**Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 928-937**
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126102

# 一类二阶差分方程组 Robin 边值问题的正解

**吴海艺**

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年5月3日；录用日期：2022年6月7日；发布日期：2022年6月14日

## 摘 要

本文出于对差分方程组边值问题非线性项的耦合增长的思考，解决一类非线性差分方程组边值问题的正解。运用了非负上凸函数的 **Jensen** 不等式和不动点指数理论讨论了一类二阶差分方程组 **Robin** 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta^2 u(t-1) = f(t,u,v), & t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ -\Delta^2 v(t-1) = g(t,u,v), & t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = \Delta u(T) = 0, \\ v(0) = \Delta v(T) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $T\geq 2$ 是一个整数，$\Delta u(t) = u(t+1)-u(t)$ 是前向差分算子，$f,\ g: [1,T]_{\mathbb{Z}}\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续。

## 关键词

**Jensen不等式，正解，二阶差分方程组，不动点指数理论**

# Positive Solutions of Robin Boundary Value Problems for a Class of Second-Order Difference System

**Haiyi Wu**

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

文章引用: 吴海艺. 一类二阶差分方程组 Robin 边值问题的正解[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 928-937.
DOI: 10.12677/pm.2022.126102

Received: May $3^{rd}$, 2022; accepted: Jun. $7^{th}$, 2022; published: Jun. $14^{th}$, 2022


## Abstract

**In this paper, we consider the coupled growth of nonlinear terms for boundary value problems of systems of difference equations, resolve the positive solutions of boundary value problems for a class of nonlinear difference equations. Also by using Jensen's inequality for nonnegative concave functions and the fixed point index theory, we discuss the existence of positive solutions of Robin boundary value problems for a class of second-order difference system**

$$\begin{cases} -\Delta^2 u(t-1) = f(t,u,v), & t \in [1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ -\Delta^2 v(t-1) = g(t,u,v), & t \in [1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = \Delta u(T) = 0, \\ v(0) = \Delta v(T) = 0 \end{cases}$$

**where $T \geq 2$ is the integer, $\Delta u(t) = u(t+1) - u(t)$ is the forward difference operator, $f,\ g : [1,T]_{\mathbb{Z}} \times [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ are continuous.**



## Keywords

**Jensen's Inequality, Positive Solutions, Second-Order Difference Equations, Fixed Point Index Theory**




## 1. 引言

设 $\mathbb{Z}$ 是整数集, 对任意 $a,\ b \in \mathbb{Z}$ 且 $a < b$, 记 $[a,b]_{\mathbb{Z}} := \{a, a+1, \cdots, b\}$.

近年来, 随着离散数学、统计、计算、电路分析、动力系统、经济学、生物学等学科领域的快速发展, 大量由差分方程描述的数学模型被提出和研究. 例如: 放射性物质的质量衰减问题、种群生态学中的虫口模型、 Fiobonacci 问题、复利问题等. 然而关于差分方程(组)边值问题的研究却相对

缓慢, 并且大多数是采用与微分方程类似的方法来研究. 其中一类是建立 Green 函数将所研究的边值问题转化为求特定函数空间中算子的不动点, 然后利用不动点定理、上下解方法或拓扑度理论求解, 另一类是运用分歧理论、变分法、临界点理论结合不动点理论研究, 参见文献 [1–10].

2009年, Henderson [9]在$f$, $g$, $a$, $b$具有弱耦合的条件下, 基于锥上的不动点定理讨论了差分系统

$$\begin{cases} \Delta^2 u(n-1)+\lambda a(n)f(u(n),v(n))=0, & n\in[1,N-1]_{\mathbb{Z}}, \\ \Delta^2 v(n-1)+\mu b(n)g(u(n),v(n))=0, & n\in[1,N-1]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0)=\beta u(\eta), u(N)=\alpha u(\eta)=0, \\ v(0)=\beta v(\eta), v(N)=\alpha v(\eta)=0 \end{cases}$$

正解的存在性, 其中 $\eta\in[1,N-1]_{\mathbb{Z}}$, $\alpha$, $\beta$, $\lambda$, $\mu>0$, $N\geq 4$, 且 $f$, $g$, $a$, $b$ 非负连续.

