面，当 $\lambda = \frac{1}{p}$ 时，考察无穷积分 $\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^m(\ln\ln x)^n}(m>0, n>0)$。

当 $m=1$ 时，有

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^m(\ln\ln x)^n} = \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^n} = \int_{\ln\ln 3}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^n}.$$

根据比较原则知，当 $n>1$ 时 $\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^m(\ln\ln x)^n}$ 收敛；当 $n<1$ 时 $\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^m(\ln\ln x)^n}$ 发散。同时，

对任意 $n>0$，当 $m=1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[xf(x)\right]}{\ln(\ln x)^{p}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln[x\dfrac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{n}}]}{\ln(\ln x)^{p}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-\ln\ln x-n\ln\ln\ln x}{p\ln\ln x} \\
&= -\frac{1}{p}-\lim_{x\to\infty}\frac{n\ln\ln\ln x}{p\ln\ln x} \\
&= -\frac{1}{p}-\frac{n}{p}\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x(\ln\ln x)(\ln x)} \\
&= -\frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

从而得知，当 $\lambda=\dfrac{1}{p}$ 时，无穷积分 $\int_{3}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{m}(\ln\ln x)^{n}}$ 可能收敛，也可能发散。

利用 L'Hospital 法则，可得

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[xf(x)\right]}{\ln(\ln x)^{p}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x\left(f(x)+xf'(x)\right)}{pxf(x)}=\lim_{x\to\infty}\ln x\left(\frac{1}{p}+\frac{xf'(x)}{pf(x)}\right).
$$

因此，根据推论 2.5 和定理 2.6，可得如下推论。

推论 2.7 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的导函数，对任意 $x\in[1,+\infty)$ 有 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，又对某一固定的正数 p，$\lim\limits_{x\to\infty}\ln x\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{xf'(x)}{pf(x)}\right)=-\lambda$，则

1) 当 $\lambda>\dfrac{1}{p}$ 或 $\lambda=+\infty$ 时，$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

2) 当 $\lambda<\dfrac{1}{p}$ 时，$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散；

3) 当 $\lambda=\dfrac{1}{p}$ 时，$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 可能收敛也可能发散。

例 2 对任意正数 δ，讨论反常积分 $\int_{e+\delta}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}$ 的敛散性。

解 由于 $\int_{e+\delta}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}=\int_{e+\delta}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}(\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^{p}}=\int_{\ln\ln(e+\delta)}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}u}{u^{p}}$，故当 $p>1$ 时 $\int_{e+\delta}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}$ 收敛；当 $p\le 1$ 时，$\int_{e+\delta}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}$ 发散。

根据例 2，可将定理 2.4 进一步改进为如下定理。

定理 2.8 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，对任意 $x\in[1,+\infty)$ 有 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left[x\ln xf(x)\right]}{\ln\ln\ln x}=-\lambda$，则

1) 当 $\lambda>1$ 或 $\lambda=+\infty$ 时，$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

2) 当 $\lambda<1$ 时，$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散；

3) 当 $\lambda=1$ 时，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 可能收敛也可能发散。

证明 由条件 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln[x\ln xf(x)]}{\ln\ln\ln x}=-\lambda$ 可知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $X>e+1$，当 $x>X$ 时，有

$$-\lambda-\varepsilon<\frac{\ln[x\ln xf(x)]}{\ln\ln\ln x}<-\lambda+\varepsilon$$

即

$$(\ln\ln\ln x)^{-\lambda-\varepsilon}<\ln[x\ln xf(x)]<(\ln\ln\ln x)^{-\lambda+\varepsilon}$$

又因为对任意 $x\in[1,+\infty)$ 有 $f(x)>0$，从而有

$$\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{\lambda+\varepsilon}}<f(x)<\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{\lambda-\varepsilon}}$$

根据假设，即 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，知 $f(x)$ 在任何有限区间 $[1,u]\subset[1,+\infty]$ 上可积。

从而，通过比较判别法和例 2 知，当 $\lambda>1$ 时，取 $\varepsilon<\lambda-1$，得 $\lambda-\varepsilon>1$，从而得到 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。当 $\lambda<1$ 时，取 $\varepsilon<1-\lambda$，得 $\lambda+\varepsilon<1$，从而可得 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

另外，当 $\lambda=+\infty$ 时，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln[x\ln xf(x)]}{\ln\ln\ln x}<-\infty$，则对任意 $M>0$，存在 $X>e+1$，使得当 $x>X$ 时，有

$$\frac{\ln[x\ln xf(x)]}{\ln\ln\ln x}<-M.$$

进一步有

$$\begin{aligned}\ln[x\ln xf(x)]&<-M(\ln\ln\ln x)\\&<\frac{1}{\ln(\ln\ln x)^M}.\end{aligned}$$

因而

$$f(x)<\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^M}.$$

根据比较判别法和例2可得，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。

另一方面，当 $\lambda=1$ 时，考察无穷积分 $\int_{16}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)(\ln\ln\ln x)^p}(p>0)$。

