Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(6), 971-980
Published Online June 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.126106

S^{m+p} 中子流形上的一个不等式

马江涛

云南师范大学数学学院，云南 昆明

收稿日期：2022年5月11日；录用日期：2022年6月16日；发布日期：2022年6月23日

摘 要

设 $x: M^m \to S^{m+p}(m \geq 2,\, p \geq 2)$ 是 $m+p$ 维单位球 S^{m+p} 中的一个 m 维无脐点子流形，M^m上的 Möbius 第二基本形式 B 是 M^m 在 S^{m+p} 中的 Möbius 变换群下的不变量，本文得到不等式 $\sum_{\alpha,\,\beta} tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2] \leq \frac{(m-1)(3m^2-9m+8)}{2m^3}$，证明了等号成立的条件。

关键词

Möbius 几何，Möbius 不变量，不等式

An Inequality on the Submanifolds of S^{m+p}

Jiangtao Ma

Department of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: May 11^{th}, 2022; accepted: Jun. 16^{th}, 2022; published: Jun. 23^{rd}, 2022

Abstract

Let $x: M^m \to S^{m+p}(m \geq 2,\, p \geq 2)$ be an m-dimensional no umbilical submaniflods in $m+p$-dimensional unit sphere S^{m+p}. The Möbius second basic from B of M^m is the invariant of under the group of Möbius transformations in S^{m+p}. We obtain inequality $\sum_{\alpha,\,\beta} tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2] \leq \frac{(m-1)(3m^2-9m+8)}{2m^3}$. The conditions for the equality sign are proved.

文章引用: 马江涛. S^{m+p} 中子流形上的一个不等式[J]. 理论数学, 2022, 12(6): 971-980.
DOI: 10.12677/pm.2022.126106

Keywords

Möbius Geometry, Möbius Invariant, Inequation

1. 引言

设$x: M^m \to S^{m+p}(m>3)$是 $m+p$ 维单位球 S^{m+p} 中的一个 m 维无脐点子流形, 由文献[1]知, 设 $\{e_i\}$ 是度量 $I=dx\cdot dx$ 的局部标准正交切标架场, 其对偶标架场为 $\{\theta_i\}$, 设第二基本形式 $II=\sum_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha}\theta_i\theta_j e_\alpha$, 平均曲率为 H . 定义 $\rho^2=\frac{m}{m-1}|II-\frac{1}{m}tr(II)I|^2$, 那么正定 2-形式 $g=\rho^2 I$ 是 S^{m+p} 中 Möbius 变换群下的不变量, 称为 x 的 Möbius 度量. 由文献[2]和文献[3]得 x 的三个基本 Möbius 不变量, 分别为 Möbius 形式 $\Phi=\sum_{i,\alpha} C_i^{\alpha}\theta_i e_\alpha$, Blaschke 张量 $A=\rho^2\sum_{i,j} A_{ij}\theta_i\theta_j$ 和 Möbius 第二基本形式 $B=\sum_{i,j,\alpha} B_{i,j}^{\alpha}\omega_i\omega_j(\rho^{-1}e_\alpha)$, 由文献[4]给出,

$$C_i^{\alpha}=-\rho^{-2}\left(H_{,i}^{\alpha}+\sum_j\left(h_{ij}^{\alpha}-H^{\alpha}\delta_{ij}\right)e_j(\log\rho)\right), \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} A_{ij}=&-\rho^{-2}\left(Hess_{ij}(\log\rho)-e_i(\log\rho)e_j(\log\rho)-\sum_\alpha H^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}\right)\\ &-\frac{1}{2}\rho^{-2}\left(\|\nabla\log\rho\|^2-1+\|H\|^2\right)\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$B_{ij}^{\alpha}=\rho^{-1}\left(h_{ij}^{\alpha}-H^{\alpha}\delta_{ij}\right), \tag{1.3}$$

其中 $Hess_{ij}$ 和 ∇ 为关于 $I=dx\cdot dx$ 在基底 $\{e_i\}$ 下的 $Hess$ 矩阵和梯度算子.称 B 的特征值为 x 的 Möbius 主曲率. R^{m+p+2} 是 $m+p+2$ 维欧式向量空间, 定义内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 如下:

$$\langle X,\xi\rangle=-x_0\xi_0+x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3+\ldots+x_{m+p+1}\xi_{m+p+1}, \tag{1.4}$$

其中

$$X=(x_0,\,x_1,\,x_2\ \cdots\ x_{m+p+1});\ \xi=(\xi_0,\,\xi_1,\,\xi_2\cdots\ \xi_{m+p+1}),$$

称具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的向量空间 R^{m+p+2} 为 $m+p+2$ 维 Lortentz 空间, 记为 R_1^{m+p+2} .