在此基础上, 2011 年, 文 [10]研究了具有更一般边界条件的分数阶差分系统正解的存在性.

2020 年, 在文 [11]中, Yang 等人基于非负上凸函数的 Jensen 不等式和不动点指数理论, 研究了一类拟线性二阶常微分方程组 Robin 边值问题

$$\begin{cases} -((u')^{p-1})'=f(t,u,v), & t\in[0,1], \\ -((v')^{q-1})'=g(t,u,v), & t\in[0,1], \\ u(0)=u'(1)=0, \\ v(0)=v'(1)=0 \end{cases}$$

正解的存在性, 其中 $p$, $q>1$, 且 $f$, $g:[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续.

受上述文献启发, 本文利用非负上凸函数允许非线性项 $f$, $g$ 的混合增长, 基于非负上凸函数的 Jensen 不等式结合不动点指数理论来获得先验估计, 研究了如下二阶差分方程组 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta^2 u(t-1)=f(t,u,v), & t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ -\Delta^2 v(t-1)=g(t,u,v), & t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0)=u(T+1)=0, \\ v(0)=v(T+1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性.

本文组织如下: 第二节包含几个初步结果, 特别是由上凸函数性质所得的新的不等式和非负上凸函数的Jensen不等式. 第三节我们先给定本文总假定, 运用上凸函数来刻画非线性项$f$, $g$的混合增长. 例如, $f$是次线性增长, 则$g$是超线性增长. 最后, 在本节中, 我们给出了本文的主要结果及其证明.

## 2. 预备知识

本文所用的空间为:

记 $E := \{u(t) \,|\, u : [0, T{+}1]_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R},\ u(0) = 0 = u(T{+}1)\}$, $P := \{u \in E \,|\, u(t) \geq 0,\ t \in [0, T{+}1]_{\mathbb{Z}}\}$, 则 $E$ 在范数 $\|u\| = \max_{t \in [0,T+1]_{\mathbb{Z}}} |u(t)|$ 下构成实的 Banach 空间, 且 $P$ 为 $E$ 上的一个锥.

对于任意 $(u, v) \in E \times E$,

$$\|(u, v)\| := \max\{\|u\|, \|v\|\},$$

则 $E \times E$ 在范数 $\|(u, v)\|$ 下构成实的 Banach 空间.

差分系统 (1) 等价于

$$\begin{cases} u(t) = \sum_{s=1}^{T} G(t, s) f(s, u(s), v(s)), & t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}, \\ v(t) = \sum_{s=1}^{T} G(t, s) g(s, u(s), v(s)), & t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}, \end{cases} \tag{2}$$

对于 $u(t),\ v(t) : [0, T+1]_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$, 定义算子 $A_1,\ A_2 : P \times P \to P,\ A : P \times P \to P \times P$,

$$\begin{cases} A_1(u, v)(t) := \sum_{s=1}^{T} G(t, s) f(s, u_0(s), v_0(s)), & t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}, \\ A_2(u, v)(t) := \sum_{s=1}^{T} G(t, s) g(s, u_0(s), v_0(s)), & t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}, \end{cases} \tag{3}$$

且 $A(u, v)(t) := (A_1(u, v)(t), A_2(u, v)(t))$, 其中 $G(t, s) := \min\{t, s\},\ s,\ t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}$ 为线性问题

$$\begin{cases} -\Delta^2 u(t-1) = h(t), & t \in [1, T]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = \Delta u(T) = 0 \end{cases}$$

的格林函数. 易证, 算子 $A_1,\ A_2,\ A$ 全连续, 方程组 (1) 等价于算子方程 $(u, v) = A(u, v)$.

