Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 783-798
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142076

速度有旋的无磁阻抗轴对称Hall-MHD系统的正则性判别准则

杨美鲜

南京信息工程大学数学与统计学院，江苏 南京

收稿日期：2023年12月19日；录用日期：2024年1月11日；发布日期：2024年2月29日

摘 要

本文研究速度有旋的无磁阻抗轴对称Hall-MHD系统的正则性判别准则。我们证明了：如果磁场的旋度分量满足一个Beale-Kato-Majda型准则，且速度的水平旋度分量满足一个Prodi-Serrin型准则时，系统的强解可以光滑地延拓到可能的爆破时间之外。

关键词

无磁阻抗，Hall-MHD系统，轴对称，正则性判别准则

On Regularity Criteria of Non-Resistive Axially Symmetric Hall-MHD System with a Non-Vanishing Swirl Component of Velocity

Meixian Yang

School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing Jiangsu

Received: Dec. 19th, 2023; accepted: Jan. 11th, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

In this paper, we consider the regularity criteria for the non-resistive axially symmetric Hall-MHD system whose swirl component of velocity is non-trivial. We show that if the swirl component of the magnetic field satisfies a Beale-Kato-Majda-type criterion, and the swirl component of the velocity satisfies a Prodi-Serrin-type criterion, then the strong solution can smoothly extend beyond

文章引用：杨美鲜．速度有旋的无磁阻抗轴对称 Hall-MHD 系统的正则性判别准则[J]．理论数学, 2024, 14(2): 783-798.
DOI: 10.12677/pm.2024.142076

a possible blow-up time.

Keywords

Non-Resistive, Hall-MHD System, Axially Symmetric, Regularity Criteria

1. 引言

1.1. 研究背景与意义

磁流体动力学(简称 MHD)主要研究等离子体等导流体在电磁场作用下的运动规律，其理论广泛应用于航空航天等工程领域中。与经典的 MHD 系统相比，Hall-MHD 系统可以用于描述等离子体、恒星形成、太阳耀斑、中子星中的磁重联现象(见[1] [2] [3])。但 Hall 效应项是一个包含未知函数二阶导数的非线性项，这让 Hall-MHD 系统比经典的 MHD 系统更加复杂。

近年来，学者们对 Hall-MHD 系统的适定性和正则性做了很多研究。值得一提的是，Chae-Degond-Liu [4]建立了弱解的全局存在性和 Sobolev 空间 $H^s\left(\mathbb{R}^3\right)(s>5/2)$ 的光滑解的局部适定性。随后，Chae-Wan-Wu [5]证明了具有分数阶磁扩散的 Hall-MHD 方程的局部适性。Benvenutti-Ferreira [6]证明了 H^2 强解的局部适定性。Dai [7]改进了 $H^s\left(\mathbb{R}^n\right)(s>n/2)$ 空间的局部适定性理论。更多大初值解的正则性准则，以及小初值解的全局适定性和渐近性在[8] [9] [10] [11] [12]中可以找到。最近，Li-Pan [13]证明了一类无磁阻抗和热扩散率的三维轴对称 MHD-Boussinesq 系统，如果其磁场只包含水平旋度分量，则三维 MHD-Boussinesq 系统的轴对称强解可以光滑地延拓到可能的爆破时间 T_* 之外，当且仅当速度的水平旋度分量满足 Prodi-Serrin 型准则：

$$\int_0^{T_*}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}(t,\cdot)\right\|_{L^p}^q \mathrm{d}t<\infty,\quad \text{其中 } s\ge 0,\ \frac{3}{p}+\frac{2}{q}\le 1+s,\ \frac{3}{1+s}<p\le\infty.$$

本文旨在运用类似的方法，得出无磁阻抗速度有旋的 Hall-MHD 系统在 $H^m\left(\mathbb{R}^3\right)(m\ge 3)$ 空间的解的正则性判别准则。我们希望通过探索这些问题，为现代偏微分方程理论注入新的思维和元素，同时加深我们对流体动力学中物理现象的理解，为流体力学、实验物理学等领域建立严格的理论数学基础。

1.2. 主要工作

本文考虑三维无磁阻抗的 Hall-MHD 系统：

$$\begin{cases}\partial_t\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\nabla p-\mu\Delta\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{h},\\ \partial_t\boldsymbol{h}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{h}+\nu_0\nabla\times\left[(\nabla\times\boldsymbol{h})\times\boldsymbol{h}\right]=\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{u},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{h}=0,\end{cases}\tag{1.1}$$

它描述了在磁场洛伦兹力和霍尔效应的双重作用下，不可压缩磁流体的运动规律以及相应磁场的变化规

律。

其中 $\boldsymbol{u}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 代表速度，$\boldsymbol{h}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 代表磁场，$p:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 代表压力。$\mu,\mu_0,\nu_0>0$ 分别表示恒定粘度、真空渗透率和霍尔效应的比值。不失一般性，我们在本文中假设 $\mu=\mu_0=\nu_0=1$。

大部分的证明是在柱坐标 (r,θ,z) 中进行的。对于 $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$，令：

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\quad \theta=\arctan\frac{x_2}{x_1},\quad z=x_3.$$

当

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}=u_r(t,r,z)\boldsymbol{e}_r+u_\theta(t,r,z)\boldsymbol{e}_\theta+u_z(t,r,z)\boldsymbol{e}_z,\\ \boldsymbol{h}=h_\theta(t,r,z)\boldsymbol{e}_\theta,\end{cases}$$

满足系统(1.1)时，我们称解 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})$ 为系统(1.1)的一个轴对称解。其中，基向量 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_z$ 为

$$\boldsymbol{e}_r=\left(\frac{x_1}{r},\frac{x_2}{r},0\right),\quad \boldsymbol{e}_\theta=\left(-\frac{x_2}{r},\frac{x_1}{r},0\right),\quad \boldsymbol{e}_z=(0,0,1).$$

则系统(1.1)可重写为：

$$\begin{cases}\partial_t u_r+(u_r\partial_r+u_z\partial_z)u_r-\dfrac{u_\theta^2}{r}+\partial_r p=\left(\Delta-\dfrac{1}{r^2}\right)u_r-\dfrac{h_\theta^2}{r},\\ \partial_t u_\theta+(u_r\partial_r+u_z\partial_z)u_\theta+\dfrac{u_r u_\theta}{r}=\left(\Delta-\dfrac{1}{r^2}\right)u_\theta,\\ \partial_t u_z+(u_r\partial_r+u_z\partial_z)u_z+\partial_z p=\Delta u_z,\\ \partial_t h_\theta+(u_r\partial_r+u_z\partial_z)h_\theta-\dfrac{2}{r}h_\theta\partial_z h_\theta=\dfrac{h_\theta u_r}{r},\\ \partial_r u_r+\dfrac{u_r}{r}+\partial_z u_z=0.\end{cases}\tag{1.2}$$

轴对称速度 $\boldsymbol{u}$ 的涡度 $\boldsymbol{w}$ 为：

$$\boldsymbol{w}=\nabla\times\boldsymbol{u}=-\partial_z u_\theta\cdot\boldsymbol{e}_r+(-\partial_r u_z+\partial_z u_r)\cdot\boldsymbol{e}_\theta+\left(\frac{u_\theta}{r}+\partial_r u_\theta\right)\cdot\boldsymbol{e}_z,$$

其中

$$w_r=-\partial_z u_\theta,\quad w_\theta=\partial_z u_r-\partial_r u_z,\quad w_z=\partial_r u_\theta+\frac{u_\theta}{r}.$$

它们满足：

$$\begin{cases}\partial_t w_\theta-\dfrac{u_r}{r}w_\theta+(u_z\partial_z+u_r\partial_r)w_\theta-\dfrac{2u_\theta}{r}\partial_z u_\theta=-\dfrac{1}{r}\partial_z(h_\theta)^2+\left(\Delta-\dfrac{1}{r^2}\right)w_\theta,\\ \partial_t w_r+(u_r\partial_r+u_z\partial_z)w_r=(w_z\partial_z+w_r\partial_r)u_r+\left(\Delta-\dfrac{1}{r^2}\right)w_r,\\ \partial_t w_z+(u_r\partial_r+u_z\partial_z)w_z=\Delta w_z+(w_r\partial_r+w_z\partial_z)u_z.\end{cases}\tag{1.3}$$

