Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 599-605
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142058

Cayley子集S全为2阶元的点稳定子为F_{20}的5度无核2-正则Cayley图

茹　昕，凌　波*

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明

收稿日期：2024年1月19日；录用日期：2024年1月31日；发布日期：2024年2月29日

摘　要

在具有较高对称性的图中，正则Cayley图是一类特殊的对称图。称一个图Γ为2-正则图，如果Γ的全自同构群AutΓ作用在2-弧集上正则。本文给出了点稳定子为F_{20}的5度无核2-正则Cayley图在Cayley子集全为2阶元情况下的全部分类。

关键词

无核，2-正则，Cayley图

Core-Free Pentavalent 2-Regular Cayley Graphs Whose Cayley Subsets *S* Are All 2-Order Elements with Vertex Stabilizer F_{20}

Xin Ru, Bo Ling*

School of Mathematics and Computer Sciences, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Jan. 19th, 2024; accepted: Jan. 31st, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

Among graphs with higher symmetry, regular Cayley graphs are a special class of symmetric graphs. A graph Γ is called 2-regular if its full automorphism group AutΓ acts regularly on its

*通讯作者。

文章引用: 茹昕, 凌波. Cayley 子集 *S* 全为 2 阶元的点稳定子为 F_{20} 的 5 度无核 2-正则 Cayley 图[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 599-605. DOI: 10.12677/pm.2024.142058

2-arcs. In this paper, it gives a complete classification of core-free pentavalent 2-regular Cayley graphs with the vertex stabilizer F_{20}, where all Cayley subsets are 2-order elements.

Keywords

Core-Free, 2-Regular, Cayley Graph

1. 引言

为方便研究，本文假设所有的图都是有限、简单、连通和无向的。

设 Γ 是一个图，$V\Gamma$、$E\Gamma$、$Arc\Gamma$ 和 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 分别代表图的顶点集、边集、弧集和全自同构群，$\mathrm{val}\Gamma$ 表示图 Γ 的度数。

设 $X \le \mathrm{Aut}\Gamma$，s 是一个正整数。一个图 Γ 被称为是 (X,s)-弧传递的，如果 X 传递作用在 Γ 的 s-弧集上，其中，s-弧是一个由 $s+1$ 个顶点组成的 $(s+1)$-数组，且对于 $\forall i$，$v_{i-1} \ne v_{i+1}$，满足 $(v_{i-1},v_i) \in E\Gamma$。称图 Γ 为 s-弧正则图，如果它的全自同构群在其弧集上是正则的。

设 G 是有限群，其单位元素是 1，一个图 Γ 被称为 G 的一个 Cayley 图，如果在 G 中有一个子集 S，满足 $1 \notin S$，且 $S = S^{-1}$，使得

$$V\Gamma = G, \quad E\Gamma = \{(s,sg) \mid g \in G, s \in S\},$$

其中 $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$。我们用 $\mathrm{Cay}(G,S)$ 表示 Cayley 图 Γ，Cayley 图 Γ 的度数为 $|S|$，另外，G 可以被看作 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 的一个正则子群，其中 G 右乘作用在 $V\Gamma$ 上。为了方便，我们仍然用 G 代表这个正则子群，则 Cayley 图是点传递的；相反，一个点传递图 Γ 是群 G 的一个 Cayley 图，当且仅当 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 包含同构于 G 的一个正则子群。一个 Cayley 图 $\mathrm{Cay}(G,S)$ 被称为 G 的一个正规 Cayley 图，如果 G 是 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G,S))$ 的一个正规子群；称 $\mathrm{Cay}(G,S)$ 是无核的，如果 G 在某些 $X \le \mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G,S))$ 中是无核的，即 $\mathrm{Core}_X(G) := \bigcap_{x\in X} G^X = 1$。