本文使用的主要工具如下:

**引理 1** ( [8]) 设 $E$ 为实的 Banach 空间, $P$ 为 $E$ 中的一个锥, $\Omega$ 是 $P$ 上的一个有界开集, 算子 $T : \overline{\Omega} \cap P \to P$ 全连续. 若存在 $x_0 \in P \setminus \{0\}$, 使得

$$x - Tx \neq \lambda x_0, \quad x \in \partial\Omega \cap P,\ \lambda \geq 0,$$

则 $i(T, \Omega \cap P, P) = 0$. 这里 $i$ 是 $P$ 上的不动点指数.

**引理 2** ( [8]) 设 $E$ 为实的 Banach 空间, $P$ 为 $E$ 中的一个锥, $\Omega$ 是 $P$ 上的一个有界开集, $0 \in \Omega$, 算子 $T : \overline{\Omega} \cap P \to P$ 全连续. 若

$$x - \lambda Tx \neq 0, \quad x \in \partial\Omega \cap P,\ \lambda \in [0, 1],$$

则 $i(T, \Omega \cap P, P) = 1$. 这里 $i$ 是 $P$ 上的不动点指数.

**引理 3** ( [11]) 设 $P \times P$ 是 Banach 空间 $(E, \|\cdot\|)$ 的一个锥, 算子 $T : P \times P \to P \times P$ 全连续, 若 $r_{P \times P}(T) < 1$, 则存在 $P \times P$ 上的算子 $I - T$ 的全连续逆算子 $(I - T)^{-1}$,

$$(I - T)^{-1}_{P \times P} = \sum_{m=0}^{\infty} T^m,$$

其中, $r_{P\times P}(T)$ 为算子 $T$ 在 $P\times P$ 上的谱半径.

**推论 1** ( [11]) 设 $P\times P$ 是 Banach 空间 $(E,\|\cdot\|)$ 的一个锥, 算子 $T: P\times P\to P\times P$ 全连续, 若 $r_{P\times P}(T)<1$ 且 $x,\ x_0\in P\times P$, 满足 $x\le Tx+x_0$, 则 $x\le (I-T)^{-1}_{P\times P}x_0$.

**引理 4** 设 $\omega\in P$ 是 $[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上的上凸函数, 若存在 $[0,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上的一点 $r$, 使得 $\|\omega\|=\omega(r)$, 则

$$\|\omega\|<\frac{r}{\mu_1}\sum_{t=1}^{T}\omega(t)\sin\frac{\pi t}{2T+1}. \tag{4}$$

其中, $\mu_1=\sum_{t=1}^{r}t\sin\frac{\pi t}{2T+1}>0$.

**证明.** 由假设可知,

$$\begin{aligned}&\sum_{t=1}^{T}\omega(t)\sin\frac{\pi t}{2T+1}\\ =&\sum_{t=1}^{r}\omega(r\cdot\frac{t}{r}+(1-\frac{t}{r})\cdot 0)\sin\frac{\pi t}{2T+1}+\sum_{t=r+1}^{T}\omega((T+1)\cdot\frac{t}{T+1}+(1-\frac{t}{T+1})\cdot 0)\sin\frac{\pi t}{2T+1}\\ >&\frac{\omega(r)}{r}\sum_{t=1}^{r}t\sin\frac{\pi t}{2T+1}=\frac{\|\omega\|\mu_1}{r},\end{aligned}$$

从而 (4) 成立.

**引理 5** ( [7]) 设 $\Psi_1:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的上凸函数, $\Psi_2:[1,T]_{\mathbb{Z}}\to[0,\infty)$ 是给定的函数, 若 $p_i>0$, 则

$$\Psi_1\Big(\frac{\sum_{i=1}^{T}p_i\Psi_2(i)}{\sum_{i=1}^{T}p_i}\Big)\ge\frac{\sum_{i=1}^{T}p_i\Psi_1(\Psi_2(i))}{\sum_{i=1}^{T}p_i}.$$

**引理 6** 设 $\varphi_1(t)=\sin\frac{\pi t}{2T+1}$, $t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$, 则

$$\lambda_1\sum_{t=1}^{T}G(t,s)\varphi_1(t)=\varphi_1(s),\quad s\in[1,T]_{\mathbb{Z}}.$$

其中, $\lambda_1=4\sin^2\frac{\pi}{4T+2}$.