下面定义四个在证明主要定理时用到的量：

$$\mathcal{H}:=\frac{h_\theta}{r},\quad \Omega:=\frac{w_\theta}{r},\quad J:=\frac{w_r}{r},\quad \Gamma=:ru_\theta.$$

直接计算可知，它们满足如下方程组：

$$
\begin{cases}
\partial_t \Omega + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \Omega = \dfrac{\partial_z u_\theta^2}{r^2} - \partial_z \mathcal{H}^2 + \left(\Delta + \dfrac{2}{r} \partial_r \right) \Omega, \\
\partial_t J + \left(u_r \partial_r + u_z \partial_z \right) J = \left(\Delta + \dfrac{2}{r} \partial_r \right) J + \left(w_r \partial_r + w_z \partial_z \right) \left(\dfrac{u_r}{r} \right), \\
\partial_t \mathcal{H} + \left(u_z \partial_z + u_r \partial_r \right) \mathcal{H} = \partial_z \mathcal{H}^2, \\
\partial_t \Gamma + \left(u_r \partial_r + u_z \partial_z \right) \Gamma = \Delta \Gamma - \dfrac{2}{r} \partial_r \Gamma.
\end{cases} \tag{1.4}
$$

本文所使用的符号和约定如下：$\lesssim$等价于$C \le$，其中 C 是任意常数。我们用$C_{a,b,c,\cdots}$来表示一个与$a,b,c,\cdots$相关的正常数。对于$l_1,l_2,l_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，我们规定$\nabla^{\boldsymbol{L}} = \partial_{x_1}^{l_1} \partial_{x_2}^{l_2} \partial_{x_3}^{l_3}$，其中$|\boldsymbol{L}| = l_1 + l_2 + l_3$，为一个多重指标。$L^p$代表一般的带范数的勒贝格空间。$W^{k,p}$表示经典的 Sobolev 空间，$\dot{W}^{k,p}$表示一般的齐次 Sobolev 空间，它们对应的范数和半范数如下：

$$
\|f\|_{W^{k,p}} := \sum_{0 \le |L| \le k} \left\| \nabla^L f \right\|_{L^p},
$$

$$
|f|_{\dot{W}^{k,p}} := \sum_{|L| = k} \left\| \nabla^L f \right\|_{L^p},
$$

其中，$1 \le p \le \infty$且$k \in \mathbb{N}$。当$p = 2$时，我们分别用H^k和$\dot{H}^k$来代表$W^{k,p}$和$\dot{W}^{k,p}$。对于任意 Banach 空间X，如果$\left\| v(t,\cdot) \right\|_X \in L^p(0,T)$，那么我们说$v:[0,T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$属于 Banach 空间$L^p(0,T;X)$。

同时，将$L^p(0,T;X)$简记为$L_T^p X$。若一个函数 f 属于两个 Banach 空间X_1与X_2的交集，则将 f 的 Yudovich-型范数表示为：

$$
\|\boldsymbol{f}\|_{X_1 \cap X_2} := \|\boldsymbol{f}\|_{X_1} + \|\boldsymbol{f}\|_{X_2}.
$$

本文的主要结论如下：

定理 1.1 对任意$0 < T_* < \infty$，令$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}) \in C\left([0,T_*];H^m\left(\mathbb{R}^3\right)\right)(m \ge 3)$为系统(1.1)的强解，假设初始值$\left(u_0,h_0,\dfrac{h_0 \cdot \boldsymbol{e}_\theta}{r}\right) \in H^m\left(\mathbb{R}^3\right)$是轴对称的，且满足$\nabla \cdot u_0 = 0$。如果

$$
\int_0^{T_*} \left\| \frac{\partial_z h_\theta}{r}(t,\cdot) \right\|_{L^\infty} \mathrm{d}t + \int_0^{T_*} \left\| \frac{u_\theta}{r^s}(t,\cdot) \right\|_{L^p}^q \mathrm{d}t < \infty,
$$

那么$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})(t,\cdot)$在$T_*$时刻之前一直属于$H^m\left(\mathbb{R}^3\right)$，$\dfrac{3}{p} + \dfrac{2}{q} \le 1 + s$，$p > \dfrac{3}{1+s}$。

推论 1.2 对任意$0 < T_* < \infty$，令$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}) \in C\left([0,T_*];H^m\left(\mathbb{R}^3\right)\right)(m \ge 3)$为系统(1.1)的强解，假设初始值$\left(u_0,h_0,\dfrac{h_0 \cdot \boldsymbol{e}_\theta}{r}\right) \in H^m\left(\mathbb{R}^3\right)$是轴对称的，且满足$\nabla \cdot u_0 = 0$。如果

$$
\int_0^{T_*} \left\| \frac{\partial_z h_\theta}{r}(t,\cdot) \right\|_{L^\infty} \mathrm{d}t + \int_0^{T_*} \left\| \nabla \times \left(u_\theta \boldsymbol{e}_\theta \right) \right\|_{L^p}^q \mathrm{d}t < \infty,
$$

那么$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})(t,\cdot)$在$T_*$时刻之前一直属于$H^m\left(\mathbb{R}^3\right)$，其中$\dfrac{3}{p} + \dfrac{2}{q} \le 2$，$p > \dfrac{3}{2}$。

1.3. 创新点与拓展的方向

创新点：关于 Hall-MHD 系统的研究结果有很多，然而无磁阻抗的 Hall-MHD 系统研究结果几乎没有。其主要原因是：对于无磁阻抗的 Hall-MHD 系统，不能像处理有磁阻尼的 Hall-MHD 系统那样利用

DOI: 10.12677/pm.2024.142076

耗散项 $-\nu\Delta\boldsymbol{h}$ 控制高阶非线性霍尔效应项 $\nu_0\nabla\times\left[(\nabla\times\boldsymbol{h})\times\boldsymbol{h}\right]$。即使是速度场 $\boldsymbol{u}\equiv 0$，系统(1.4)也会在有限时间内爆破。为了解决这一困难，我们在之前研究无磁阻抗无旋系统的论文[14] [15]中，引入了磁场量相关量 $\mathcal{H}:=h_\theta/r$ 与速度场相关量 $\Omega:=w_\theta/r$，并对 $(\mathcal{H},\Omega)$ 所组成的系统进行能量估计。然而，对于无磁阻抗有旋的 Hall-MHD 系统，其初始速度的旋度分量不为 0，从而 $w_r=-\partial_z u_\theta$ 与 $w_z=\partial_r u_\theta+u_\theta/r$ 也不为零，因此不能像无旋系统那样仅利用 $(\mathcal{H},\Omega)$ 的系统进行能量估计。为此，本文额外引入速度场相关量 $J:=w_r/r$，对 $(\mathcal{H},\Omega,J)$ 所组成的系统进行能量估计，最终给出系统(1.4)的解的正则性判别准则。

拓展的方向：本文给出了无磁阻抗的 Hall-MHD 系统在 Sobolev 空间 $H^m(\mathbb{R}^3)(m\ge 3)$ 的正则性判别条件，但 Hall-MHD 系统在 Sobolev 空间 $H^m(\mathbb{R}^3)(m\ge 3)$ 的全局适定性问题仍未解决。此外，无磁阻抗的 Hall-MHD 系统在更低阶的 Sobolev 空间中的正则性判别准则，也是我们需要考虑的问题。

接下来，将在第 2 节中介绍一些必要的引理，主要结果的证明将在第 3 节和第 4 节中进行。

2. 准备工作

在本节中，我们将列出一些基本估计和不等式，它们将在本文剩余部分中经常用到。第一个是 Sobolev-Hardy 不等式：

引理 2.1 (Sobolev-Hardy 不等式) 设 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}$ 且 $2\le k\le n$，记 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}$。对任意 $\theta<k$，$1<q<n$，$0\le\theta\le q$，令 $q^*\in\left[q,\frac{q(n-\theta)}{n-q}\right]$。则存在一个正常数 $C=C(\theta,q,n,k)$，使得对所有 $\boldsymbol{f}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\boldsymbol{f}|^{q^*}}{|\boldsymbol{x}'|^\theta}\mathrm{d}x\le C\|\boldsymbol{f}\|_{L^q}^{\frac{n-\theta}{q^*}-\frac{n}{q}+1}\|\nabla\boldsymbol{f}\|_{L^q}^{\frac{n}{q^*}-\frac{n-\theta}{q^*}}.$$