图的对称性研究一直都是群与图的一个热门话题，而 Cayley 图作为一种特殊的点传递图，因其构造简单、高度对称、品种多样，更是备受国内外学者的关注，有着丰富的研究成果，因此，正则 Cayley 图作为其中一类非常特殊的 Cayley 图，也得到了人们的广泛研究。对于一个图 Γ，称图 Γ 为 1-正则图，如果 Γ 的全自同构群 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 作用在其弧集上正则。图论学者最初从 3 度 1-正则图开始研究，文献[1]中 R. Frucht 构造出了第一个 3 度 1-正则图的例子；Li 和 Lou 等在文献[2]中证明了如果 5 度的 $(X,1)$-正则 Cayley 图不是正规或双正规的，则它在同构意义下是两个无核图中其中一个的正规覆盖；Ling 和 Lou 在文献[3]中给出了连通无核 5 度 1-传递 Cayley 图的完全分类；Li 和 Lou 在文献[4]中给出了 7 度无核 1-正则 Cayley 图的完全分类；另外，关于 5 度图的更多性质和分类结果可参见文献[5] [6] [7] [8] [9]。

本文主要针对 Cayley 子集全为 2 阶元的点稳定子为 F_{20} 的 5 度无核 2-正则 Cayley 图进行研究和分类，得到以下主要结果：

定理 1.1 设 $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ 是无核 5 度 2-正则 Cayley 图，$(\mathrm{Aut}\Gamma)_1$ 是 1 在 $\mathrm{Aut}\Gamma$ 中的稳定子，且同构于 F_{20}，其中，Cayley 子集全由 2 阶元组成，则下列之一成立：

1) Γ 同构于表 1 中的一个图；

2) 存在一个 AutΓ 的子群 X，使得 $G \le X$，且 G 在 X 中无核。进一步，G 和 X 的结构见表 2。

Table 1. Core-Free pentavalent 2-regular Cayley graphs with vertex stabilizer F_{20}
表 1. 点稳定子为 F_{20} 的 5 度无核 2-正则 Cayley 图

AutΓ	G	Γ	备注
$\mathbb{Z}_2^8:(\mathbb{Z}_2^2:S_5)$	$\mathbb{Z}_2^8:S_4$	引理 3.1	
$\mathbb{Z}_2^8:(\mathbb{Z}_2^2:S_5)$	$\mathbb{Z}_2^5:(Q_8:S_4)$	引理 3.1	2 个图

Table 2. Candidates for core-Free pentavalent 2-regular Cayley graphs with vertex stabilizer F_{20}
表 2. 点稳定子为 F_{20} 的 5 度无核 2-正则 Cayley 图的候选

X	G	Γ	备注
$\mathbb{Z}_2^{10}:S_{10}$	$\mathbb{Z}_2^9:S_9$	引理 3.2	至多 4 个图
$\mathbb{Z}_2^8:((A_5\times A_5):(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4))$	$\mathbb{Z}_2^8:(A_5:S_4)$	引理 3.3	至多 2 个图
$(\mathbb{Z}_2^9:A_{10}):\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^8:S_9$	引理 3.4	至多 4 个图
$A_{20}:\mathbb{Z}_2$	$A_{19}:\mathbb{Z}_2$	引理 3.5	至多 18 个图

2. 预备知识

设 X 是有限群，H 是 X 的无核子群，对于一个元素 $g\in X-H$，定义图 $\Gamma=\mathrm{Cos}(X,H,g)$，顶点集 $[X:H]$ 是 H 在 X 中的右陪集，使得 Hx 和 Hy 相邻当且仅当 $yx^{-1}\in HgH$，则 $X\le \mathrm{Aut}\Gamma$ 在它的弧集上传递，其中 X 右乘作用在 $[X:H]$ 上，这样的图叫做陪集图，且 Γ 连通当且仅当 $\langle H,g\rangle = X$，Γ 的度为 $|H:H\cap H^g|$。另外，若有一个正则子群 G，则 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,G\cap HgH)$。

对于一个无核 X-弧传递 Cayley 图 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$，其中 $G\le X\le \mathrm{Aut}\Gamma$，设 $v\in V\Gamma$，$H=X_v$ 是 v 在 X 中的稳定子群，假设 $|H|=n$，考虑 X 在 $[X:G]$ 上的右乘作用，则 X 是对称群 S_n 的一个子群，在这个作用下，H 是 S_n 的一个正则子群，且 G 是 X 中 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个稳定子，不失一般性，我们可以假设 G 稳定 1。由(文献[10]，命题 3.2)，我们有以下结论：