**证明.** 因为 $\lambda_1\sum_{s=1}^{T}G(t,s)\varphi_1(s)=\varphi_1(t),\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$. 注意到, 格林函数的对称性, $G(t,s)=G(s,t),\ t,\ s\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$. 所以 $\lambda_1\sum_{s=1}^{T}G(s,t)\varphi_1(s)=\varphi_1(t),\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$. 因此结论成立.

**引理 7** 设 $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续且在 $[0,\infty)$ 上凸, 则 $\psi$ 单调递增.

**证明.** 对任意的 $x>x_2>x_1\ge 0$, 由于 $\psi$ 上凸, 则

$$\psi(x_2)\ge\psi(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x-x_2}(\psi(x)-\psi(x_2)),$$

结合 $\psi$ 的非负性, $\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}\geq 0$. 从而 $\psi(x_2)\geq\psi(x_1)$.

## 3. 主要结果及证明

本文总假定:

(H1) 函数 $f,\ g:[1,T]_{\mathbb{Z}}\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续;

(H2) 函数 $\psi_1,\ \psi_2:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续, $\psi_1$ 为上凸函数, 且存在常数 $\alpha>2(T+1)^2\sin^4\frac{\pi}{4T+2}$, $c>0$, 使得

(i) $f(t,x,y)\geq\ \psi_1(y)-c,\ g(t,x,y)\geq\ \psi_2(x)-c,\quad t\in[1,T]_{\mathbb{Z}},\ x,\ y\in[0,\infty)$;

(ii) $\psi_1(\psi_2(z))\geq\alpha z-c,\quad z\in[0,\infty)$;

(H3) 存在常数 $a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1\geq 0,\ r>0$, 且 $r_{P\times P}(T_1)<1$, 有

$$f(t,u,v)\leq a_1u+b_1v,\ \ g(t,u,v)\leq c_1u+d_1v,\quad x,\ y\in[0,r],\ t\in[1,T]_{\mathbb{Z}},$$

其中, 算子 $T_1:P\times P\to P\times P$,

$$T_1(u,v)(t):=(\sum_{s=1}^{T}G(t,s)(a_1u(t)+b_1v(t)),\sum_{s=1}^{T}G(t,s)(c_1u(t)+d_1v(t))).$$

本文的主要结果如下:

**定理 1** 假定 (H1)-(H3) 成立, 方程组 (1) 至少存在一个正解.

**证明**. 记 $M_1:=\{(u,v)\in P\times P:(u,v)=A(u,v)+\lambda(\omega_0,\omega_0),\lambda\geq 0\}$, 其中 $\omega_0(t):=(2T+1)t-t^2$. 若 $(u_0,v_0)\in M_1$, 则存在 $\lambda_0\geq 0$, 由

$$u_0(t)=\sum_{s=1}^{T}G(t,s)f(s,u_0(s),v_0(s))+\lambda_0\omega_0,\ \ v_0(t)=\sum_{s=1}^{T}G(t,s)g(s,u_0(s),v_0(s))+\lambda_0\omega_0,\tag{5}$$

结合 (2), (3) 可得, $(u_0,v_0)=A(u_0,v_0)+\lambda_0(\omega_0,\omega_0)$.