特别地，令 $n=3$，$k=2$，$q=2$，$q^*\in\left[2,2(3-\theta)\right]$，并假设 $0\le\theta<2$，$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$。那么存在一个常数 $C=C(q^*,\theta)$ 使得对所有 $\boldsymbol{f}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，有

$$\left\|\frac{\boldsymbol{f}}{r^{\frac{\theta}{q^*}}}\right\|_{L^{q^*}}\le C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}^{\frac{3-\theta}{q^*}-\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{f}\|_{L^2}^{\frac{3}{2}-\frac{3-\theta}{q^*}}.$$

这里我们省略过程，感兴趣的读者参考[16]的引理 2.4。接下来，我们说 $\nabla\frac{u_r}{r}$ 可以由 $\frac{w_\theta}{r}$ 的 L^p 边界控制。这个证明可以在[14]中的命题 2.5 找到。

引理 2.2 定义 $\Omega:=\frac{w_\theta}{r}$，对任意 $1<p<+\infty$，存在一个绝对常数 $C_p>0$，使得：

$$\left\|\nabla\frac{u_r}{r}\right\|_{L^p}\le C_p\|\Omega\|_{L^p}.$$

下面是著名的 Gagliardo-Nirenberg 不等式(参见[17])：

引理 2.3 (Gagliardo-Nirenberg) 固定 $q,r\in[1,\infty]$，同时 $j,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，$j\le m$。假设 $f\in L^q\cap\dot{W}^{m,r}$，且存在一个实数 $\alpha\in[j/m,1]$ 使得

$$\frac{1}{p}=\frac{j}{3}+\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{3}\right)+\frac{1-\alpha}{q}.$$

那么 $f\in\dot{W}^{j,p}$ 并且存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\left\|\nabla^j f\right\|_{L^p} \le C\left\|\nabla^m f\right\|_{L^r}^{\alpha}\left\|f\right\|_{L^q}^{1-\alpha}.$$

以下两种情况除外：

1) $j=0$，$mr<d$ 且 $q=\infty$；(这种情况下需要假设，要么在无穷远处 $\boldsymbol{u}\to 0$，要么 $\boldsymbol{u}\in L^s$ 对于 $s<\infty$ 。)

2) $1<r<\infty$ 且 $m-j-3/r\in\mathbb{N}$。(这种情况下需要另外假设 $\alpha<1$。)

下面的结果可以由 Biot-Savart 定律和 Calderon-Zygmund 奇异积分算子的 L^p 有界性得到，在[18]中有详细的证明。

引理 2.4 令 $\boldsymbol{u}=u_r\boldsymbol{e}_r+u_\theta\boldsymbol{e}_\theta+u_z\boldsymbol{e}_z$ 为一个轴对称的散度为零的向量场，$\boldsymbol{w}=\nabla\times\boldsymbol{u}=w_r\boldsymbol{e}_r+w_\theta\boldsymbol{e}_\theta+w_z\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{b}=u_r\boldsymbol{e}_r+u_z\boldsymbol{e}_z$，对任意 $1<p<\infty$，我们有

$$\left\|\nabla\boldsymbol{b}\right\|_{L^p}\le C_p\left\|w_\theta\right\|_{L^p}，\quad \left\|\nabla^2\boldsymbol{b}\right\|_{L^p}\le C_p\left(\left\|\nabla w_\theta\right\|_{L^p}+\left\|\frac{w_\theta}{r}\right\|_{L^p}\right)$$

以及

$$\left\|\nabla\boldsymbol{u}\right\|_{L^p}\le C_p\left\|\boldsymbol{w}\right\|_{L^p}，\quad \left\|\nabla^2\boldsymbol{u}\right\|_{L^p}\le C_p\left\|\nabla\boldsymbol{w}\right\|_{L^p}.$$

下面我们将介绍一个在研究 Navier-Stokes 方程中经常用到的时空插值。它通过在 L^2 和 L^6 之间插值 $L^p(2\le p\le 6)$ 范数得到，证明过程可参考[13]引理 2.2。

引理 2.5 如果 $\boldsymbol{u}\in L^\infty\left(0,T;L^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\cap L^2\left(0,T;\dot{H}^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$，那么 $\boldsymbol{u}\in L^q\left(0,T;L^p\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$，其中 $\frac{2}{q}+\frac{3}{p}\ge\frac{3}{2}$，$2\le p\le 6$ 。

下面的引理陈述了 $L_T^rL^p$ -型空间中热流的标准最大正则性。可以在[19]的定理 7.3 中找到证明。

引理 2.6 (热流的最大 $L_T^qL^p$ 正则性) 算子 $\mathcal{A}$ 定义为：

$$\mathcal{A}:\quad \boldsymbol{f}\mapsto\int_0^t\nabla^2\mathrm{e}^{(t-s)\Delta}\boldsymbol{f}(s,\cdot)\mathrm{d}s.$$

则对所有 $T\in(0,\infty]$，$1<p$ 且 $q<\infty$，$L^q\left(0,T;L^p\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ 到它本身是有界的，并且有：

$$\left\|\mathcal{A}\boldsymbol{f}\right\|_{L^q\left(0,T;L^p\left(\mathbb{R}^d\right)\right)}\le C\left\|\boldsymbol{f}\right\|_{L^q\left(0,T;L^p\left(\mathbb{R}^d\right)\right)}. \tag{2.1}$$

最后，我们聚焦下列三重线性形式的估计，这在最后的证明中将经常用到。参阅[15]了解引理的证明过程。

引理 2.7 令 $m\in\mathbb{N}$，且 $m\ge 2$，$f,g,k\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$，那么有下面估计式：

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left[\nabla^m,\boldsymbol{f}\cdot\nabla\right]\boldsymbol{g}\nabla^m\boldsymbol{k}\mathrm{d}x\right|\le C\left\|\nabla^m(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{k})\right\|_{L^2}^2\left\|\nabla(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\right\|_{L^\infty}.$$

3. 定理 1.1 的证明

我们将定理 1.1 的证明分解为以下步骤。首先，由引理 3.1，我们得到了 L^p 空间中 $\mathcal{H}$ 的守恒定律。其次，我们需要分别处理 Ω 和 J 的方程，并结合两个方程来估计组合量 (Ω,J)。下一步是做 $\frac{u_r}{r}$ 的 $L_t^1L^\infty$ 估计。接下来，估计 h_θ 和 $\boldsymbol{w}$。由涡度 $\boldsymbol{w}$ 的 $L_{T_*}^\infty L^2$ 估计和引理 2.4 的结果 $\left\|\nabla\boldsymbol{u}\right\|_{L^p}\le C_p\left\|\boldsymbol{w}\right\|_{L^p}$，我们可以得到 $\boldsymbol{u}$ 的 $L_{T_*}^1L^\infty$ 估计。然后得到 $\nabla\boldsymbol{h}$ 和 $\nabla\mathcal{H}$ 的 $L_{T_*}^\infty L^\infty$ 有界性。最后，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},\mathcal{H})$ 的高阶估计完成了整个证明。

3.1. 基本能量估计

下面的引理是[13]的引理 3.1 和[15]的引理 3.1 的直接推论：

引理 3.1 (基本能量估计) 令$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})$为系统(1.2)的一个光滑解，我们有：

1) 对任意 $p\in[1,\infty]$，$t\in\mathbb{R}_+$，

$$\begin{aligned}&\left\|\mathcal{H}(t,\cdot)\right\|_{L^p}=\left\|\mathcal{H}_0\right\|_{L^p};\\&\left\|\Gamma(t,\cdot)\right\|_{L^p}\le\left\|\Gamma_0\right\|_{L^p}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

2) 对于 $u_0,h_0\in L^2$ 且 $t\in\mathbb{R}_+$，我们有

$$\left\|\left(\boldsymbol{u}(t,\cdot),\boldsymbol{h}(t,\cdot)\right)\right\|_{L^2}^2+\int_0^t\left\|\nabla\boldsymbol{u}(s,\cdot)\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\le C_0(1+t)^2,\tag{3.2}$$