定义

$$C_+^{m+p+1} := \{X \in R_1^{m+p+2} | \langle X, X\rangle = 0, x_0 > 0\}, \tag{1.5}$$

为 R_1^{m+p+2} 的正光锥, 定义

$$Q^{m+p} := \{[\xi] \in RP^{m+p+1} | \langle \xi, \xi\rangle = 0\}, \tag{1.6}$$

为 RP^{m+p+1} 中的二次曲面.

2. 本文主要结果

本文在 Möbius 几何上得到如下定理:

定理A 设 $x : M^m \to S^{m+p}(m \geq 2,\, p \geq 2)$ 是无脐浸入子流形, B 为 Möbius 第二基本形式, 则有下列不等式

$$\sum_{\alpha,\,\beta} tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2] \leq \frac{(m-1)(3m^2-9m+8)}{2m^3},$$

成立, 其中等号成立当且仅当 M^m 是共形平坦且 B^α 相似于下列矩阵之一

$$\begin{bmatrix} 0 & u & 0\cdots & 0 \\ u & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \begin{bmatrix} u & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & -u & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

3. S^{m+p} 子流形的 Möbius 不变量

王长平建立了球中子流形的光锥模型和完全不变量系统, 本文使用与其相同的记号和公式.设 $x : M^m \to S^{m+p} \subset R^{m+p+1}$ 是无脐浸入. x 的 Möbius 位置向量定义为

$$\xi = \rho(1, x) :\, M^m \to R_1^{m+p+2},\; \rho^2 = \frac{m}{m-1}\|II - \frac{1}{m}tr(II)I\|^2 > 0. \tag{3.1}$$

则有如下定理:

定理 3.1 ([4]) 两个子流形 x , $\widetilde{x}$: $M^m \to S^{m+p}$ 是 Moebius 等价当且仅当存在 R_1^{m+p+2} 中的 Lorentz 变换 $T \in O(m+p+1,1)$, 使得 $\xi = \widetilde{\xi}T$.

其中 $O(m+p+1,1)$ 是 R_1^{m+p+2} 中保持内积 $\langle,\rangle$ 不变的 Lorentz 群, 那么 $O(m+p+1)$ 是一个在 Q^{m+p} 中的变换群定义为

$$T([\xi]) := [\xi T],\, X \in C_+^{m+p+1},\, \xi \in O(m+p+1,1), \tag{3.2}$$

因此

$$g = \langle d\xi, d\xi \rangle = \rho^2 dx \cdot dx, \tag{3.3}$$

是 Möbius 不变量,称为 Möbius 度量或由 x 诱导的 Möbius 第一基本形式.

设 $\triangle$ 为 (M, g) 的 Laplace 算子.

$$\langle \triangle\xi, \triangle\xi \rangle = 1 + m^2\kappa, \tag{3.4}$$

其中 κ 表示 x 的法化 Möbius 数量曲率.

设 $\{E_1, E_2, \cdots, E_m\}$ 是 (M, g) 的一个局部标准正交基, $\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m\}$ 为其对偶基.且 $E_i(\xi) = \xi_i$, 那么.

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}, 1 \le i, j \le m, \tag{3.5}$$

定义

$$N = -\frac{1}{m}\triangle\xi - \frac{1}{2m^2}\langle \triangle\xi, \triangle\xi \rangle \xi, \tag{3.6}$$

那么

$$\langle \xi, \xi \rangle = \langle N, N \rangle = 0,\ \langle \xi, N \rangle = 1,\ \langle \xi_i, \xi \rangle = \langle \xi_i, N \rangle = 0,\ (1 \le i, j \le m). \tag{3.7}$$

而且

$$\langle \xi, d\xi \rangle = 0,\ \langle \triangle\xi, \xi \rangle = -m,\ \langle \triangle\xi, \xi_k \rangle = 0,\ 1 \le k \le m. \tag{3.8}$$

因此

$$span\{N, \xi\} \perp span\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m\}, \tag{3.9}$$

定义

$$V = \{span\{N, \xi\} \oplus span\{\xi_1, \cdots, \xi_m\}\}^{\perp}, \tag{3.10}$$

设 V 是子空间 $Span\{\xi, N, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m\}$ 在 R_1^{m+p+2} 中的正交补空间,那么我们有如下的正交分解.

$$R_1^{m+p+2} = span\{\xi, N\} \oplus span\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m\} \oplus V, \tag{3.11}$$