引理 2.1 设 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$ 是一个无核 X-弧传递 Cayley 图，$G\le X\le \mathrm{Aut}\Gamma$，设 $v\in V\Gamma$，$H=X_v$ 是 v 在 X 中的稳定子群，假设 $|H|=n$，则 X 是 S_n 的一个子群，且 H 正则作用在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上。另外，若 S 包含一个对合 τ，则 $\tau\in \mathrm{N}_{S_n}(H\cap H^\tau)-\left(\bigcup_{1\ne K\lhd H}\mathrm{N}_{S_n}(K)\right)$，$\Gamma\cong\mathrm{Cos}(X,H,\tau)$，$X=\langle H,\tau\rangle$，$G=\{\sigma\in X\mid 1^\sigma=1\}$，$S=\{\sigma\in H\tau H\mid 1^\sigma=1\}$。

对于连通 5 度 (X,s)-传递图，由文献[8]和[9]，我们有以下引理：

引理 2.2 设 Γ 是一个 5 度 (X,s)-传递图，$X\le\mathrm{Aut}\Gamma$，且 $s\ge1$，设 $v\in V\Gamma$，F_{20} 表示 20 阶的 Frobenius 群，则：

1) 如果 X_v 是可解的，则 $|X_v|\,\big|\,80$，且 $s\le3$，其中，(X_v,s) 在表 3 中；

2) 如果 X_v 是不可解的，则 $|X_v|\,\big|\,2^9\cdot3^2\cdot5$，且 $2\le s\le5$，其中，(X_v,s) 在表 4 中。

Table 3. The soluble vertex stabilizer
表 3. 可解的点稳定子

s	1	2	3
X_v	$\mathbb{Z}_5, D_{10}, D_{20}$	$F_{20}, F_{20}\times\mathbb{Z}_2$	$F_{20}\times\mathbb{Z}_4$

Table 4. The insoluble vertex stabilizer
表 4. 不可解的点稳定子

s	2	3	4	4
X_v	$\mathrm{A}_5, \mathrm{S}_5$	$\mathrm{A}_4 \times \mathrm{A}_5, (\mathrm{A}_4 \times \mathrm{A}_5):\mathbb{Z}_2, \mathrm{S}_4 \times \mathrm{S}_5$	$\mathrm{ASL}(2,4), \mathrm{AGL}(2,4), \mathrm{A\Sigma L}(2,4), \mathrm{A\Gamma L}(2,4)$	$\mathbb{Z}_2^6:\Gamma\mathrm{L}(2,4)$
$\lvert X_v \rvert$	60, 120	720, 1440, 2880	960, 1920, 2880, 5760	23040

3. 主要结论

设 $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ 是无核 5 度 2-正则 Cayley 图，因我们仅考虑无向图，则 $S = S^{-1}$，因此 Cayley 子集 S 中一定包含一个对合 τ，由引理 2.1 可知，H 是 S_{20} 的一个正则子群。我们可以假设 $H = \langle a,b \rangle \cong \mathrm{F}_{20}$，其中 $a = (1\ 13\ 7\ 20)(2\ 15\ 6\ 18)(3\ 12\ 10\ 16)(4\ 14\ \ 9\ 19)(5\ 11\ 8\ 17)$，$b = (1\ 15\ 8\ 19)(2\ 12\ 7\ 17)(3\ 14\ 6\ 20)(4\ 11\ 10\ 18)(5\ 13\ 9\ 16)$。假设 $P = \langle a \rangle$，则 $\mathrm{Cay}(G,S) \cong \mathrm{Cos}(X,H,\tau)$，其中 $\tau \in \mathrm{N}_{\mathrm{S}_{20}}(P) - \left(\bigcup_{1 \ne K \lhd H} \mathrm{N}_{\mathrm{S}_{20}}(K)\right)$，$X = \langle H,\tau \rangle \le S_{20}$，$G = \{\sigma \in X \mid 1^\sigma = 1\}$，$S = \{\sigma \in H\tau H \mid 1^\sigma = 1\}$。由 Magma (文献[11])计算可得 τ 有 846 种选择，它们在 $\mathrm{N}_{\mathrm{S}_{20}}(H)$ 中被分为 159 种共轭类。本文仅考虑 Cayley 子集 S 全为 2 阶元的情况，共有 39 种共轭类，它们的代表元如下：

