Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 318-325
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141032

例谈高中数学教学中学生前概念的转变及利用

曹娜娜，侯传燕

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年12月13日；录用日期：2023年12月28日；发布日期：2024年1月30日

摘 要

在数学教学中，前概念是指学生在新课学习前对所学知识已有的认识和理解，对数学概念的建立有积极作用，也有消极作用。教师要善于利用学生的前概念并采取适当的教学策略，帮助学生建构科学新概念。对新知学习有积极作用的前概念，教师可以采用设置问题链的方式，引导学生充分调用自身前概念；对于新知学习有消极作用的前概念，教师应当优先考虑其它能够顺应学生认知的方法进行教学设计；针对课时教学知识点碎片化的局限性，教师也可以利用思维导图作为教学工具链接学生的前概念，加强概念之间的联系，促进概念网络的形成。

关键词

前概念，高中数学，概念转变

An Example of the Transformation and Utilization of Pre-Student Concepts in High School Mathematics Teaching

Nana Cao, Chuanyan Hou

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Dec. 13th, 2023; accepted: Dec. 28th, 2023; published: Jan. 30th, 2024

Abstract

In mathematics teaching, pre-concepts refer to students' existing knowledge and understanding of the knowledge they have learned before learning a new lesson. It has a positive and negative effect on the establishment of mathematical concepts. Teachers should be good at making use of students' previous concepts and adopt appropriate teaching strategies to help students construct

文章引用: 曹娜娜, 侯传燕. 例谈高中数学教学中学生前概念的转变及利用[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 318-325.
DOI: 10.12677/pm.2024.141032

new scientific concepts. For pre-concepts that have a positive effect on the learning of new knowledge, teachers can use the method of setting up question chains to guide students to fully use their own pre-concepts; for pre-concepts that have a negative effect on the learning of new knowledge, teachers should give priority to other methods that can adapt to students' cognition. Teaching design: In response to the limitations of fragmented knowledge points in class teaching, teachers can also use mind maps as a teaching tool to link students' previous concepts, strengthen the connection between concepts, and promote the formation of concept networks.

Keywords

Pre-Concept, High School Mathematics, Conceptual Change

1. 引言

数学本身具有结构性、关联性等特点，在数学学习中，无论是知识的获得、思想方法的体验或是活动经验的积累都不是碎片化的，而是相互联系的，是存在于一定的情境脉络之中的。建构主义的学生观指出，学生不是空着脑袋走进教室的，在学习新的数学概念之前，学生很可能早已形成了或正确、或错误的“前概念”，如果教师对学生所拥有的前概念没有充分考虑的话，学生很可能就无法掌握新的概念和信息，在课堂中只会形成短时记忆，很快又回到了原来的概念[1]。如果新知识与学生的前概念能够建立起实质性的联系，学生就可以利用自己的前概念“同化”新知识，从而实现对新知识的理解。

前概念是教育心理学的概念，最早可以追溯到皮亚杰的认知发展理论和奥苏贝尔的有意义学习理论等的研究，而后也有诸多学者对前概念做出了各种定义。其中被广泛认可的定义是：前概念是指影响学习者学习结果的认知结构，在学习科学概念前对各种事物及其现象的看法和观念，其可能是之前存在的认知结构，也可能是受之前认知结构的影响在学习过程中产生的与当前科学概念相异的认知结构。在教学中前概念泛指学生在新课学习前，对所学知识已有的认识和理解。也就是说学生在学习某个概念之前，对与之相关的事物及现象已经有了一定的认识和理解，同时初步形成了一些自己的观点和看法，这些看法就是学生的前概念。

2. 前概念对学生科学概念形成的影响

(一) 积极作用：实现知识的正迁移

如果新知识的学习能够与学生的前概念建立正确的连接，那么学生就可以利用自己的前概念“同化”新知识。一方面，一些日常生活经验对学生新知学习提供了兴趣和支撑，例如在学习“椭圆及其标准方程”前，学生见过生活中许多具有椭圆形状的物体，并且学生有关于椭圆的前概念是“压扁的圆”，因此在学习这一课时的内容时，教师要以学生的实际生活经验作为课前引入，从学生的前概念出发，自然地形成“椭圆的定义”。另一方面，学生的知识基础也是促进新知识形成的依托，这些前概念的积极作用可成为数学概念学习的资源和概念学习的新的知识增长点，例如在学习“余弦定理”时，要在学生前概念(三角形中的边角关系、平面向量的运算、勾股定理、三角形全等的判定定理等)的基础上去发现余弦定理并对能够对其推理和证明，最终能够应用余弦定理解决相关问题。