其中 C_0 只依赖于 $\left\|(u_0,h_0)\right\|_{L^2}$。

3.2. (Ω,J) 的 $L_t^\infty L^2\cap L_t^2\dot{H}^1$ 估计与 $\frac{u_r}{r}$ 的 $L_t^1L^\infty$ 估计

命题 3.2 定义 $\Omega:=\frac{w_\theta}{r}$，$J:=\frac{w_r}{r}$。令$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})$为系统(1.2)的唯一局部轴对称解，初值 $(u_0,h_0)\in H^m(\mathbb{R}^3)(m\ge3)$，则下面$(\Omega,J)$的 $L_t^\infty L^2\cap L_t^2\dot{H}^1$ 估计成立：

$$\sup_{0\le t\le T_*}\left\|(\Omega,J)(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2+\int_0^{T_*}\left\|\nabla(\Omega,J)(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2<\infty.$$

证明 我们从 Ω 开始估计，在方程$(1.4)_1$两边乘以 Ω，并在 $\mathbb{R}^3$ 上积分得到：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\Omega(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\Omega(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2=\underbrace{-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Omega^2\mathrm{d}x}_{O_1}+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial_r\Omega^2}{r}\mathrm{d}x}_{O_2}\underbrace{-\int_{\mathbb{R}^3}\Omega\cdot\partial_z\mathcal{H}^2\mathrm{d}x}_{O_3}+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial_z(u_\theta)^2\cdot\Omega}{r^2}\mathrm{d}x}_{O_4}.$$

首先处理 O_1，O_2 和 O_3。

$$O_1=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\cdot\Omega^2\mathrm{d}x=0.$$

$$O_2=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial_r\Omega^2}{r}\cdot r\mathrm{d}z\mathrm{d}r=2\pi\int_{\mathbb{R}}\Omega^2(t,\infty,z)-\Omega^2(t,0,z)\mathrm{d}z=-2\pi\int_{\mathbb{R}}\Omega^2(t,0,z)\le0.$$

最后一个等式是由 $\boldsymbol{u}$ 在边界上为 0 得到的。

$$O_3=\left|\int_{\mathbb{R}^3}\partial_z\Omega\cdot\mathcal{H}^2\right|\le\left\|\partial_z\Omega(t,\cdot)\right\|_{L^2}\left\|\mathcal{H}(t,\cdot)\right\|_{L^4}^2\le\frac{1}{2}\left\|\partial_z\Omega(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|\mathcal{H}(t,\cdot)\right\|_{L^4}^4.$$

接下来估计 O_4。

$$\begin{aligned}O_4&=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{2u_\theta\partial_zu_\theta}{r^2}\Omega\mathrm{d}x=-\int\frac{2u_\theta}{r}\cdot J\cdot\Omega\mathrm{d}x\\&\le2\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{u_\theta}{r}\right|^{\frac{1}{2}}|J|\mathrm{d}x\cdot\int\left|\frac{u_\theta}{r}\right|^{\frac{1}{2}}|\Omega|\mathrm{d}x\\&\le\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{u_\theta}{r}\right||J|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{u_\theta}{r}\right||\Omega|^2\mathrm{d}x\\&\triangleq O_{41}+O_{42}.\end{aligned}$$

上面结果是由 Cauchy-Schwartz 不等式和 Young 不等式得到的。接下来，分别对 O_{41} 与 O_{42} 进行估计，从而得到 O_4 的估计。

$$O_{41}=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|u_\theta|}{r^s}\frac{|J|^2}{r^{1-s}}\mathrm{d}x\le C\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}\left\|\frac{|J|^2}{r^{1-s}}\right\|_{L^{p'}}.$$

这里我们运用了 Hölder 不等式，其中 $p'=\dfrac{p}{p-1}$。

情形 1： $0\le s\le 1$

利用引理 2.1，我们有：

$$\left\|\frac{\left|J(t,\cdot)\right|^2}{r^{1-s}}\right\|_{L^{p'}}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|J|^{2p'}}{r^{(1-s)p'}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|J|^{2p'}}{r^{\frac{(1-s)p'}{2p'}\cdot 2p'}}\right)^{\frac{1}{2p'}\cdot 2}$$
$$\le\left(C\|J(t,\cdot)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2}-\frac{3}{2p}}\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}+\frac{3}{2p}}\right)^2,$$

其中，$\theta=(1-s)p'$，$q^*=2p'$。因此，通过 Young 不等式，O_{41} 可以估计如下。

当 $p>\dfrac{3}{1+s}$：

$$O_{41}\le C\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}\|J(t,\cdot)\|_{L^2}^{1+s-\frac{3}{p}}\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^{1-s+\frac{3}{p}}\le C\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}^{\frac{2p}{p(1+s)-3}}\|J(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^2.$$

当 $p=\dfrac{3}{1+s}$：

$$O_{41}\le C_s\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^2.$$

类似地，O_{42} 可以估计如下：

$$O_{42}\le\begin{cases}C_{s,p}\left\|\dfrac{u_\theta}{r^s}(t,\cdot)\right\|_{L^p}^{\frac{2p}{(1+s)p-3}}\|\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\dfrac{1}{4}\|\nabla\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2, & \text{当 } p>\dfrac{3}{1+s};\ \text{s}\\ C_s\left\|\dfrac{u_\theta}{r^s}(t,\cdot)\right\|_{L^p}\|\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2, & \text{当 } p=\dfrac{3}{1+s}.\end{cases}$$

情形 2： $s>1$

当 $p>\dfrac{3}{1+s}$：

$$O_{41}=\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{u_\theta}{r^s}\right|^{\frac{2}{s+1}}\cdot(ru_\theta)^{\frac{s-1}{s+1}}\cdot|J(t,\cdot)|^2\,\mathrm{d}x\le\|\Gamma_0\|_{L^{\frac{2p(1+s)}{(1+s)(p-2)+2}}}^{\frac{s-1}{s+1}}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}^{\frac{2}{s+1}}\|J(t,\cdot)\|_{L^{\frac{2p(1+s)}{p(1+s)-2}}}^2$$
$$\le\|\Gamma_0\|_{L^{\frac{2p(1+s)}{(1+s)(p-2)+2}}}^{\frac{s-1}{s+1}}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}^{\frac{2}{s+1}}\|J(t,\cdot)\|_{L^2}^{1-\frac{3}{p(1+s)}}\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^{\frac{3}{p(1+s)}}\le C_{\|\Gamma_0\|_{L^\infty},s,p}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}^{\frac{2p}{(1+s)p-3}}\|J(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^2.$$

这里，第一个不等式使用了 Hölder 不等式和引理 3.1，第二个和第三个不等式分别使用引理 2.1 和 Young 不等式。

当 $p=\dfrac{3}{1+s}$：

$$O_{41}\le C_s\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^2.$$

类似地，我们得到 O_{42} 的估计。

当 $p>\frac{3}{1+s}$：

$$O_{42}\le C_{\|\Gamma_0\|_{L^\infty},s,p}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}^{\frac{2p}{(1+s)p-3}}\|\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|\nabla\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2.$$

当 $p=\frac{3}{1+s}$：

$$O_{42}\le C_s\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}\|\nabla\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2.$$

由此可得：

当 $p>\frac{3}{1+s}$：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|\nabla\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2\le\frac{1}{2}\|\mathcal{H}(t,\cdot)\|_{L^4}^4+\frac{1}{4}\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^2+C_{\|\Gamma_0\|_{L^\infty},s,p}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}^{\frac{2p}{(1+s)p-3}}\left(\|\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\|J(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right).$$

那么，由引理 3.1 的方程$(3.1)_1$，推导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\nabla\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2\le C+\frac{1}{2}\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^2+C_{\|\Gamma_0\|_{L^\infty},s,p}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}^{\frac{2p}{(1+s)p-3}}\left(\|\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\|J(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right).\tag{3.3}$$

当 $p=\frac{3}{1+s}$：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\|\nabla\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2\le\frac{1}{2}\|\nabla\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\mathcal{H}(t,\cdot)\|_{L^4}^4+C_{\|\Gamma_0\|_{L^\infty},s,p}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}\left(\|\nabla\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right).$$

这等价于下面这个方程。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\|\nabla\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2\le C_{\|\Gamma_0\|_{L^\infty},s,p}\left(1+\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}\left(\|\nabla\Omega(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right)\right).\tag{3.4}$$