称 V 是 $x : M^m \to S^{m+p}$ 的 Möbius 法丛. 设 $\{E_{m+1}, \cdots, E_{m+p}\}$ 是法丛 V 沿 M^m 的一个局部正交基,那么 $\{\xi, N, \xi_1, \cdots, \xi_m, E_{m+1}, \cdots, E_{m+p}\}$ 是在 R^{m+p+2} 沿 M^m 的活动标架.通过使用指标范围:

$$1 \le i, j, k, l \le m; m + 1 \le \alpha, \beta \le m + p;$$

其结构方程为:

$$d\xi = \sum_i \omega_i \xi_i, \tag{3.12}$$

$$dN = \sum_{ij} A_{ij}\omega_j\xi_i + \sum_{i,\alpha} C_i^{\alpha}\omega_i E_\alpha, \tag{3.13}$$

$$d\xi_i = -\sum_j A_{ij}\omega_j\xi - \omega_i N + \sum_j \omega_{ij}\xi_j + \sum_i B_{ij}^{\alpha}\omega_j E_{\alpha}, \tag{3.14}$$

$$dE_{\alpha} = -\sum_i C_i^{\alpha}\omega_i\xi - \sum_{i,j} B_{ij}^{\alpha}\omega_j\xi_i, \tag{3.15}$$

其中 $\{\omega_{ij}\}$ 是 Möbius 度量 g 的联络形式

$$A_{ij} = A_{ji},\ B_{ij}^{\alpha} = B_{ji}^{\alpha}. \tag{3.16}$$

而且

$$A = \sum_{i,j,} A_{ij}\omega_i \otimes \omega_j,\ B = \sum_{i,j,\alpha} B_{ij}^{\alpha}\omega_i \otimes \omega_j E_{\alpha},\ \Phi = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}E_{\alpha} = \sum_{i,\alpha} C_i^{\alpha}\omega_i E_{\alpha}. \tag{3.17}$$

都是 Möbius 不变量, 称 A 为 x 的 Blaschke 张量, B 为 x 的 Möbius 第二基本形式, Φ 为 x 的 Möbius 形式.

定义 C_i^{α}, A_{ij}, B_{ij}^{α} 的一阶协变导数如下

$$\sum_j C_{i,j}^{\alpha}\omega_j = dC_i^{\alpha} + \sum_j C_j^{\alpha}\omega_{ji} + \sum_{\beta} C_i^{\beta}\omega_{\beta\alpha}, \tag{3.18}$$

$$\sum_k A_{ij,k} = dA_{ij} + \sum A_{ik}\omega_{kj} + \sum_k A_{kj}\omega_{ki}, \tag{3.19}$$

$$\sum B_{ij,k}^{\alpha}\omega_k = dB_{ij} + \sum_k B_{ik}^{\alpha}\omega_{kj} + \sum_k B_{kj}^{\alpha}\omega_{ki} + \sum_{\beta} B_{ij}^{\beta}\omega_{\beta\alpha}, \tag{3.20}$$

而且

$$d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj} = -\frac{1}{2}\sum_{kl} R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l,\ R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \tag{3.21}$$

那么 (3.12)-(3.15) 结构方程的可积条件为

$$A_{ij,k} - A_{ik,j} = \sum_{\alpha}(B_{ik}^{\alpha}C_j^{\alpha} - B_{ij}^{\alpha}C_k^{\alpha}), \tag{3.22}$$

$$C_{i,j}^{\alpha} - C_{j,i}^{\alpha} = \sum_k (B_{ik}^{\alpha}A_{kj} - B_{kj}^{\alpha}A_{ki}), \tag{3.23}$$

$$B_{ij,k}^{\alpha} - B_{ik,j}^{\alpha} = \delta_{ij}C_k^{\alpha} - \delta_{ik}C_j^{\alpha}, \tag{3.24}$$

$$R_{ijkl} = \sum_{\alpha}(B_{ik}^{\alpha}B_{jl}^{\alpha} - B_{il}^{\alpha}B_{jk}^{\alpha}) + (\delta_{ik}A_{jl} + \delta_{jl}A_{ik} - \delta_{il}A_{jk} - \delta_{jk}A_{il}), \tag{3.25}$$

$$tr(A) = \frac{1}{2m}(1 + \frac{m}{m-1}R)\ ,\ \ \sum_i B_{ii}^{\alpha} = 0. \tag{3.26}$$

其中 $\{A_{ij,k}\}$, $\{B_{ij,k}^{\alpha}\}$ 和 $\{C_{i,j}^{\alpha}\}$ 是 A,B 和 Φ 关于 g 诱导的联络的协变导数在标准基下的分量.
(3.24) 式中令 $i = j$ 求和得

$$-\sum B_{ij,i}^{\alpha} = -(m-1)C_j^{\alpha}, \tag{3.27}$$

DOI: 10.12677/pm.2022.126106

(3.25) 式中令 $i=k$ 求和得

$$R_{jl}=-\sum_k B^{\alpha}_{jk}B^{\alpha}_{kl}+tr(A)\delta_{jl}+(m-2)A_{jl}, \tag{3.28}$$

由 (3.26) 和 (3.27) 可得

$$\sum_{ij}(B^{\alpha}_{ij})^2=\frac{m-1}{m}, \tag{3.29}$$

4. 定理的证明

证明本文的定理, 首先需要证明下面的引理.