(二) 消极作用：造成知识的负迁移

在一些情况下，对数学知识的片面理解或是错误引用而产生的前概念会成为数学学习的障碍，这些错误的前概念如果得不到及时纠正，将会影响对数学新知的同化或顺应，甚至歪曲新知识的含义，使学生形成错误的思维，从而变成数学学习的障碍，例如下文中提到的“三角函数图像的变换”，水平方向上的平移变换是“左加右减”，学生在此之前学习了数轴(通常数轴上所表示得数是“左小右大”)，因此不理解为什么函数图像向左移动几个单位长度，解析式中对应的自变量就要加上几，而不是减呢？对于这类前概念，教师要采取教学策略积极转变，否则会对学生理解新知产生影响，成为学生产生错误的雷区。充分把握学生的前概念并合理利用是对教师教学的一种挑战，这不仅是一大教学难点更是学生学习的关键点。

3. 学生前概念的有效利用及转变策略

高中数学教学中，教师应当积极关注、敏锐捕捉学生的前概念，并采用适当的教学策略帮助学生把前概念转变为科学概念。对于新知学习有积极作用的前概念，教师可以采用设置问题链的方式，引导学生主动调用自身的前概念；对于新知学习有消极影响的前概念，一方面要及时纠正，一方面教师应当考虑其它能够顺应学生认知的、以学生已有知识经验为起点的方法进行教学设计，“化腐朽为神奇”；此外，课时教学会对教学内容进行分解，弱化数学知识的整体性和关联性，造成知识碎片化，教师也可以利用思维导图作为教学工具链接学生的前概念，加强概念之间的联系，促进概念网络的形成。

(一) 顺应学生，利用前概念实现正迁移

探明学生的前概念是教师在正式的课堂教学之前对学生进行学情分析的一个重要环节，教师要能预知前概念的存在及影响，使它成为学生建构新知的基点和“脚手架”，在日常备课和教学中要能够充分考虑学生的前概念并加以尊重和利用，尤其是面对学生的易错点时，如果学生掌握不好的主要原因是需要主动改变自身的前概念去“顺应”新知识，那么教师可以尝试从学生已有的前概念出发，改变传统的教学策略，就可以实现从“学生顺应新知识”到“新知识顺应学生”的转变。

案例 1：三角函数图像的平移和伸缩变换

“函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像”是三角函数的一个重要内容，通过探究参数 A，ω，φ 的不同取值对函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)$ 图像的影响，进一步深化对三角函数图像变换的理解和认识。然而这一内容对于高中生来说既是一个难点，也是一个易错点，究其原因是学生在解决相关问题时很容易受到自身前概念的影响，尤其是水平方向上的平移变换和伸缩变换。

高中教科书中水平方向上的平移法则是“左加右减”，然而学生容易受到前概念(数轴)的影响，所以直角坐标系中 x 轴是“左负右正”，对应水平方向上的平移“左加右减”就与学生的前概念相悖；水平方向的伸缩法则是：当 $0<\omega<1$ (或 $\omega>1$)时，需将函数 $f(x)$ 图像上所有点的横坐标伸长(或缩短)到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，得到 $f(\omega x)$ 的图像，而学生由于受到前概念(数的扩大和缩小)的影响，会误操作为“当 $0<\omega<1$ (或 $\omega>1$)时，将函数 $f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短(或伸长)到原来的 ω 倍，得到 $f(\omega x)$ 的图像。

加入坐标变换公式教学

图像是由无数个点构成的，图像变换的本质是图像上点的位置变化，而点的位置变化对应着点的坐标变化，想要研究函数图像的变换规律，只需研究图像上每个点坐标的变化规律[2]。因此我们可以在三角函数图像变换的内容中加入坐标变换公式教学，从代数的角度加深学生对法则的理解。

