Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(1), 120-123
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.131014

Gorenstein平坦模和右拟Frobenius扩张

孙菊香

商丘师范学院数学与统计学院，河南 商丘

收稿日期：2022年12月24日；录用日期：2023年1月23日；发布日期：2023年1月30日

摘 要

作为环的Frobenius扩张的非平凡推广，B. Muller引入了环的右(左)拟Frobenius扩张。本文通过建立凝聚环和它的右拟Frobenius扩张的Gorenstein平坦模的联系，探讨了右拟Frobenius扩张下模的Gorenstein平坦维数之间的关系。

关键词

Gorensrin平坦模，Gorenstein平坦维数，右(左)拟Frobenius扩张

Gorenstein Flat Modules and Quasi-Frobenius Extensions

Juxiang Sun

School of Mathematics and Statistics, Shangqiu Normal University, Shangqiu Henan

Received: Dec. 24th, 2022; accepted: Jan. 23rd, 2023; published: Jan. 30th, 2023

Abstract

As a nontrivial generalization of Frobenius extensions of rings, B. Muller introduced the concept of right (left) quasi-Frobenius extensions of rings. In this paper, we study the relationship between Gorenstein flat dimensions under right Quasi-Frobenius extension modules by establishing relations between condensation ring and Gorenstein flat modules linked by the right Quasi-Frobenius extensions of rings.

Keywords

Gorenstein Flat Module, Gorenstein Flat Dimension, Right (Left) Quasi-Frobenius Extension

文章引用: 孙菊香. Gorenstein 平坦模和右拟 Frobenius 扩张[J]. 理论数学, 2023, 13(1): 120-123.
DOI: 10.12677/pm.2023.131014

1. 引言

作为拟 Frobenius 环和环的 Frobenius 扩张的非平凡推广，环的右(左)拟 Frobenius 扩张是由 B. Muller 在[1] [2]引入和研究的，它与诸如环的优化扩张、正则扩张、(H-)可分扩张等一些重要的环扩张具有密切的联系。相比环的 Frobenius 扩张，环的右拟 Frobenius 扩张的关于左、右模的“非对称”的性质引起人们的广泛的兴趣(详见参考文献[1]-[8])。Y. Iwanagao 在参考文献[4]通过建立一个诺特环与它可分拟 Frobenius 扩张的内射模之间的联系得到 Gorenstein 环的拟 Frobenius 扩张仍是 Gorenstein 环，E. Enochs 将这一结论进一步推广到一般环上。

作为相对同调的主要研究对象之一的 Gorenstein 平坦模的相关性质的研究也一直受到人们的广泛关注。另一方面，在环扩张下，包括 Gorenstein 平坦维数、Gorenstein 整体维数在内的同调不变性质的研究也一直是一个热门话题。本文中主要在环的右拟 Frobenius 扩张下探讨模的 Gorenstein 同调性质。

本文主要内容分成三部分。其中我们将本文所用到的定义和相关结论放在了第二部分预备知识之中。在第三部分我们通过建立了凝聚环与它的可分右拟 Frobenius 扩张的 Gorenstein 平坦模之间的联系，探讨了凝聚环与它的可分右拟 Frobenius 扩张上的模的 Gorenstein 平坦维数的关系，得到如下定理。

定理 1.1 设 S 是凝聚环 R 的一个可分的 QF-扩张，M 是 S-模。则

$$\mathrm{Gfd}\, M_R = \mathrm{Gfd}\, M_S .$$

2. 预备知识

本文中的所有的环是具有单位元的结合环，所有模不加说明是右模。设 S 是一个环，将所有 S-模构成的范畴记为 Mod S。记 Inj(S)表示所有左 S-模构成的子范畴。若环 S 为环 R 的环扩张，记作 $S \geq R$。

定义 2.1 [1] [2]环 S 称为 R 右拟 Frobenius 扩张(简称右 QF-扩张)，如果

(1) S_R 是一个有限生成投射模；

(2) ${}_RS_S$ 作为(R, S)-模是 $\mathrm{Hom}_R({}_SS_R, R)$的直和项，记作 ${}_RS_S|\mathrm{Hom}_R({}_SS_R, R)$。