接下来，处理 J 的方程。类似于 Ω 方程的处理，我们将方程(1.4)乘以 J，并对 $\mathbb{R}^3$ 积分，得到以下结果。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|J(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^2&\le\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla\times(u_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta)\right)\cdot\nabla\left(\frac{u_r}{r}\right)\cdot J\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^3}u_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta\cdot\left(\nabla J\times\nabla\frac{u_r}{r}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^3}u_\theta\left(\partial_r\frac{u_r}{r}\partial_z J-\partial_z\frac{u_r}{r}\partial_r J\right)\mathrm{d}x\\&\le\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|u_\theta|^2\left|\nabla\frac{u_r}{r}\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\|\nabla J(t,\cdot)\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

第一个不等式使用了下列计算结果。

$$\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{u}\cdot\nabla J\cdot J\mathrm{d}x=0.$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{r}\partial_r\left(\frac{\partial_z u_\theta}{r}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial_r}{r}\left(\frac{\partial_z u_\theta}{r}\right)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}r\le 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(w_r\partial_r + w_z\partial_z\right)\left(\frac{u_r}{r}\right)J\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla\times\left(u_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta\right)\right)\cdot\nabla\left(\frac{u_r}{r}\right)\cdot J\mathrm{d}x.$$

所以我们得到了以下的不等式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 \lesssim \int_{\mathbb{R}^3}\left|u_\theta\right|^2\left|\nabla\frac{u_r}{r}\right|^2\mathrm{d}x.$$

然后用与估计 O_{41} 相同的方法对 J 的方程进行处理。

当 $p > \dfrac{3}{1+s}$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 \le \left\|\Gamma_0\right\|_{L^\infty}^{\frac{2s}{s+1}}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{u_\theta}{r^s}\right|^{\frac{2}{s+1}}\left|\nabla\frac{u_r}{r}\right|^2\mathrm{d}x.$$

接下来，我们使用 Hölder 不等式和引理 2.2 得到以下估计。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 &\le \left\|\Gamma_0\right\|_{L^\infty}^{\frac{2s}{s+1}}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}^{\frac{2}{s+1}}\left\|\nabla\frac{u_r}{r}\right\|_{L^2}^{2-\frac{6}{p(1+s)}}\left\|\nabla\frac{u_r}{r}\right\|_{L^6}^{\frac{6}{p(1+s)}}\\ &\le \left\|\Gamma_0\right\|_{L^\infty}^{\frac{2s}{s+1}}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}^{\frac{2}{s+1}}\cdot\left\|\Omega\right\|_{L^2}^{2-\frac{6}{p(1+s)}}\left\|\nabla\Omega\right\|_{L^6}^{\frac{6}{p(1+s)}}\\ &\le C_{\left\|\Gamma_0\right\|_{L^\infty},s,p}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}^{\frac{2p}{(1+s)p-3}}\left\|\Omega\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\left\|\nabla\Omega\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{3.5}$$

当 $p = \dfrac{3}{1+s}$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 \le C_{\left\|\Gamma_0\right\|_{L^\infty},s,p}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^{\frac{3}{1+s}}}^{\frac{2}{s+1}}\left\|\nabla\Omega\right\|_{L^2}^2.\tag{3.6}$$

结合(3.3)与(3.5)很容易得到：

当 $p > \dfrac{3}{1+s}$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\Omega(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 + \left\|J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\right) + \left(\left\|\nabla\Omega\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla J\right\|_{L^2}^2\right) \le C + C_{\left\|\Gamma_0\right\|_{L^\infty},s,p}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}\right\|_{L^p}^{\frac{2p}{(1+s)p-3}}\left(\left\|\Omega\right\|_{L^2}^2 + \left\|J\right\|_{L^2}^2\right).$$

对上述两个方程应用 Gronwall 不等式和定理 1.1 中的条件 $\int_0^{T_*}\left\|\frac{u_\theta}{r^s}(t,\cdot)\right\|_{L^p}^q\mathrm{d}t < \infty$ 得到：

$$\begin{aligned}&\left\|\Omega(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 + \left\|J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 + \int_0^t\left\|\nabla\Omega(k,\cdot)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla J(k,\cdot)\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}k\\ &\le \mathrm{e}^{C_{\left\|\Gamma_0\right\|_{L^\infty},s,p}\int_0^t\left\|\frac{u_\theta}{r^s}(k,\cdot)\right\|_{L^p}^{\frac{2p}{(1+s)p-3}}\mathrm{d}k}\cdot\left[\int_0^t C\mathrm{d}k + \left\|\Omega_0\right\|_{L^2}^2 + \left\|J_0\right\|_{L^2}^2\right] < \infty.\end{aligned}\tag{3.7}$$

同样，结合(3.4)和(3.6)，并用上述方法处理得到：

当 $p = \dfrac{3}{1+s}$：

$$\begin{aligned}&\left\|\Omega(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 + \left\|J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 + \int_0^t\left\|\nabla\Omega(k,\cdot)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla J(k,\cdot)\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}k\\ &\le \mathrm{e}^{\int_0^t C\mathrm{d}k}\left[C + C_{\left\|\Gamma_0\right\|_{L^\infty},s,p}\left(1 + \left\|\frac{u_\theta}{r^s}(0,r,z)\right\|_{L^p}\left(\left\|\nabla\Omega_0\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla J_0\right\|_{L^2}^2\right)\right)\right] < \infty.\end{aligned}\tag{3.8}$$

结合方程(3.7)和(3.8)，命题 3.2 得证。

与[15]中对推论 3.3 的证明一样，根据引理 2.2，并利用如下插值不等式：

$$\left\|\frac{u_r}{r}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty} \le C\left\|\frac{u_r}{r}(t,\cdot)\right\|_{L^6}^{1/2}\left\|\nabla\frac{u_r}{r}(t,\cdot)\right\|_{L^6}^{1/2},$$

我们可以得到命题 3.2 的如下推论。

推论 3.3 在与命题 3.2 相同的假设下，对于任何 $t\in(0,T_*]$，$\frac{u_r}{r}$ 满足：

$$\int_0^t\left\|\frac{u_r}{r}(s,\cdot)\right\|_{L^\infty}\mathrm{d}s<\infty.$$

3.3. h_θ 和 w_θ 的 $L^\infty_{T_*}L^p$ -有界性

接下来，我们的目标是推导出 h_θ 和 w_θ 的 $L^\infty_{T_*}L^p$ 估计。我们有以下结果：

命题 3.4 在与定理 1.1 相同的假设下，我们对 h_θ 和 w_θ 的估计如下

$$\begin{aligned}&\left\|h_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^p}\le\left\|h_0\right\|_{L^p}\exp\left(C\int_0^t\left[\left\|\frac{u_r}{r}(s,\cdot)\right\|_{L^\infty}+\left\|\partial_z\mathcal{H}(s,\cdot)\right\|_{L^\infty}\right]\mathrm{d}s\right)<\infty,\\&\sup_{0\le t\le T_*}\left\|w_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2+\int_0^{T_*}\left\|\nabla w_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t+\int_0^{T_*}\left\|\frac{w_\theta}{r}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t<\infty.\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中 $C>0$ 是一个通用常数。

证明 $(3.9)_1$ 的第一个不等式在[15]中有详细的证明过程，我们不在这里展开。然后利用推论 3.3 以及判别条件 $\int_0^{T_*}\left\|\frac{\partial_z h_\theta}{r}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}\mathrm{d}t<\infty$，可以导出$(3.9)_1$ 的第二个不等式。

接下来，对$(1.3)_1$ 执行标准 L^2 内积，推导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|w_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla w_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2+\left\|\frac{w_\theta}{r}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\le C\left(\left\|u_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}\left\|\nabla u_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}\left\|J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2+\left\|\mathcal{H}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}^2\left\|h_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\right).$$

在 $[0,T_*]$ 上关于 t 积分，由 u_θ 和 h_θ 的 $L^\infty_T L^2$ 估计、$\mathcal{H}$ 的 $L^\infty_T L^\infty$ 估计以及命题 3.2 中 (Ω,J) 的 $L^\infty_T L^2$ 估计推导出以下最终不等式