设函数 $y = f(x)$ 图像上一点 $p(x,y)$，将图像按向量 $\boldsymbol{a}=(h,k)$ 平移得到的图像解析式是 $y' = g'(x)$，

图像平移后得到对应点 $p'(x',y')$，显然有 $\begin{cases} x'=x+h \\ y'=y+k \end{cases}$，当图像向右平移时，$h>0$，当图像向左平移时，$h<0$；同理，当图像向上平移时，$k>0$，当图像向下平移时，$k<0$。因为 $\begin{cases} x=x'-h \\ y=y'-k \end{cases}$，带入原式得 $y'-k=f(x'-h)$，即 $y'=f(x'-h)+k$。习惯上写为 $y=f(x-h)+k$。坐标平移公式利用了点的平规律，显然顺应了学生的前概念“左负右正，上正下负”，即“左减右加，上加下减”。

同理，将函数 $y=f(x)$ 图像上所有点的横坐标变为原来的 λ 倍，纵坐标变为原来的 μ 倍，得到函数 $y'=g'(x)$ 的图像，设点 $p(x,y)$ 是 $y=f(x)$ 图像上任意一点，则点 $p'(x',y')$ 在 $y'=g'(x)$ 的图像上，显然有 $\begin{cases} x'=\lambda x(\lambda>0) \\ y'=\mu y(\mu>0) \end{cases}$，其中 $0<\lambda<1$ (或 $\lambda>1$)时，表示横坐标缩小(或扩大)为原来的 λ 倍，当 $0<\mu<1$ (或 $\mu>1$)时，表示纵坐标缩小(或扩大)为原来的 μ 倍。因为 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\lambda}x' \\ y=\dfrac{1}{\mu}y' \end{cases}$，带入原式得 $\dfrac{1}{\mu}y'=f\left(\dfrac{1}{\lambda}x'\right)$，即 $y'=\mu f\left(\dfrac{1}{\lambda}x'\right)$，所以 $y=\mu f\left(\dfrac{1}{\lambda}x\right)$，显然，坐标伸缩公式中所蕴含的“坐标的扩大和缩小”顺应了学生的前概念(数的扩大和缩小规律)。

例题：把函数图像 $y=\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度，再把所得图像上各点的横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，纵坐标伸长为原来的 3 倍，所得函数的解析式为__________。

解：设 $y=\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图像上任一点为 $P(x,y)$，平移后的函数图像上对应点设为 $P'(x',y')$，伸缩后的函数图像上的函数图像上的对应点为 $P''(x'',y'')$，则根据题意知 $\begin{cases} x'=x+\dfrac{\pi}{4} \\ y'=y \end{cases}$，$\begin{cases} x''=\dfrac{1}{2}x' \\ y''=3y' \end{cases}$，即 $\begin{cases} x''=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{8} \\ y''=3y \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2x''-\dfrac{\pi}{4} \\ y=\dfrac{1}{3}y'' \end{cases}$，将上式带入到函数 $y=\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 中就得到变换后函数图像的解析式为 $y''=3\sin\left(10x''-\dfrac{7\pi}{4}\right)$，也即 $y=3\sin\left(10x-\dfrac{7\pi}{4}\right)$。

评析：点在函数图像上，则点的坐标满足函数解析式，有了坐标变换公式，学生在解决相关函数图像变换问题时只需使用数学中的基本方法“代入法”即可[3]。

学生在认识一个新事物或解决一个新问题时，往往会利用自身的前概念去比较对照新事物和新问题，设法将新问题的分析纳入到已有的认知结构中来。因此教师可以尝试从学生前概念出发，在传统图像变换教学的基础上加入坐标平移和伸缩公式的学习，不仅顺应了学生的前概念，还从几何和代数两个角度加深了学生对函数图像变换的认识和理解。从而使学生从对新知识的“工具性理解”达到对新知识的“关系性理解”的层面。

(二) 设置问题链，充分调用学生的前概念

数学问题链教学强调为学生提供数学思考的基本脉络，倡导让学生在思维脉络中产生问题、研究问题。教师在课前要充分考虑学生的已有认知经验或是知识基础，通过设置问题链方式引导学生充分调用