由 (H1) 可知, $\Delta^2u_0(t-1)\leq 0$, 从而 $u_0$ 在 $[1,T]_{\mathbb{Z}}$ 上是上凸的. 同理可得, $v_0$ 在 $[1,T]_{\mathbb{Z}}$ 上也是上凸的. 结合 (5) 得,

$$u_0(t)\geq\sum_{s=1}^{T}G(t,s)f(s,u_0(s),v_0(s)),\ \ v_0(t)\geq\sum_{s=1}^{T}G(t,s)g(s,u_0(s),v_0(s)),$$

由假定 (H2) 中的 (i) 得,

$$u_0(t)\geq\sum_{s=1}^{T}G(t,s)\psi_1(v_0(s))-c_1,\ \ v_0(t)\geq\sum_{s=1}^{T}G(t,s)\psi_2(u_0(s))-c_1,\tag{6}$$

因此,

$$u_0(t) \geq \sum_{s=1}^{T} G(t,s)\psi_1(\sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)\psi_2(u_0(\tau))) - c_2. \tag{7}$$

由于

$$\sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau) = \sum_{\tau=1}^{s} \tau + \sum_{\tau=s+1}^{T} s = \frac{(T+1-s)s}{2},$$

令 $h(s) = \frac{(T+1-s)s}{2}$, 则 $h$ 取得最小值 $\frac{T}{2}$, 最大值 $\frac{(T+1)^2}{8}$. 注意到 $T \geq 2$, 所以 $\sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau) \geq 1$.

由 $\psi_1$ 单调递增和引理 5 可得,

$$\begin{aligned}
\psi_1(\sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)\psi_2(u_0(\tau))) &\geq \psi_1\Big(\frac{\sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)\psi_2(u_0(\tau))}{\sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)}\Big) \geq \frac{\sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)\psi_1(\psi_2(u_0(\tau)))}{\sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)} \\
&\geq \frac{8}{(T+1)^2} \sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)\psi_1(\psi_2(u_0(\tau))),
\end{aligned}$$

结合 (H2) 中的 (ii)及(7) 可得,

$$\begin{aligned}
u_0(t) &\geq \frac{8}{(T+1)^2} \sum_{s=1}^{T} G(t,s) \sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)\psi_1(\psi_2(u_0(\tau))) - c_2 \\
&\geq \frac{8\alpha}{(T+1)^2} \sum_{s=1}^{T} G(t,s) \sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)u_0(\tau) - c_3.
\end{aligned}$$

则,

$$u_0(t) \geq \frac{8\alpha}{(T+1)^2} \sum_{s=1}^{T} G(t,s) \sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)u_0(\tau) - c_3. \tag{8}$$

记 $\mu_2 = \sum_{t=1}^{T} \sin\frac{\pi t}{2T+1} > 0$. 对 (8) 两端同时乘以 $\sin\frac{\pi t}{2T+1}$, 再从 $t=1$ 到 $T$ 上求和, 并由引理 6 可得,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} u_0(t)\sin\frac{\pi t}{2T+1} &\geq \frac{8\alpha}{(T+1)^2} \sum_{t=1}^{T} \Big(\sum_{s=1}^{T} G(t,s) \sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)u_0(\tau)\sin\frac{\pi t}{2T+1}\Big) - \mu_2 c_3 \\
&= \frac{8\alpha}{(T+1)^2} \sum_{s=1}^{T} \Big(\sum_{t=1}^{T} G(t,s)\sin\frac{\pi t}{2T+1} \sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)u_0(\tau)\Big) - \mu_2 c_3 \\
&= \frac{8\alpha}{(T+1)^2\lambda_1} \sum_{s=1}^{T} \sum_{\tau=1}^{T} G(s,\tau)\sin\frac{\pi s}{2T+1} u_0(\tau) - \mu_2 c_3 \\
&= \frac{8\alpha}{(T+1)^2\lambda_1} \sum_{\tau=1}^{T} \sum_{s=1}^{T} G(s,\tau)\sin\frac{\pi s}{2T+1} u_0(\tau) - \mu_2 c_3 \\
&= \frac{8\alpha}{(T+1)^2\lambda_1^2} \sum_{t=1}^{T} \sin\frac{\pi t}{2T+1} u_0(t) - \mu_2 c_3.
\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{t=1}^{T} u_0(t)\sin\frac{\pi t}{2T+1} \le \frac{(T+1)^2\lambda_1^2\mu_2 c_3}{8\alpha-(T+1)^2\lambda_1^2}. \tag{9}$$