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le t\le T_*}\left\|w_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2+\int_0^{T_*}\left\|\nabla w_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t+\int_0^{T_*}\left\|\frac{w_\theta}{r}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\\&\lesssim\sup_{0\le t\le T_*}\left\|u_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}\sup_{0\le t\le T_*}\left\|J(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\int_0^{T_*}\left\|\nabla u_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t+\left\|\mathcal{H}_0\right\|_{L^\infty}^2T_*\sup_{0\le t\le T_*}\left\|h_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2<\infty.\end{aligned}$$

3.4. w 的 $L^\infty_T L^2\cap L^2_T H^1$ 估计与 ∇u 的 $L^1_T L^\infty$ 估计

命题 3.5 在与定理 1.1 相同的假设下，我们有 $\boldsymbol{w}$ 的 $L^\infty_T L^2\cap L^2_T H^1$ 估计。

证明 在方程$(1.3)_2$ 和$(1.3)_3$ 分别做 L^2 能量估计，并将得到的结果式子相加，再利用 Gronwall 不等式即可得到：

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le t\le T_*}\left\|(w_r,w_z)(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2+\int_0^{T_*}\left(\left\|(\nabla w_r(t,\cdot),\nabla w_z(t,\cdot))\right\|+\left\|\frac{w_r}{r}(t,\cdot)\right\|_{L^2}\right)\mathrm{d}t\\&\le\left\|(w_r(0,\cdot),w_z(0,\cdot))\right\|_{L^2}^2\exp\left(C\int_0^{T_*}\left\|\boldsymbol{b}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}^2\mathrm{d}t\right).\end{aligned}\tag{3.10}$$

这里 $\boldsymbol{b}=u_r\boldsymbol{e}_r+u_z\boldsymbol{e}_z$。对于(3.10)右边指数函数的内部，可以利用 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式、引

理 2.4 和 Hölder 不等式，以及估计式(3.10)$_2$ 推导出：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{T_*}\left\|\nabla \boldsymbol{b}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}^2 \mathrm{d}t \\
&\le C\int_0^{T_*}\left\|\nabla \boldsymbol{b}(t,\cdot)\right\|_{L^2}\left\|\nabla^2 \boldsymbol{b}(t,\cdot)\right\|_{L^2}\mathrm{d}t \\
&\le C\int_0^{T_*}\left\|w_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}\left(\left\|\nabla w_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}+\left\|\frac{w_\theta}{r}(t,\cdot)\right\|_{L^2}\right)\mathrm{d}t \\
&\le C\left(\int_0^{T_*}\left\|w_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_0^{T_*}\left(\left\|\nabla w_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2+\left\|\frac{w_\theta}{r}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&<\infty.
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\sup_{0\le t\le T_*}\left\|(w_r,w_z)(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2+\int_0^{T_*}\left(\left\|\nabla(w_r,w_z)(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2+\left\|\frac{w_r}{r}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}t<\infty. \tag{3.11}
$$

结合(3.9)$_2$ 和(3.11)得到我们的结论。

命题 3.6 在与定理 1.1 相同的条件下，我们有 $\nabla \boldsymbol{u}$ 的 $L_T^1L^\infty$ 估计。

首先回顾 $\boldsymbol{w}$ 的方程。

$$
\begin{cases}
\partial_t \boldsymbol{w}-\Delta \boldsymbol{w}=\nabla\times(\boldsymbol{u}\cdot\nabla \boldsymbol{u})-\nabla\times(\boldsymbol{h}\cdot\nabla \boldsymbol{h}),\\
\boldsymbol{w}(0,x)=\nabla\times \boldsymbol{u}_0(x).
\end{cases}
$$

为了简化证明过程，我们把 $\boldsymbol{w}$ 拆成三个部分：

$$
\boldsymbol{w}:=\boldsymbol{w}_0+\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2,
$$

其中，w_0 为初值为 $\nabla\times \boldsymbol{u}_0(x)$ 的线性抛物型方程的解：

$$
\begin{cases}
\partial_t \boldsymbol{w}_0-\Delta \boldsymbol{w}_0=0,\\
\boldsymbol{w}(0,x)=\nabla\times \boldsymbol{w}_0(x).
\end{cases}
$$

当 $t>0$ 时，我们只需要考虑 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$，因为 $\boldsymbol{w}_0$ 已经满足证明所需的正则性。同时，具有齐次初始值的 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$ 分别满足

$$
\partial_t \boldsymbol{w}_1-\Delta \boldsymbol{w}_1=-\nabla\times(\boldsymbol{h}\cdot\nabla \boldsymbol{h})
$$

和

$$
\partial_t \boldsymbol{w}_2-\Delta \boldsymbol{w}_2=\nabla\times(\boldsymbol{u}\cdot\nabla \boldsymbol{u}).
$$

直接计算可知：

$$
\boldsymbol{h}\cdot\nabla \boldsymbol{h}=-\mathcal{H}h_\theta \boldsymbol{e}_r.
$$

再由引理 3.1 中 $\mathcal{H}$ 的基本能量估计和命题 3.4 中 h_θ 的估计，推导出

$$
\boldsymbol{h}\cdot\nabla \boldsymbol{h}\in L^\infty\left(0,T_*;L^4\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\subset L^{4/3}\left(0,T_*;L^p\left(\mathbb{R}^3\right)\right).
$$

因此通过应用引理 2.6 中热流的最大规律性，$\nabla \boldsymbol{w}_1$ 满足

$$
\nabla \boldsymbol{w}_1\in L^{4/3}\left(0,T_*;L^4\left(\mathbb{R}^3\right)\right).
$$

对于 w_2，通过引理 2.5 中的在 $L_T^2H^1$ 与 $L_T^\infty L^2$ 之间插值范数，得到

$$\nabla \boldsymbol{u} \in L^{8/3}\left(0,T_*;L^4\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

根据引理 2.3，我们有

$$\left\|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty} \lesssim \left\|\nabla \boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^4}^{6/7}\left\|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^{1/7}.$$

接下来，考虑引理 3.1 中 $\boldsymbol{u}$ 的基本能量估计，可以得到

$$\int_0^{T_*}\left\|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}^{8/3}\mathrm{d}t \lesssim \left\|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty\left(0,T_*;L^2\right)}^{8/21}\int_0^{T_*}\left\|\nabla \boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^4}^{16/7}\mathrm{d}t \lesssim \left\|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty\left(0,T_*;L^2\right)}^{8/21}\left(\int_0^{T_*}\left\|\nabla \boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^4}^{8/3}\mathrm{d}t\right)^{6/7}T_*^{1/7}<\infty.$$

我们有

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla \boldsymbol{u} \in L^{4/3}\left(0,T_*;L^4\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

根据引理 2.6 中的(2.1)，显然有

$$\nabla \boldsymbol{w}_2 \in L^{4/3}\left(0,T_*;L^4\left(\mathbb{R}^3\right)\right).$$

然后是 $\boldsymbol{w}_1$ 的估计和 $\boldsymbol{w}_2$ 的估计

$$\boldsymbol{w} \in L^{4/3}\left(0,T_*;L^4\left(\mathbb{R}^3\right)\right). \tag{3.12}$$

现在结合引理 2.3 和引理 2.4 得到

$$\left\|\nabla \boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty} \lesssim \left\|\nabla \boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^{1/7}\left\|\nabla^2 \boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^4}^{6/7} \lesssim \left\|\boldsymbol{w}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^{1/7}\left\|\nabla \boldsymbol{w}(t,\cdot)\right\|_{L^4}^{6/7}.$$

利用(3.12)，即可得到命题 3.6，因为：

$$\int_0^{T_*}\left\|\nabla \boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}\mathrm{d}t \lesssim \left\|\boldsymbol{w}\right\|_{L^\infty\left(0,T_*;L^2\right)}^{1/7}\int_0^{T_*}\left\|\nabla \boldsymbol{w}(t,\cdot)\right\|_{L^4}^{6/7}\mathrm{d}t \le \left\|\boldsymbol{w}\right\|_{L^\infty\left(0,T_*;L^2\right)}^{1/7}\left(\int_0^{T_*}\left\|\nabla \boldsymbol{w}(t,\cdot)\right\|_{L^4}^{4/3}\mathrm{d}t\right)^{14/9}T_*^{5/14}<\infty.$$

3.5. $\nabla \boldsymbol{h}$ 和 $\nabla \mathcal{H}$ 的 $L_{T_*}^\infty L^\infty$-有界性