自身的前概念，激发学生的求知欲，培养学生的探究能力，使学生准确、有效地构建科学概念。

案例 2：椭圆及其标准方程

问题 1 (情境导入)：你能举出身边具有椭圆形状的物体吗？

生：眼镜镜片、香皂盒、盘子……

问题 2：你能具体说一说什么样的图形是椭圆吗？

生：椭圆像是一个被压扁的圆。

问题 3：“椭圆是压扁的圆”是生活化的模糊语言。能试着用更加严谨的数学语言来描述什么是椭圆吗？

问题 4：如图 1，在圆 $x^2+y^2=4$ 上任取一点 P，过点 P 作 x 轴的垂线段 PD，D 为垂足。当点 P 在圆上运动时，线段 PD 的中点 M 的轨迹是什么？为什么？

问题 4-1：如果 M 是椭圆的三等分点，M 的轨迹是什么？你有什么发现？

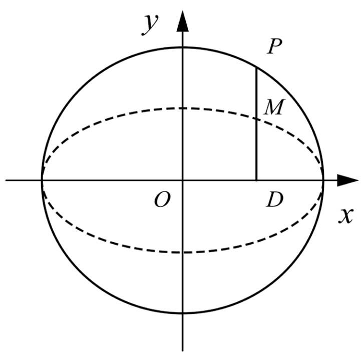

Figure 1. The trajectory of the moving point M

图 1. 动点 M 的轨迹

问题 4-2：(动画演示：分别将圆进行纵向和横向压缩，压缩后得到的图形是椭圆，如图 2)同学们能够根据动画的演示过程抽象出椭圆的严格定义吗？

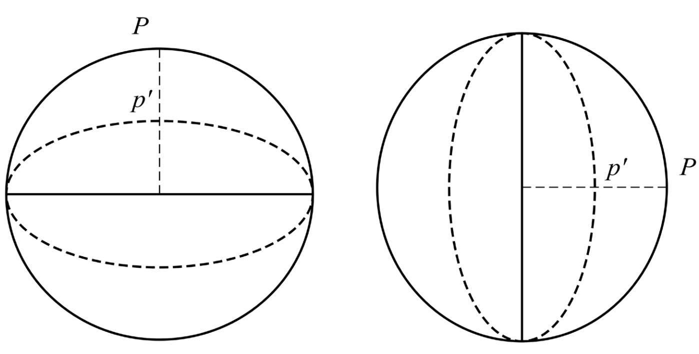

Figure 2. The circle is compressed horizontally and vertically to form an ellipse

图 2. 圆经过横向和纵向压缩形成椭圆

生：过圆上的动点向圆的一条直径引发垂线段，则垂线段上的相应动点(除去端点)的轨迹是椭圆[4]。带领学生回顾点的坐标变换公式。

问题 5 (推导椭圆的标准方程)：通过椭圆的严谨定义，可以看到椭圆是圆按照同一比例伸缩得到的，利用点的坐标变换公式结合椭圆的定义，你能推导出椭圆的标准方程吗？

评析：在学习椭圆的内容之前，学生的头脑里其实已经有了对椭圆的前概念，并且学生已经学习了圆的相关知识，因此有关于椭圆的前概念是“压扁的圆”，虽然浅显，但却是学习“椭圆”重要的起点。因此教师在教学“椭圆及其标准方程”这一内容时，应当充分调用学生的前概念，从学生的实际生活出发，回忆生活中与椭圆有关的事物，再以学生的模糊认知作为本节课的切入点利用坐标伸缩公式推导出椭圆的标准方程。

(三) 梳理中建构，思维导图链接前概念

思维导图是用图解的形式和网状的结构，加上关键词和关键图像，用来存储、组织和优化信息，可以清晰、直观地表现知识间的关联和逻辑关系以及完整的知识结构[5]。按照层级绘制思维导图可以帮助学生在高中新课教学中顺利链接前概念，把握知识发展脉络，打破课时教学的局限性，有助于学生对知识的学习和保持，防止孤立学习和机械记忆，提升学习效率。