$$\tau_1 = (11\ 17)(12\ 16)(13\ 20)(14\ 19)(15\ 18),$$

$$\tau_2 = (2\ 6)(3\ 10)(4\ 9)(5\ 8)(11\ 17)(12\ 16)(14\ 19)(15\ 18),$$

$$\tau_3 = (2\ 6)(3\ 10)(4\ 9)(5\ 8)(13\ 20),$$

$$\tau_4 = (2\ 6)(15\ 18),$$

$$\tau_5 = (3\ 10)(4\ 9)(5\ 8)(13\ 20)(15\ 18),$$

$$\tau_6 = (3\ 12)(4\ 14)(5\ 11)(8\ 17)(9\ 19)(10\ 16)(13\ 20)(15\ 18),$$

$$\tau_7 = (2\ 15)(4\ 9)(5\ 8)(6\ 18)(12\ 16)(13\ 20),$$

$$\tau_8 = (2\ 18)(4\ 14)(5\ 11)(6\ 15)(8\ 17)(9\ 19)(12\ 16)(13\ 20),$$

$$\tau_9 = (2\ 18)(3\ 16)(6\ 15)(10\ 12)(11\ 17)(13\ 20)(14\ 19),$$

$$\tau_{10} = (2\ 6)(4\ 19)(5\ 17)(8\ 11)(9\ 14)(12\ 16)(13\ 20),$$

$$\tau_{11} = (2\ 15)(3\ 16)(4\ 19)(5\ 11)(6\ 18)(8\ 17)(9\ 14)(10\ 12)(13\ 20),$$

$$\tau_{12} = (2\ 15)(3\ 12)(4\ 14)(5\ 11)(6\ 18)(8\ 17)(9\ 19)(10\ 16)(13\ 20),$$

$$\tau_{13} = (2\ 18)(3\ 16)(4\ 19)(5\ 17)(6\ 15)(8\ 11)(9\ 14)(10\ 12)(13\ 20),$$

$$\tau_{14} = (2\ 18)(6\ 15)(11\ 17)(12\ 16)(13\ 20)(14\ 19),$$

$$\tau_{15} = (2\ 15)(6\ 18)(11\ 17)(12\ 16)(13\ 20)(14\ 19),$$

$$\tau_{16} = (3\ 10)(4\ 9)(5\ 8)(11\ 17)(12\ 16)(14\ 19),$$

$$\tau_{17} = (2\ 6)(3\ 10)(12\ 16)(15\ 18),$$

$$\tau_{18} = (3\ 16)(4\ 19)(5\ 17)(8\ 11)(9\ 14)(10\ 12)(13\ 20)(15\ 18),$$

$$\tau_{19} = (4\ 14)(5\ 11)(8\ 17)(9\ 19)(12\ 16)(13\ 20)(15\ 18),$$

$$\tau_{20} = (2\ 6)(4\ 14)(5\ 11)(8\ 17)(9\ 19)(12\ 16)(13\ 20),$$

$$\tau_{21} = (2\ 15)(4\ 19)(5\ 17)(6\ 18)(8\ 11)(9\ 14)(12\ 16)(13\ 20),$$

$$\tau_{22} = (2\ 18)(3\ 12)(4\ 14)(5\ 11)(6\ 15)(8\ 17)(9\ 19)(10\ 16)(13\ 20),$$

$$\tau_{23} = (2\ 15)(3\ 16)(4\ 19)(5\ 17)(6\ 18)(8\ 11)(9\ 14)(10\ 12)(13\ 20),$$

$$\tau_{24} = (2\ 15)(3\ 10)(4\ 9)(5\ 8)(6\ 18)(13\ 20),$$

$$\tau_{25} = (2\ 6)(3\ 16)(4\ 19)(5\ 17)(8\ 11)(9\ 14)(10\ 12)(13\ 20),$$

$$\tau_{26} = (2\ 18)(3\ 10)(4\ 9)(5\ 8)(6\ 15)(13\ 20),$$

$$\tau_{27} = (2\ 18)(3\ 16)(4\ 14)(5\ 11)(6\ 15)(8\ 17)(9\ 19)(10\ 12)(13\ 20),$$