左 QF-扩张类似定义。一个环扩张 $S \geq R$ 称为 **QF-扩张**，如果它既是左 QF-扩张又是右 QF-扩张。

引理 2.2 设环 S 为 R 的右 QF-扩张。

(1) ([5]，引理 2.1)如果 I 是一个内射 S-模，则 I 是内射 R-模；

(2) ([6]，命题 7)如果 X 是内射 R-模，则 $X \otimes_R S$ 是一个内射 S-模。

定义 2.3 [2]环扩张 $S \geq R$ 称为可分的，如果存在一个 $S \otimes_R S$ 到 S 的(R, R)-模可裂的满态射。

一个可分扩张 $S \geq R$ 称为**可分右 QF-扩张**，如果它也是环右 QF-扩张。

可分环扩张具有以下性质。

引理 2.4 [2]设环 S 是 R 的可分环扩张。对于任何 S-模 M，则 M 是 $M \otimes_R S$ 的直和项。

一个 R-模 M 称为 **Gorenstein 平坦模**[9]，如果存在正合列

$$T: \cdots \to F_1 \to F_0 \to F^0 \to F^1 \to \cdots ,$$

使得对于任何左内射 R-模 I 复形 $T \otimes_R I$ 仍是正合，且 $M = \mathrm{Ker}\left(F_0 \to F^0\right)$，其中，$F^i, F_j\ (i, j = 0,1,2,\cdots)$ 为平坦模。设 N 是一个 R-模，N 的 Gorenstein 平坦分解式长度的最小值称为 N 的 **Gorenstein 平坦维数**，记作 Gfd(N)。

引理 2.5 [4]设 R 是凝聚环，Gorenstein 平坦 R-模的直和项仍是 Gorenstein 平坦 R-模。

3. 主要结果

由右 QF-扩张的定义易得下面结论。

引理 3.1. 设 S 是环 R 的右 QF-扩张，则

(1) S 是有限生成投射左 R-模。

(2) $\mathrm{Hom}_R({}_RS_S, {}_RR)$作为(S, R)-模是 ${}_SS_R$ 的直和项。

证明：(1) 由定义 2.1 可得 S 是有限生成投射 R-模，故 $\mathrm{Hom}_R({}_SS_R, R)$是投射左 R-模。又由 ${}_RS_S|\mathrm{Hom}_R({}_SS_R, R)$可得 S 是有限生成投射左 R-模。

(2) 由定义 2.1 (2)可得(R, S)-模同构 ${}_RS_S \oplus N \cong \mathrm{Hom}_R\left({}_SS_R, R\right)$，其中 N 为(R, S)-模。从而，可得(S, R)-模同构

$$\mathrm{Hom}_R\left({}_RS_S, R\right) \oplus \mathrm{Hom}_R\left({}_RN_S, R\right) \cong \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{Hom}_R\left({}_SS_R, R\right), R\right).$$

另一方面，由定义 2.1 可得 S 是投射 R-模，从而可得(S, R)-模同构 $\mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{Hom}_R\left({}_SS_R, R\right), R\right) \cong {}_SS_R$。由此可得 $\mathrm{Hom}_R({}_RS_S, {}_RR)$作为(S, R)-模是 ${}_SS_R$ 的直和项。证毕。

命题 3.2 设 S 是环 R 的右 QF-扩张，M 是 R-模。如果 M 是一个 Gorenstein 平坦 R-模，则 $M \otimes_R S$ 是一个 Gorenstein 平坦 S-模。

证明：因为 M 是一个 Gorenstein 平坦 R-模，则存在正合列

$$T: \cdots \to F_1 \to F_0 \to F^0 \to F^1 \to \cdots,$$

使得对于任何左内射 R-模 I 复形 $T \otimes_R I$ 仍是正合的，且 $M = \mathrm{Ker}\left(F_0 \to F^0\right)$。其中，$F^i, F_j \left(i, j = 0,1,2,\cdots\right)$为平坦 R-模。

由引理 3.1.可知 S 是投射左 R-模，因此，复形

$$T \otimes_R S: \cdots \to F_1 \otimes_R S \to F_0 \otimes_R S \to F^0 \otimes_R S \to F^1 \otimes_R S \to \cdots,$$

是正合的，且 $M \otimes_R S = \mathrm{Ker}\left(M_0 \otimes_R S \to M_1 \otimes_R S\right)$。

设 I 为任意内射左 S-模，由引理 2.2(1)可知 ${}_RI$ 是一个左内射 R-模。则由 R-模同构 ${}_RS \otimes_S I \cong {}_RI$ 可知 ${}_RS \otimes_S I$ 为左内射 R-模，从而复形 $T \otimes_R \left(S \otimes_R I\right)$ 也是正合的。故由定义可知 $M \otimes_R S$ 是一个 Gorenstein 平坦 S-模。

下面推论将参考文献[10]命题 3.10 的结论由交换环推广到非交换环上。

推论 3.3. 设 S 是环 R 的右 QF-扩张，M 为任意 R-模。则

$$\mathrm{Gfd}\left(M \otimes_R S\right) \le \mathrm{Gfd}\left(M\right).$$

证明：由 Gorenstein 平坦维数的定义和命题 3.2 直接可得。

定理 3.4. 设 S 是环 R 的可分右 QF-扩张，N 是 S-模。则 N 是 Gorenstein 平坦 R-模当且仅当 N 是 Gorenstein 平坦 S-模。