案例 3：函数的概念

师生活动 1：教师出示本课时主题——函数的概念，引导学生根据主题内容回忆自身前概念，在此过程中师生、生生充分互动交流。学生可以将自身前概念以思维导图的方式呈现，教师出示一份相对完整的初中函数内容的思维导图，重点回顾函数的概念，如图 3。

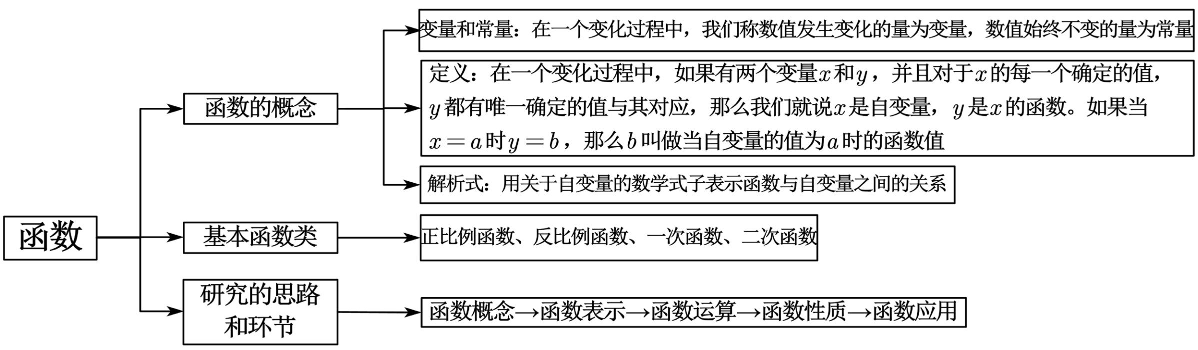

Figure 3. Functions points of knowledge (middle school)
图 3. 函数知识点(初中)

师生活动 2：初中对于函数概念的表述采用了“变量说”，以学生前概念为铺垫，学生对高中函数概念表述方式的求知欲被点燃，教师顺势而为带领学生在实际问题中探索和学习函数的概念，目标会更明确，过程会更顺利。师生共同总结函数的概念，如图 4。

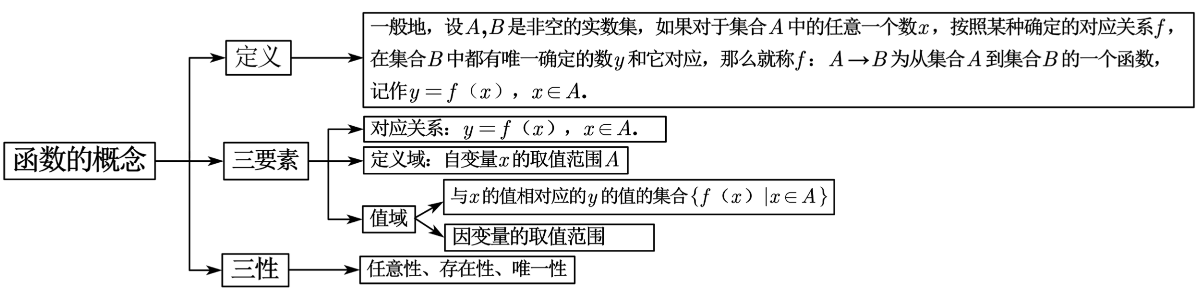

Figure 4. Concepts of functions (high school)
图 4. 函数的概念(高中)

师生活动 3：经历了活动 1 和活动 2，学生对函数的概念有了两种不同视域下的认识。为了使学生更好地理解和掌握新概念，教师可以引导学生对比新概念与前概念的相同点和不同点并利用思维导图呈现出来，如图 5 从而使学生明白高中为什么要对函数概念进行再一次的定义？这样定义的意义是什么？