$$\tau_{28} = (3\ 16)(4\ 14)(5\ 11)(8\ 17)(9\ 19)(10\ 12)(13\ 20)(15\ 18),$$

$$\tau_{29} = (2\ 6)(3\ 12)(4\ 19)(5\ 17)(8\ 11)(9\ 14)(10\ 16)(13\ 20),$$

$$\tau_{30} = (2\ 6)(3\ 16)(4\ 14)(5\ 11)(8\ 17)(9\ 19)(10\ 12)(13\ 20),$$

$$\tau_{31} = (3\ 12)(4\ 19)(5\ 17)(8\ 11)(9\ 14)(10\ 16)(13\ 20)(15\ 18),$$

$$\tau_{32} = (3\ 12)(4\ 9)(5\ 8)(10\ 16)(13\ 20)(15\ 18),$$

$$\tau_{33} = (2\ 15)(3\ 10)(4\ 19)(5\ 17)(6\ 18)(8\ 11)(9\ 14)(13\ 20),$$

$$\tau_{34} = (2\ 15)(3\ 12)(4\ 9)(5\ 8)(6\ 18)(10\ 16)(13\ 20),$$

$$\tau_{35} = (2\ 6)(3\ 10)(4\ 19)(5\ 17)(8\ 11)(9\ 14)(13\ 20),$$

$$\tau_{36} = (2\ 15)(3\ 16)(6\ 18)(10\ 12)(11\ 17)(13\ 20)(14\ 19),$$

$$\tau_{37} = (2\ 18)(3\ 12)(4\ 9)(5\ 8)(6\ 15)(10\ 16)(13\ 20),$$

$$\tau_{38} = (2\ 15)(3\ 16)(4\ 9)(5\ 8)(6\ 18)(10\ 12)(13\ 20),$$

$$\tau_{39} = (2\ 18)(3\ 12)(5\ 8)(6\ 15)(10\ 16)(13\ 20)(14\ 19).$$

现在设 $\Omega = \{1,2,\cdots,20\}$，$X_j = \langle H, \tau_j \rangle$，$\Gamma_j = \mathrm{Cos}(X_j, H, \tau_j)$，其中 $j = 1,2,\cdots,39$。设 $G_j = \{\sigma \in X_j \mid 1^\sigma = 1\}$，$S_j = \{\sigma \in H\tau_j H \mid 1^\sigma = 1\}$。注意到，$H$ 是 X_j 的一个正则子群，G_j 是 X_j 作用在 Ω 上的 1 的点稳定子。由此，$X_j = G_j H$，且 $G_j \cap H = 1$，则 G_j 正则作用在 $[X_j : H]$ 上，进而得 $\Gamma_j = \mathrm{Cay}(G_j, S_j)$。本文主要结论如下：

引理 3.1 对于 $j = 1,2,\cdots,11$，如果 Γ_j 是 2-正则图，则：

1) $j = 5$，$G_5 \cong \mathbb{Z}_2^8 : S_4$，$\mathrm{Aut}\Gamma_5 \cong \mathbb{Z}_2^8 : (\mathbb{Z}_2^2 : S_5)$，$S_5 = \{\tau_5, a_5, b_5, c_5, d_5\}$，且 $\Gamma_5 \cong \mathrm{Cay}(G_5, S_5)$；

2) $j = 7,11$，$G_7 \cong G_{11} \cong \mathbb{Z}_2^5 : (Q_8 : S_4)$，$\mathrm{Aut}\Gamma_7 \cong \mathrm{Aut}\Gamma_{11} \cong \mathbb{Z}_2^8 : (\mathbb{Z}_2^2 : S_5)$，$S_7 = \{\tau_7, a_7, b_7, c_7, d_7\}$，$S_{11} = \{\tau_{11}, a_{11}, b_{11}, c_{11}, d_{11}\}$，且 $\Gamma_7 \cong \mathrm{Cay}(G_7, S_7)$，$\Gamma_{11} \cong \mathrm{Cay}(G_{11}, S_{11})$。