命题 3.7 与定理 1.1 相同的假设条件，则下列 $\nabla \boldsymbol{h}$ 与 $\nabla \mathcal{H}$ 的 L^∞ 估计在 $t \le T_*$ 上一致成立：

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla \boldsymbol{h}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty} \le \left\|\nabla \boldsymbol{h}_0\right\|_{L^\infty}\exp\left(C\int_0^t\left(\left\|\nabla \boldsymbol{u}(s,\cdot)\right\|_{L^\infty}+\left\|\partial_z \mathcal{H}(s,\cdot)\right\|_{L^\infty}\right)\mathrm{d}s\right),\\
&\left\|\nabla \mathcal{H}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty} \le \left\|\nabla \mathcal{H}_0\right\|_{L^\infty}\exp\left(C\int_0^t\left(\left\|\nabla \boldsymbol{u}(s,\cdot)\right\|_{L^\infty}+\left\|\partial_z \mathcal{H}(s,\cdot)\right\|_{L^\infty}\right)\mathrm{d}s\right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 $C>0$ 是一个通用常数。

证明 首先，注意到

$$\left|\nabla \boldsymbol{h}\right| \simeq \left|\partial_r h_\theta\right| + \left|\partial_z h_\theta\right| + \left|\mathcal{H}\right|.$$

$\mathcal{H}$ 的 $L_{T_*}^\infty L^\infty$ 估计已经在引理 3.1 中得到，因此我们只需要关注剩下的两项 $\partial_r h_\theta$ 和 $\partial_z h_\theta$。对方程(1.2)$_4$ 分别应用 $\bar{\nabla}=\left(\partial_r,\partial_z\right)$，然后对得到的两个结果方程分别执行 $L^p\left(2\le p<\infty\right)$ 能量估计，得到：

$$\left\|\bar{\nabla} h_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^p}^p \le Cp\left\|\bar{\nabla} h_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^p}^{p-1}\left(\left\|\nabla \boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}+\left\|\partial_z \mathcal{H}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}\right)\times\left(\left\|\bar{\nabla} h_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^p}+\left\|\mathcal{H}(t,\cdot)\right\|_{L^p}\right). \tag{3.14}$$

在方程(3.14)两边同时除以 $p\left\|\bar{\nabla} h_\theta(t,\cdot)\right\|_{L^p}^{p-1}$，并注意到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\mathcal{H}(t,\cdot)\right\|_{L^p}\equiv 0$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla \boldsymbol{h}(t,\cdot)\right\|_{L^p} \le C\left(\left\|\nabla \boldsymbol{u}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}+\left\|\partial_z \mathcal{H}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}\right)\left\|\nabla \boldsymbol{h}(t,\cdot)\right\|_{L^p}.$$

由此，通过 Gronwall 不等式，我们有以下估计：

$$\|\nabla \boldsymbol{h}(t,\cdot)\|_{L^p} \le \|\nabla h_0\|_{L^p} \exp\left(C\int_0^t \left(\|\nabla \boldsymbol{u}(s,\cdot)\|_{L^\infty} + \|\partial_z \mathcal{H}(s,\cdot)\|_{L^\infty}\right)\mathrm{d}s\right), \quad \forall t \in (0,T_*].$$

上面的常数 C 与 $p \in [2,\infty)$ 无关。令 $p \to \infty$，我们得到(3.13)$_1$。

对方程(1.4)$_3$两边同时应用 ∂_r，然后两边乘以 $p\partial_r\mathcal{H}|\partial_r\mathcal{H}|^{p-2}$，并在 $\mathbb{R}^3$ 上积分，我们得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_r\mathcal{H}(t,\cdot)\|_{L^p}^p \le 2p\int_{\mathbb{R}^3}\partial_z\mathcal{H}|\partial_r\mathcal{H}|^p\,\mathrm{d}x + \underbrace{2p\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{H}\partial_r\partial_z\mathcal{H}\partial_r\mathcal{H}|\partial_r\mathcal{H}|^{p-2}\,\mathrm{d}x}_{N_H} \\ + Cp\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla \boldsymbol{u}||\nabla\mathcal{H}||\partial_r\mathcal{H}|^{p-1}\,\mathrm{d}x, \quad p \ge 2. \tag{3.15}$$

通过分部积分，N_H 可以被估计如下：

$$N_H = 2\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{H}\partial_z|\partial_r\mathcal{H}|^p\,\mathrm{d}x = -2\int_{\mathbb{R}^3}\partial_z\mathcal{H}|\partial_r\mathcal{H}|^p\,\mathrm{d}x.$$

把上述结果代入方程(3.15)，然后应用 Hölder 不等式得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_r\mathcal{H}(t,\cdot)\|_{L^p}^p \lesssim p\left(\|\nabla \boldsymbol{u}(s,\cdot)\|_{L^\infty} + \|\partial_z\mathcal{H}(s,\cdot)\|_{L^\infty}\right)\|\nabla\mathcal{H}(t,\cdot)\|_{L^p}^p. \tag{3.16}$$

用同样的方法，对(1.4)$_3$两边关于 z 求导，并做执行 L^p 估计，得到以下结果：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_z\mathcal{H}(t,\cdot)\|_{L^p}^p \lesssim p\left(\|\nabla \boldsymbol{u}(s,\cdot)\|_{L^\infty} + \|\partial_z\mathcal{H}(s,\cdot)\|_{L^\infty}\right)\|\nabla\mathcal{H}(t,\cdot)\|_{L^p}^p. \tag{3.17}$$

结合方程(3.16)和(3.17)，在不等式两边同时除以 $p\|\nabla\mathcal{H}(t,\cdot)\|_{L^p}^{p-1}$，我们可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\mathcal{H}(t,\cdot)\|_{L^p} \lesssim \left(\|\nabla \boldsymbol{u}(s,\cdot)\|_{L^\infty} + \|\partial_z\mathcal{H}(s,\cdot)\|_{L^\infty}\right)\|\nabla\mathcal{H}(t,\cdot)\|_{L^p}.$$

注意到上述估计与 $p \ge 2$ 是一致的。利用 Gronwall 不等式，令 $p \to \infty$，即证引理。

3.6. 高阶估计

最后，我们推导出了系统(1.1)的高阶估计。我们通过联合系统(1.1)和 $\mathcal{H}$ 的能量估计，从而克服缺乏磁场阻尼所产生的困难。具体证明可参见[15] 3.7 节。我们在这里仅给出证明关键步骤：

$$\begin{cases}\partial_t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla p - \Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{h}, \\ \partial_t\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = 2\mathcal{H}\partial_z\boldsymbol{h}, \\ \partial_t\mathcal{H} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\mathcal{H} - 2\mathcal{H}\partial_z\mathcal{H} = 0.\end{cases} \tag{3.18}$$

对上面三个方程做 $\dot{H}^m$ 能量估计，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla^m(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},\mathcal{H})(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\nabla^{m+1}\boldsymbol{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \\ = \underbrace{-\int_{\mathbb{R}^3}[\nabla^m,\boldsymbol{u}\cdot\nabla]\boldsymbol{u}\nabla^m\boldsymbol{u}\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}[\nabla^m,\boldsymbol{h}\cdot\nabla]\boldsymbol{h}\nabla^m\boldsymbol{u}\mathrm{d}x}_{I_2} \underbrace{-\int_{\mathbb{R}^3}[\nabla^m,\boldsymbol{u}\cdot\nabla]\boldsymbol{h}\nabla^m\boldsymbol{h}\mathrm{d}x}_{I_3} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}[\nabla^m,\boldsymbol{h}\cdot\nabla]\boldsymbol{u}\nabla^m\boldsymbol{h}\mathrm{d}x}_{I_4} \\ + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}[\nabla^m,\boldsymbol{u}\cdot\nabla]\mathcal{H}\nabla^m\mathcal{H}\mathrm{d}x}_{I_5} + \underbrace{2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^m(\mathcal{H}\partial_z\boldsymbol{h})\nabla^m\boldsymbol{h}\mathrm{d}x}_{I_6} + \underbrace{2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla^m(\mathcal{H}\partial_z\mathcal{H})\nabla^m\mathcal{H}\mathrm{d}x}_{I_7}. \tag{3.19}$$