引理 4 得,

$$\|u_0\| < \frac{r}{\mu_1}\sum_{t=1}^{T} u_0(t)\sin\frac{\pi t}{2T+1} \le \frac{(T+1)^2 r\lambda_1^2\mu_2 c_3}{\mu_1[8\alpha-(T+1)^2\lambda_1^2]}.$$

故 $u_0$ 有界, 下证 $v_0$ 有界. 由引理 4 可知,

$$\|v_0\| < \frac{r}{\mu_1}\sum_{t=1}^{T} v_0(t)\sin\frac{\pi t}{2T+1}.$$

由 (6) 和 (9) 结合引理 6 及引理 4 可推知,

$$\begin{aligned}
\frac{(T+1)^2\lambda_1^2\mu_2 c_3}{8\alpha-(T+1)^2\lambda_1^2} &\ge \sum_{t=1}^{T} u_0(t)\sin\frac{\pi t}{2T+1}\\
&\ge \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T} G(t,s)\psi_1(v_0(s))\sin\frac{\pi t}{2T+1}-\mu_2 c_1\\
&= \sum_{s=1}^{T}\sum_{t=1}^{T} G(t,s)\psi_1(v_0(s))\sin\frac{\pi t}{2T+1}-\mu_2 c_1\\
&= \frac{1}{\lambda_1}\sum_{t=1}^{T}\psi_1(v_0(t))\sin\frac{\pi t}{2T+1}-\mu_2 c_1\\
&= \frac{1}{\lambda_1}\sum_{t=1}^{T}\psi_1\Big(\frac{v_0(t)}{\|v_0\|}\cdot\|v_0\|\Big)\sin\frac{\pi t}{2T+1}-\mu_2 c_1\\
&\ge \frac{1}{\lambda_1}\frac{\psi_1(\|v_0\|)}{\|v_0\|}\sum_{t=1}^{T} v_0(t)\sin\frac{\pi t}{2T+1}-\mu_2 c_1\\
&> \frac{\mu_1}{r\lambda_1}\psi_1(\|v_0\|)-\mu_2 c_1.
\end{aligned}$$

因此,

$$\psi_1(\|v_0\|) < \frac{(T+1)^2 r\lambda_1^3\mu_2 c_3}{\mu_1(8\alpha-(T+1)^2\lambda_1^2)}+\frac{r\lambda_1\mu_2 c_1}{\mu_1}.$$

由 (H2) 可知, $\lim_{z\to\infty}\psi_1(z)=\infty$, 则存在 $c_4>0$, 使得 $\|v_0\|<c_4$, 故 $M_1$ 有界.

令 $R>\sup\{(u,v):(u,v)\in M_1\}$, 则存在 $\omega_0\ne 0$, 使得 $(u,v)\ne A(u,v)+\lambda(\omega_0,\omega_0)$. 由引理 1 , 任意 $(u,v)\in\partial B_R\cap P\times P$, $\lambda\ne 0$,

$$i(A, B_R\cap P\times P, P\times P)=0. \tag{10}$$

记 $M_2=\{(u,v)\in\bar{B}_r\cap P\times P:(u,v)=\lambda A(u,v),\ \lambda\in[0,1]\}$, 下证 $M_2=\{0\}$. 若 $(u_0,v_0)\in$