证明： 首先，我们可由 Magma 分别计算出 $\mathrm{Aut}\Gamma_j$ 和 G_j 的阶和正规子群以及 S_j 中的元素。

对于一个顶点 $v \in V\Gamma_j$，$|(\mathrm{Aut}\Gamma_1)_v| = 2880$，$|(\mathrm{Aut}\Gamma_2)_v| = |(\mathrm{Aut}\Gamma_4)_v| = |(\mathrm{Aut}\Gamma_6)_v| = |(\mathrm{Aut}\Gamma_8)_v| = |(\mathrm{Aut}\Gamma_9)_v| = |(\mathrm{Aut}\Gamma_{10})_v| = 120$，则由引理 2.2，这些图都不是 2-传递图，进而也不是 2-正则图。另外，$|(\mathrm{Aut}\Gamma_3)_v| = 40$，$|(\mathrm{Aut}\Gamma_5)_v| = |(\mathrm{Aut}\Gamma_7)_v| = |(\mathrm{Aut}\Gamma_{11})_v| = 20$，因此，$\Gamma_3$ 也不是 2-正则图，Γ_5、Γ_7、Γ_{11} 是 2-正则图。下面分别对这三个 2-正则图的结构进行分析：

当 $j = 5$ 时，G_5 有一个 256 阶的正规子群是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^8$，且它的补与 S_4 同构；$\mathrm{Aut}\Gamma_5$ 存在一个正规子群是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^8$，它的补的阶为 480，将这个补群记为 CA_5，则 CA_5 中有一个正规子群是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^2$，且它的补与 S_5 同构。所以，我们得 $G_5 \cong \mathbb{Z}_2^8 : S_4$，$\mathrm{Aut}\Gamma_5 \cong \mathbb{Z}_2^8 : (\mathbb{Z}_2^2 : S_5)$。

当 $j=7,11$ 时，$|G_7|=|G_{11}|=2^{11}\cdot 3$，$G_7$ 和 G_{11} 均有 29 个正规子群，且其中一个正规子群是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^5$，记 $\mathbb{Z}_2^5$ 在 G_7 和 G_{11} 中的补群分别为 C_7 和 C_{11}，则 C_7 和 C_{11} 中均有一个正规子群与四元数群 Q_8 同构，且 C_7 和 C_{11} 在 G_7 和 C_{11} 中的补群同构于 S_4，从而得 $G_7\cong G_{11}\cong \mathbb{Z}_2^5:(Q_8:S_4)$；另外，$\mathrm{Aut}\Gamma_7$ 和 $\mathrm{Aut}\Gamma_{11}$ 的正规子群中均有一个是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^8$，$\mathbb{Z}_2^8$ 在 $\mathrm{Aut}\Gamma_7$ 和 $\mathrm{Aut}\Gamma_{11}$ 中的补群分别记为 CA_7 和 CA_{11}，则 CA_7 和 CA_{11} 中均有一个正规子群同构于 $\mathbb{Z}_2^2$，且 $\mathbb{Z}_2^2$ 在 CA_7 和 CA_{11} 中的补群同构于 S_5，从而得 $\mathrm{Aut}\Gamma_7\cong \mathrm{Aut}\Gamma_{11}\cong \mathbb{Z}_2^8:(\mathbb{Z}_2^2:S_5)$，引理得证。

引理 3.2 对于 $j=12,13,14,15$，$G_{12}\cong G_{13}\cong G_{14}\cong G_{15}\cong \mathbb{Z}_2^9:S_9$，$X_{12}\cong X_{13}\cong X_{14}\cong X_{15}\cong \mathbb{Z}_2^{10}:S_{10}$，且 $S_j=\{\tau_j,a_j,b_j,c_j,d_j\}$，$\Gamma_j\cong \mathrm{Cay}(G_j,S_j)$。

证明： 首先由 Magma 可直接计算出 Cayley 子集 S_j 中的元素以及 G_j 的阶和正规子群。

当 $j=12,13,14,15$ 时，G_j 的阶 $|G_j|=2^{16}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$，初等交换群 $\mathbb{Z}_2^9$ 是它们中的一个正规子群，且 $\mathbb{Z}_2^9$ 在 G_j 中的补群与 S_9 同构，进而可得 $G_j\cong \mathbb{Z}_2^9:S_9$；另外，因陪集图连通当且仅当 $X=\langle \tau,H\rangle$，又 $H=\langle a,b\rangle$，则有 $X_j=\langle a,b,\tau_j\rangle$，由此我们可以得到 X_j 有 9 个正规子群，其中一个正规子群是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^{10}$，且 $\mathbb{Z}_2^{10}$ 在 X_j 中的补群同构于 S_{10}，最终有 $X_j\cong \mathbb{Z}_2^{10}:S_{10}$，引理得证。