证明：先证必要性。设 N 是 Gorenstein 平坦 R-模。由命题 3.2.可得 $N \otimes_R S$ 是 Gorenstein 平坦 S-模。又因为 S 是 R 的可分环扩张，故 N 作为 S-模是 $N \otimes_R S$ 的直和项。由引理 2.5 可得 N 是 Gorenstein 平坦 S-模。

再证充分性。因为 N 是 Gorenstein 平坦 S-模，从而存在正合列

$$T: \cdots \to \left(F_1\right)_S \to \left(F_0\right)_S \to \left(F^0\right)_S \to \left(F^1\right)_S \to \cdots,$$

使得对于任意左内射 S-模 I，复形 $T\otimes_R I$ 仍正合且 $N=\mathrm{Ker}\left(F_0\to F^0\right)$。其中 F_i, F^j 为平坦模。

显然，复形

$$T:\cdots\to(F_1)_R\to(F_0)_R\to\left(F^0\right)_R\to\left(F^1\right)_R\to\cdots,$$

在 Mod R 中仍是正合的且 $N_R=\mathrm{Ker}\left((F_0)_R\to\left(F^0\right)_R\right)$。

由引理 2.2.可得对于任意左内射 R-模 I，$S\otimes_R I$ 是左内射 S-模。又由同构态射 $T\otimes_R I\cong T\otimes_S(S\otimes_R I)$ 可得，$T\otimes_R I$ 正合，从而可得 N 是 Gorenstein 平坦 R-模。

定理 3.5 设 S 是凝聚环 R 的右 QF-扩张，N 是 S-模，则 $\mathrm{Gfd}(N_R)\le\mathrm{Gfd}(N_S)$。特别，若 S 还是凝聚环 R 的可分扩张，$\mathrm{Gfd}(N_S)=\mathrm{Gfd}(N_R)$。

证明： 先证 $\mathrm{Gfd}(N_R)\le\mathrm{Gfd}(N_S)$。不失一般性，设 $\mathrm{Gfd}(N_S)=m$，则存在 S-模长正合列

$$0\to V_m\to V_{m-1}\to\cdots\to V_0\to N\to 0,\tag{1}$$

其中 $V_i\ (i=0,1,2,\cdots,m)$ Gorenstein 平坦 S-模。由定理 3.4 可得，(1)是 R-模长正合列且 $V_i\ (i=0,1,2,\cdots,m)$ Gorenstein 平坦 R-模。从而 $\mathrm{GfdN}_R\le m$。

反过来，若 $\mathrm{GfdN}_R=n$，则由推论 3.3 可得 $\mathrm{Gfd}(N\otimes_R S)\le n$。因为 S 是凝聚环 R 的可分环扩张，则 $N_S\mid N\otimes_R S$。从而可得 $\mathrm{GfdN}_S\le n$。证毕。

基金项目

此项研究受河南省高等学校青年骨干教师培养计划项目资助(2019GGJS204)。

参考文献

[1] Muller, B. (1964) Quasi-Frobenius-Erweiterungen. *Mathematische Zeitschrift*, **85**, 345-368. https://doi.org/10.1007/BF01110680

[2] Muller, B. (1965) Quasi-Frobenius-Erweiterungen II. *Mathematische Zeitschrift*, **88**, 380-409. https://doi.org/10.1007/BF01112222

[3] Kasch, F. (1960/1961). Projective Frobenius-Erweiterungen. *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*, **1960/1961**, 89-109. https://doi.org/10.1007/978-3-662-25130-0

[4] Hirata, K. and Sugano, K. (1966) On Semisimple Extensions and Separable Extensions over Noncommutative Rings. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **18**, 360-373. https://doi.org/10.2969/jmsj/01840360

[5] Iwanagao, Y. (1980) On Rings with Finite Self-Injective Dimension II. *Tsukuba Journal of the Mathematics*, **4**, 107-113. https://doi.org/10.21099/tkbjm/1496158797

[6] Kitamura, Y. (1998) Torsion Theories of Quasi-Frobenius Extensions. *Communications in Algebra*, **26**, 2191-2198. https://doi.org/10.1080/00927879808826269

[7] Kitamura, Y. (2002) A Note on Quasi-Frobenius Extensions. *Archiv der Mathematik*, **78**, 8-11. https://doi.org/10.1007/s00013-002-8210-8

[8] Sugano, K. (1970) Separable Extensions and Frobenius Extensions. *Osaka Journal of the Mathematics*, **7**, 291-299.

[9] Bennis, D. and Mahdou, N. (2010) Gorensten Global Dimension. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **138**, 461-465. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-09-10099-0

[10] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007