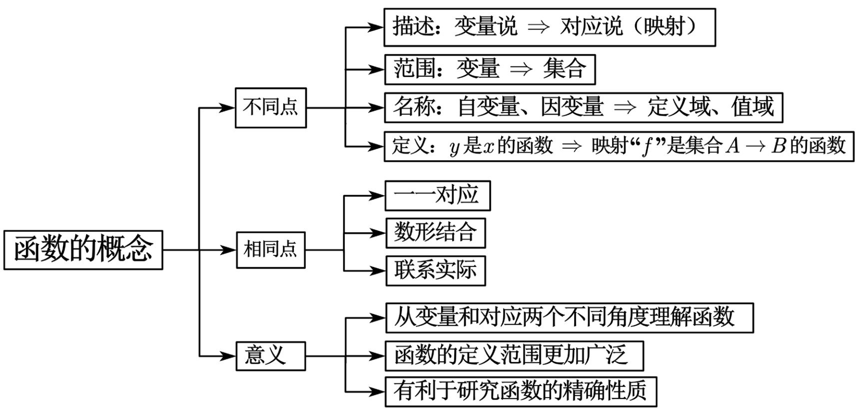

Figure 5. Differences and connections between the concepts of functions in middle and high school
图 5. 初高中函数概念的区别和联系

评析：函数是贯穿高中数学课程的四条主线之一，函数概念是学生对函数本质理解的第一步也是最关键的一步，对于后续各类函数的学习十分重要。活动 1 教师通过思维导图的形式，以函数为中心主题，将函数分成三个分支主题，重点回顾初中有关于函数概念的知识点，详略得当，将存在于学生脑海中零碎的前概念以相互关联、注重内在逻辑的思维导图呈现，从片段的机械学习转变为注重逻辑关系的有意义学习。

初高中对函数概念的表述不尽相同，学生在学习指出会感到很困惑：初中已经学习过函数的概念，为什么又要学习函数的另外一种概念？事实上，高中函数与初中函数概念之间既非同化、又非顺应，更非并列关系，而是一种从不同角度或在不同“视域”中考察同一对象所得到的不同结果，是从利用函数描述事物运动变化关系(变量)转化为研究两个集合之间的关系(对应) [6]。使学生能够从“变量”和“对应”这两个不同角度来理解函数。活动 2 引导学生按照函数概念的逻辑结构以及内在关联绘制思维导图，将新概念归纳整理成为系统的知识网络，以达到对概念学习的有效指导的目的。初中函数教学是开展高中函数教学的前提和基础，活动 3 将初中函数概念与高中函数概念进行区别与联系，培养学生多角度看问题的习惯，帮助学生建立完整的函数知识结构，顺利实现概念转变。

4. 结论或展望

前概念既是课堂教学的生长点，也是影响新旧知识迁移的重要条件。高中数学知识量剧增，内容相比其它几个学段也更加抽象复杂，在教学准备期时，教师要对学生的前概念进行调查、了解、梳理和分析，着眼于学生的最近发展区，开展符合学生认知规律的教学设计；在教学过程中，教师也应根据不同类型的前概念采取针对性的教学策略，同时也要保持对学生前概念的积极关注和敏锐捕捉，及时追问，教师的追问既可以问出前概念的源头，也可以引发学生认知冲突，促进学生前概念的正向迁移转化。必要时，借助思维导图，将学生头脑中碎片化的知识点进行串联，帮助学生建立良好的知识结构；在课程结束后，教师也应当及时进行反思总结，积极探索有效利用学生前概念的方式。科学概念的建构是一个复杂的过程，教师需要具有广博的知识储备，才能全面透彻地理解教材、分析教材，充分挖掘知识点之间的横向联系和纵向联系，实现学生前概念有效利用及转化，从而促进数学学习核心素养的形成。

参考文献

[1] 约翰·D·布兰思福特. 人是如何学习的[M]. 程可拉, 等, 译. 上海: 华东师范大学出版社, 2002.

[2] 丁菁. “函数 y = $A\sin(\omega x + \varphi)$的图象”教学设计实施与反思[J]. 中国数学教育, 2017(Z2): 52-55.

[3] 杨军. 基于理解的“函数图象变换”教学的新设想[J]. 数学通报, 2015, 54(2): 43-44+59.

[4] 单雪昀, 杨军. 基于理解的“椭圆及其标准方程”的教学设计[J]. 数学通讯, 2018(18): 16-20.

[5] 闫守轩. 思维导图: 优化课堂教学的新路径[J]. 教育科学, 2016, 32(3): 24-28.

[6] 钟志华, 黄桂君. 从联系观点看高中函数概念教学难点及成因[J]. 数学通报, 2022, 61(6): 25-29+48.