由于

$$\begin{aligned}&\int_{16}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)(\ln\ln\ln x)^p}\\&=\int_{16}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln\ln\ln x)}{(\ln\ln\ln x)^p}=\int_{\ln\ln\ln 16}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^p}.\end{aligned}$$

根据比较原则知，当 $p>1$ 时，$\int_{16}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)(\ln\ln\ln x)^p}$ 收敛；当 $p\le1$ 时，$\int_{16}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)(\ln\ln\ln x)^p}$ 发散。同时，对于任意 $p>0$，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[x\ln xf(x)\right]}{\ln\ln\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[x\ln x\dfrac{1}{x\ln x(\ln\ln x)(\ln\ln\ln x)^{p}}\right]}{\ln\ln\ln x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\ln\ln\ln x-p\ln\ln\ln\ln x}{\ln\ln\ln x}$$
$$=-1-\lim_{x\to\infty}\frac{p\ln\ln\ln\ln x}{\ln\ln\ln x}$$
$$=-1$$

从而可以得知，当 $\lambda=1$ 时，无穷积分 $\int_{16}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)(\ln\ln\ln x)^{p}}$ 可能收敛也可能发散。

同样，根据 L'hospital 法则，可得如下推论。

推论 2.9 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的导函数，对任意 $x\in[1,+\infty)$ 有 $f(x)>0$，且 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$，$\lim_{x\to\infty}\ln\ln x\left(1+\ln x\left(1+\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)\right)=-\lambda$，则

1) 当 $\lambda>1$ 或 $\lambda=+\infty$ 时，$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；
2) 当 $\lambda<1$ 时，$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散；
3) 当 $\lambda=1$ 时，$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 可能收敛也可能发散。

3. 应用举例

作为定理 2.8 和推论 2.9 的应用，将以下面例子加以说明，而应用定理 2.2，定理 2.3，定理 2.4 和推论 2.5 无法判断其敛散性。

例 3 对于任意 $\delta>0$，判别无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}\mathrm{d}x\,(p>0)$ 的敛散性。

解 由于 $f(x)=\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}$ 在 $[e+\delta,+\infty]$ 上连续，对任意 $x\in[e+\delta,+\infty]$ 有 $f(x)>0$。

又因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[x\ln xf(x)\right]}{\ln\ln\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[x\ln x\dfrac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}\right]}{\ln\ln\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-p\ln\ln\ln x}{\ln\ln\ln x}=-p$$

根据定理 2.8 知，当 $p>1$ 时，无穷积分 $\int_{e+\delta}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}\mathrm{d}x$ 收敛；当 $p<1$ 时，无穷积分 $\int_{e+\delta}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}\mathrm{d}x$ 发散；当 $p=1$ 时，该无穷积分 $\int_{e+\delta}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}\mathrm{d}x$ 发散。

然而，若应用定理 2.4，则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[xf(x)\right]}{\ln\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[x\dfrac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}\right]}{\ln\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\ln\ln x-p\ln\ln\ln x}{\ln\ln x}=-1$$

无法判断无穷积分 $\int_{e+\delta}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}\mathrm{d}x$ 的敛散性。同样，运用定理 2.2，定理 2.3 和推论 2.5 都无法判断其敛散性。另外，若运用比式判别法和拉贝判别法，也都无法判别该无穷积分的敛散性。

参考文献

[1] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[2] 郭祖胜. 非负函数无穷积分敛散性的新判别法[J]. 三峡大学学报(自然科学版), 2001(3): 274-277.

[3] 陈亚丽. 广义积分敛散性的对数判别法[J]. 安徽电子信息职业技术学院学报, 2004(Z1): 231-232.

[4] 玉璋. 正函数无穷积分敛散性的一种判别法[J]. 重庆科技学院学报(自然科学版), 2008(2): 142-144.

[5] 曹桂文, 程小强. 非负递减函数无穷积分的敛散性几个新的判别法[J]. 商丘职业技术学院学报, 2010, 9(5): 8-10.

[6] 边平勇. 反常积分敛散性极限审敛法的等价定理[J]. 山东理工大学学报(自然科学版), 2006(1): 36-38.

[7] 徐松林, 王龙奎. 阶的估计法在判定无穷积分敛散性问题中的应用[J]. 黄山学院学报, 2009, 11(3): 17-19.

[8] 胡端平, 李小刚. 反常积分敛散性的根值判别法[J]. 高等数学研究, 2010, 13(3): 2-3.

[9] 廉海荣, 张帅, 金旸. 反常积分敛散性的对数判别法[J]. 高等数学研究, 2011, 14(6): 27-28.

[10] 温朝晖, 李天胜, 朱存斌. 无穷积分敛散性的一个新的判别法[J]. 大学数学, 2005(2): 111-112.

[11] 郑建南, 李志伟. 无穷积分敛散性的一个判别法[J]. 闽西职业技术学院学报, 2009, 11(2): 104-105, 112.