引理 3.3 对于 $j=16,17$，$G_{16}\cong G_{17}\cong \mathbb{Z}_2^8:(A_5:S_4)$，$X_{16}\cong X_{17}\cong \mathbb{Z}_2^8:((A_5\times A_5):(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4))$，且 $S_j=\{\tau_j,a_j,b_j,c_j,d_j\}$，$\Gamma_j\cong \mathrm{Cay}(G_j,S_j)$。

证明： 假设 $j=16,17$，由 Magma 可计算出 Cayley 子集 S_{16} 和 S_{17} 中的元素，且 $|G_{16}|=|G_{17}|=2^{13}\cdot 3^2\cdot 5$，$|X_{16}|=|X_{17}|=2^{15}\cdot 3^2\cdot 5^2$，$G_{16}$ 和 G_{17} 中均有一个阶为 256 的正规子群是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^8$，它在 G_{16} 和 G_{17} 中的补群分别记为 C_{16} 和 C_{17}，则 C_{16} 和 C_{17} 中的一个正规子群同构于 A_5，且 C_{16} 和 C_{17} 分别在 G_{16} 和 G_{17} 中的补群与 S_4 同构，从而得 $G_{16}\cong G_{17}\cong \mathbb{Z}_2^8:(A_5:S_4)$。

进一步地，因 $X_{16}=\langle a,b,\tau_{16}\rangle$，$X_{17}=\langle a,b,\tau_{17}\rangle$，我们可得 X_{16} 和 X_{17} 的阶，它们中均有一个阶为 256 的正规子群是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^8$，记 $\mathbb{Z}_2^8$ 在 X_{16} 和 X_{17} 中的补群分别记为 CX_{16} 和 CX_{17}，且 CX_{16} 和 CX_{17} 中的一个阶为 3600 的正规子群只有两个阶为 60 且交为 1 的非平凡正规子群，因此这个正规子群同构于两个 A_5 的直积，且这个正规子群在 CX_{16} 和 CX_{17} 中的补群是交换群但并非初等交换群，且不同构于循环群 $\mathbb{Z}_8$，所以该补群必与 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ 同构，从而得 $X_{16}\cong X_{17}\cong \mathbb{Z}_2^8:((A_5\times A_5):(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4))$，引理得证。

引理 3.4 对于 $j=18,19,20,21$，$G_j\cong \mathbb{Z}_2^8:S_9$，$X_j\cong(\mathbb{Z}_2^9:A_{10}):\mathbb{Z}_2$，且 $S_j=\{\tau_j,a_j,b_j,c_j,d_j\}$，$\Gamma_j\cong \mathrm{Cay}(G_j,S_j)$。

证明： 首先，我们可以由 Magma 直接计算出 Cayley 子集 S_j 中的元素以及 G_j 和 X_j 的阶和正规子群。

当 $j=18,19,20,21$ 时，G_j 有 4 个正规子群，其中一个正规子群是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^8$，且 $\mathbb{Z}_2^8$ 在 G_j 中的补群与置换群 S_9 同构，因此 $G_j\cong \mathbb{Z}_2^8:S_9$。另一方面，$X_j$ 有 5 个正规子群，它的阶为 $|X_j|=2^{17}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$，将 X_j 中一个阶为 $2^{16}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$ 的正规子群记为 N_j，则 N_j 中的一个正规子群是初等交换群 $\mathbb{Z}_2^9$，且 $\mathbb{Z}_2^9$ 在 N_j 中的补群与 A_{10} 同构，进而得 $N_j\cong \mathbb{Z}_2^9:A_{10}$，且 N_j 在 X_j 中的补群是 2 阶循环群，因此 $X_j\cong(\mathbb{Z}_2^9:A_{10}):\mathbb{Z}_2$，引理得证。

引理 3.5 对于 $j=22,23,\cdots,39$，$G_j\cong A_{19}:\mathbb{Z}_2$，$X_j\cong A_{20}:\mathbb{Z}_2$，且 $S_j=\{\tau_j,a_j,b_j,c_j,d_j\}$，$\Gamma_j\cong \mathrm{Cay}(G_j,S_j)$。