利用引理 2.7、Hölder 不等式，对于 $I_j, j = 1,\cdots,7$ 有

$$I_j \lesssim \|\nabla(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})(t,\cdot)\|_{L^\infty}\|\nabla^m(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})(t,\cdot)\|_{L^2}^2, \quad \forall j = 1,2,3,4;$$

$$I_5 \lesssim \|\nabla(\boldsymbol{u},\mathcal{H})(t,\cdot)\|_{L^\infty}\|\nabla^m(\boldsymbol{u},\mathcal{H})(t,\cdot)\|_{L^2}^2;$$

$$I_6 \lesssim \left\|\partial_z \mathcal{H}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty} \left\|\nabla^m \boldsymbol{h}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla(\boldsymbol{h},\mathcal{H})(t,\cdot)\right\|_{L^\infty} \left\|\nabla^m(\boldsymbol{h},\mathcal{H})(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2;$$

$$I_7 = -\int_{\mathbb{R}^3} \partial_z \mathcal{H} \left|\nabla^m \mathcal{H}\right|^2 \mathrm{d}x + 2\int_{\mathbb{R}^3} \left[\nabla^m, \mathcal{H}\partial_z\right] \mathcal{H} \nabla^m \mathcal{H} \mathrm{d}x \lesssim \left\|\nabla \mathcal{H}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty} \left\|\nabla^m \mathcal{H}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2.$$

将 $I_j, j=1,\cdots,7$ 代入方程(3.19)得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},\mathcal{H})(t,\cdot)\right\|_{\dot{H}^m}^2 \le C\left\|\nabla(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},\mathcal{H})(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}\left\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},\mathcal{H})(t,\cdot)\right\|_{\dot{H}^m}^2.$$

结合引理 3.1 的(3.1)和(3.2)，并应用插值得出对全 Sobolev 范数的估计如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},\mathcal{H})(t,\cdot)\right\|_{H^m}^2 \le C\left\|\nabla(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},\mathcal{H})(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}\left\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},\mathcal{H})(t,\cdot)\right\|_{H^m}^2.$$

最后，由 Gronwall 不等式和命题 3.6、命题 3.7 的结论，定理 1.1 得证。

4. 推论 1.2 的证明

由于 $\frac{u_\theta}{r}$ 是张量 $\nabla(u_\theta \boldsymbol{e}_\theta)$ 的一部分，我们可以得到

$$\left\|\nabla(u_\theta \boldsymbol{e}_\theta)\right\|_{L^p} \ge \left\|\frac{u_\theta}{r}\right\|_{L^p}. \tag{4.1}$$

通过 Biot-Savart 定律，对于 $1<p<\infty$ 都有：

$$\left\|\nabla(u_\theta \boldsymbol{e}_\theta)\right\|_{L^p} \lesssim \left\|\nabla\times(u_\theta \boldsymbol{e}_\theta)\right\|_{L^p}. \tag{4.2}$$

结合方程(4.1)和(4.2)，对于 $1<p<\infty$ 有

$$\left\|\frac{u_\theta}{r}\right\|_{L^p} \lesssim \left\|\nabla\times(u_\theta \boldsymbol{e}_\theta)\right\|_{L^p}.$$

这相当于原始爆破准则中 $s=1$ 的情况。因此，我们可以得到 $\nabla\times(u_\theta \boldsymbol{e}_\theta)$ 的爆破准则：

$$\int_0^{T_*}\left\|\frac{\partial_z h_\theta}{r}\right\|_{L^\infty}\mathrm{d}t + \int_0^{T_*}\left\|\nabla(u_\theta \boldsymbol{e}_\theta)\right\|_{L^p}^q \mathrm{d}t < \infty, \quad \frac{3}{p}+\frac{2}{q}\le 2,$$

和

$$\int_0^{T_*}\left\|\frac{\partial_z h_\theta}{r}\right\|_{L^\infty}\mathrm{d}t + \int_0^{T_*}\left\|\nabla\times(u_\theta \boldsymbol{e}_\theta)\right\|_{L^p}^q \mathrm{d}t < \infty, \quad \frac{3}{p}+\frac{2}{q}\le 2.$$

基金项目

江苏省研究生科研与实践创新计划项目(批准号：KYCX23_1290)。

参考文献

[1] Balbus, S.A. and Terquem, C. (2001) Linear Analysis of the Hall Effect in Protostellar Disks. *The Strophysical Journal*, **552**, 235. https://doi.org/10.1086/320452

[2] Forbes, T. (1991) Magnetic Reconnection in Solar Flares. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **62**, 15-36. https://doi.org/10.1080/03091929108229123

[3] Homann, H. and Grauer, R. (2005) Bifurcation Analysis of Magnetic Reconnection in Hall-MHD Systems. *Physica D Nonlinear Phenomena*, **208**, 59-72. https://doi.org/10.1016/j.physd.2005.06.003

[4] Chae, D., Degond, P. and Liu, J. (2014) Well-Posedness for Hall-Magnetohydrodynamics. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Analyse Non Lineairé*, **31**, 555-565. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2013.04.006

[5] Chae, D., Wan, R. and Wu, J. (2015) Local Well-Posedness for the Hall-MHD Equations with Fractional Magnetic Diffusion. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **17**, 627-638. https://doi.org/10.1007/s00021-015-0222-9

[6] Benvenutti, M.J. and Ferreira, L.C.F. (2016) Existence and Stability of Global Large Strong Solutions for the Hall-MHD System. *Differential Integral Equations*, **29**, 977-1000. https://doi.org/10.57262/die/1465912613

[7] Dai, M. (2014) Local Well-Posedness of the Hall-MHD System in $H^s(\mathbb{R}^n)$ with $s>n/2$. *Mathematische Nachrichten*, **293**, 67-78. https://doi.org/10.1002/mana.201800107

[8] Chae, D. and Lee, J. (2020) On the Blow-Up Criterion and Small Data Global Existence for the Hall-Magnetohydrodynamics. *Journal of Differential Equations*, **256**, 3835-3858. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.03.003

[9] Chae, D. and Schonbek, M. (2013) On the Temporal Decay for the Hall-Magnetohydrodynamic Equations. *Journal of Differential Equations*, **255**, 3971-3982. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.07.059

[10] Fan, J., Li, F. and Nakamura, G. (2014) Regularity Criteria for the Incompressible Hall-Magnetohydrodynamic Equations. *Nonlinear Analysis*, **109**, 173-179. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.07.003

[11] Weng, S. (2016) On Analyticity and Temporal Decay Rates of Solutions to the Viscous Resistive Hall-MHD System. *Journal of Differential Equations*, **260**, 6504-6524. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.01.003

[12] Weng, S. (2016) Space-Time Decay Estimates for the Incompressible Viscous Resistive MHD and Hall-MHD Equations. *Journal of Functional Analysis*, **270**, 2168-2187. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.01.021

[13] Li, Z. and Pan, X. (2022) One Component Regularity Criteria for the Axially Symmetric MHD-Boussinesq System. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **42**, 2333-2353. https://doi.org/10.3934/dcds.2021192

[14] Miao, C. and Zheng, X. (2013) On the Global Well-Posedness for the Boussinesq System with Horizontal Dissipation. *Communications in Mathematical Physics*, **321**, 33-67. https://doi.org/10.1007/s00220-013-1721-2

[15] Li, Z., Yang, M. (2022) On a Single-Component Regularity Criterion for the Non-resistive Axially Symmetric Hall-MHD System. *Acta Applicandae Mathematicae*, **181**, Article No. 1. https://doi.org/10.1007/s10440-022-00519-5

[16] Chen, H., Fang, D. and Zhang, T. (2017) Regularity of 3D Axisymmetric Navier-Stokes Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **37**, 1923-1939. https://doi.org/10.3934/dcds.2017081

[17] Nirenberg, L. (1959) On Elliptic Partial Differential Equations. In: Faedo, S., Ed., *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Scienze Fisiche e Matematiche* (Series 3, Volume 13), Springer, Berlin, 115-162.

[18] Chen, Q. and Zhang, Z. (2007) Regularity Criterion of Axisymmetric Weak Solutions to the 3D Navier-Stokes Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **331**, 1384-1395. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.09.069

[19] Kozono, H. and Taniuchi, Y. (2000) Limiting Case of the Sobolev Inequality in BMO, with Application to the Euler Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **214**, 191-200. https://doi.org/10.1007/s002200000267