$M_2$, $(u_0,v_0) \in \bar{B}_r \cap P \times P$, 则 $(u_0,v_0) = \lambda_0 A(u_0,v_0)$. 由于问题 (1) 等价于算子方程 $(u_0,v_0) = A(u_0,v_0)$, 结合 (2), 对某个 $\lambda_0 \in [0,1]$,

$$u_0(t) \le \sum_{s=1}^{T} G(t,s) f(s,u_0(s),v_0(s)), \quad v_0(t) \le \sum_{s=1}^{T} G(t,s) g(s,u_0(s),v_0(s)),$$

由 (H3) 知,

$$u_0(t) \le \sum_{s=1}^{T} G(t,s)(a_1 u_0 + b_1 v_0), \quad v_0(t) \le \sum_{s=1}^{T} G(t,s)(c_1 u_0 + d_1 v_0),$$

从而

$$(u_0,v_0) \le T_1(u_0,v_0). \tag{11}$$

由推论 1 和 (10) 可知, $u_0 = v_0 = 0$, 故 $M_2 = \{0\}$. 由引理 2 可知, 对于任意 $(u,v) \in \overline{B_r} \cap P \times P$, $\lambda \in [0,1]$, $(u,v) \neq \lambda A(u,v)$. 则

$$i(A, B_r \cap P \times P, P \times P) = 1. \tag{12}$$

结合 (10), (12) 得,

$$i(A, (B_R/\overline{B_r}) \cap P \times P, P \times P) = -1.$$

则 $A$ 在 $(B_R/\overline{B_r}) \cap P \times P$ 至少有一个不动点.

# 基金项目

国家自然科学基金青年基金资助项目(11801453, 11901464), 甘肃省青年科技基金计划资助(20JR10RA100).

# 参考文献

[1] Chen, T.L., Ma, R.Y. and Liang, Y.W. (2019) Multiple Positive Solutions of Second-Order Nonlinear Difference Equations with Discrete Singular $\phi$-Laplacian. *Journal of Difference Equations and Applications*, **25**, 38-55. https://doi.org/10.1080/10236198.2018.1554064

[2] Gao, C.H. and Ma, R.Y. (2016) Eigenvalues of Discrete Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions. *Linear Algebra and Its Applications*, **503**, 100-119. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.03.043

[3] Ma, R.Y. and An, Y.L. (2009) Global Structure of Positive Solutions for Superlinear Second Order $m$-Point Boundary Value Problems. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **34**, 279-290. https://doi.org/10.12775/TMNA.2009.043

[4] Ma, R.Y., Gao, C.H. and Lu, Y.Q. (2018) Spectrum Theory of Second-Order Difference Equations with Indefinite Weight. *Journal of Spectral Theory*, **8**, 971-985. https://doi.org/10.4171/JST/219

[5] Mohammed, A., Radukecu, V. and Vitolo, A. (2020) Blow-Up Solutions for Fully Nonlinear Equation: Existence, Asvmototic Estimates and Uniqueness. *Advances in Nonlinear Analysis*, **9**, 39-64. https://doi.org/10.1515/anona-2018-0134

[6] Tisdell, C.C. (2017) A Discrete Approach to Continuous Second-Order Boundary Value Problems via Monotone Iterative Techniques. *International Journal of Difference Equations*, **12**, 145-160.

[7] Mitrinovic, D.S. (1970) Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, New York.

[8] Wang, Y. and Shi, Y.M. (2005) Eigenvalues of Second-Order Difference Equations with Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **309**, 56-69. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.12.010

[9] Henderson, J., Ntouyas, S. and Purnaras, I. (2009) Positive Solutions for Systems of Nonlinear Discrete Boundary Value Problems. *Journal of Difference Equations and Applications*, **15**, 895-912. https://doi.org/10.1080/10236190802350649

[10] Goodrich, C.S. (2011) Existence of a Positive Solution to a System of Discrete Fractional Boundary Value Problems. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 4740-4753. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.11.029

[11] Yang, Z.L., Wang, X.M. and Li, H.Y. (2020) Positive Solutions for a System of Second-Order Quasilinear Boundary Value Problems. *Nonlinear Analysis*, **195**, Article ID: 111749. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111749