证明： 首先，我们可以由 Magma 直接计算出 G_j 和 X_j 的阶 $|G_j|=2^{16}\cdot 3^8\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$，$|X_j|=2^{18}\cdot 3^8\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$，以及它们的 3 个正规子群。

当 $j=22,23,\cdots,39$ 时，G_j 有一个阶为 $2^{15}\cdot 3^8\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$ 的非平凡正规子群，将其记为 NG_j，则 NG_j 只有 2 个正规子群，即单位元 1 和它本身，因此 NG_j 是单群，同构于交错群 A_{19}，且 NG_j 在 G_j 中的补群与 2 阶循环群 $\mathbb{Z}_2$ 同构，因此 $G_j\cong A_{19}:\mathbb{Z}_2$；同样地，我们将 X_j 的非平凡正规子群记为 NX_j，则 NX_j 也是单群，与交错群 A_{20} 同构，且 NX_j 在 X_j 中的补群同构于二阶循环群 $\mathbb{Z}_2$，进而得 $X_j\cong A_{20}:\mathbb{Z}_2$，引理

得证。

对于点稳定子为 F_{20} 的 5 度无核 2-正则 Cayley 图 Γ，其 Cayley 子集 S 中包含的对合 τ 在 $N_{S_{20}}(H)$ 中共有 159 种共轭类，本文仅讨论 Cayley 子集 S 全为 2 阶元的情况，共轭类共有 39 种，其 $\mathrm{Aut}\Gamma$、X 和 G 的结构描述在定理 1.1 中的表格中，在本文的研究基础上，我们之后可以继续研究 Cayley 子集不全为 2 阶元的情况，进而可以得到点稳定子为 F_{20} 的 5 度无核 2-正则 Cayley 图的完全分类。通过研究和分析，本文证明了在同构意义下，Cayley 子集 S 全为 2 阶元的点稳定子为 F_{20} 的 5 度无核 2-正则 Cayley 图至多只有 31 个，综合引理 3.1、引理 3.2、引理 3.3、引理 3.4 和引理 3.5 的证明，定理 1.1 得证。

参考文献

[1] Frucht, R. (1952) A One-Regular Graph of Degree Three. *Canadian Journal of Mathematics*, **4**, 240-247. https://doi.org/10.4153/CJM-1952-022-9

[2] Li, J.J., Lou, B.G. and Zhang, X.J. (2013) Finite 1-Regular Cayley Graphs of Valency 5. *International Journal of Combinatorics*, **2013**, Article ID: 125916. https://doi.org/10.1155/2013/125916

[3] Ling, B., Lou, B.G. and Li, J.J. (2016) On Pentavalent 1-Transitive Cayley Graphs. *Discrete Mathematics*, **339**, 1335-1343. https://doi.org/10.1016/j.disc.2015.11.018

[4] Li, J.J., Zhang, G.R. and Ling, B. (2013) 1-Regular Cayley Graphs of Valency 7. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **88**, 479-485. https://doi.org/10.1017/S0004972713000087

[5] Guo, S.T., Feng, Y.Q. and Li, C.H. (2013) The Finite Edge-Primitive Pentavalent Graphs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **38**, 491-497. https://doi.org/10.1007/s10801-012-0412-y

[6] Hua, X.H., Feng, Y.Q. and Lee, J. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 2*pq*. *Discrete Mathematics*, **311**, 2259-2267. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.07.007

[7] Li, Y.T. and Feng, Y.Q. (2010) Pentavalent One-Regular Graphs of Square-Free Order. *Algebra Colloquium*, **17**, 515-524. https://doi.org/10.1142/S1005386710000490

[8] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2010) On Symmetric Graphs of Valency Five. *Discrete Mathematics*, **310**, 1725-1732. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.11.019

[9] Guo, S.T. and Feng, Y.Q. (2012) A Note on Pentavalent *s*-Transitive Graphs. *Discrete Mathematics*, **312**, 2214-2216. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.04.015

[10] Li, J.J. and Lu, Z.P. (2009) Cubic *s*-Arc Transitive Cayley Graphs. *Discrete Mathematics*, **309**, 6014-6025. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.05.002

[11] Bosma, W., Cannon, C. and Playoust, C. (1997) The Magma Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125