引理4.1 设 $x: M^m \to S^{m+p}(m \geq 3)$ 是 m 维无脐浸入子流形, B 为 Möbius 第二基本形式, 则有不等式

$$\sum_{\alpha,\beta}\{2[tr(B^{\alpha}B^{\beta})]^2+\|B^{\alpha}B^{\beta}-B^{\beta}B^{\alpha}\|^2-\frac{2m}{m-2}tr[(B^{\alpha})^2(B^{\beta})^2]\}+\frac{2(m-1)}{m^2(m-2)}\geq 0,$$

成立, 其中等号成立当且仅当 M^m 是共形平坦的.

证明 由 Weyl 曲率张量的定义

$$W_{ijkl}=R_{ijkl}-\frac{1}{m-2}(S_{ik}\delta_{jl}+S_{jl}\delta_{ik}-S_{il}\delta_{jk}-S_{jk}\delta_{il}), \tag{4.1}$$

可得

$$|W_{ijkl}|^2=W_{ijkl}[R_{ijkl}-\frac{1}{m-2}(S_{ik}\delta_{jl}+S_{jl}\delta_{ik}-S_{il}\delta_{jk}-S_{jk}\delta_{il})], \tag{4.2}$$

因为 W_{ijkl} 为无迹张量, 因此

$$|W_{ijkl}|^2=W_{ijkl}R_{ijkl}, \tag{4.3}$$

其中 S_{ij} 为 Shouten 张量, 定义为

$$S_{ij}=R_{ij}-\frac{R}{2(m-1)}\delta_{ij},\ \kappa=\frac{R}{m(m-1)}, \tag{4.4}$$

由 (4.4) 式得

$$\begin{aligned} S_{ij}=&R_{ij}-\frac{m(m-1)\kappa}{2(m-1)}\delta_{ij}\\ =&R_{ij}-\frac{m\kappa}{2}\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

由 (3.26), (4.4) 式得

$$2mtrA=1+m^2\kappa, \tag{4.6}$$

所以

DOI: 10.12677/pm.2022.126106

$$m\kappa = 2trA - \frac{1}{m}, \tag{4.7}$$

于是

$$S_{ij} = -B_{ik}^{\alpha}B_{kj}^{\alpha} + \frac{1}{2m}\delta_{ij} + (m-2)A_{ij}, \tag{4.8}$$

由 (3.26), (4.1) 和 (4.8) 可得

$$\begin{aligned} W_{ijkl} =& B_{ik}^{\alpha}B_{jl}^{\alpha} - B_{il}^{\alpha}B_{jk}^{\alpha} + \frac{1}{m-2}[B_{im}^{\alpha}B_{mk}^{\alpha}\delta_{jl} + B_{jm}^{\alpha}B_{ml}^{\alpha}\delta_{ik}] \\ & - B_{im}^{\alpha}B_{ml}^{\alpha}\delta_{jk} - B_{jm}^{\alpha}B_{mk}^{\alpha}\delta_{il}] - \frac{1}{m(m-2)}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \end{aligned} \tag{4.9}$$

由 (4.3) 和 (4.9) 式可得

$$|W|^2 = W_{ijkl}(B_{ik}^{\beta}B_{jl}^{\beta} - B_{il}^{\beta}B_{jk}^{\beta}), \tag{4.10}$$

因此

$$\begin{aligned} |W|^2 =& [(B_{ik}^{\alpha}B_{jl}^{\alpha} - B_{il}^{\alpha}B_{jk}^{\alpha} + \frac{1}{m-2}(B_{im}^{\alpha}B_{mk}^{\alpha}\delta_{jl} + B_{jm}^{\alpha}B_{ml}^{\alpha}\delta_{ik} - B_{im}^{\alpha}B_{ml}^{\alpha}\delta_{jk} \\ & - B_{jm}^{\alpha}B_{mk}^{\alpha}\delta_{il}) - \frac{1}{m(m-2)}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})](B_{ik}^{\beta}B_{jl}^{\beta} - B_{il}^{\beta}B_{jk}^{\beta}) \\ =& 2(B_{ik}^{\alpha}B_{ki}^{\beta}B_{jl}^{\alpha}B_{lj}^{\beta} - B_{ik}^{\alpha}B_{kj}^{\beta}B_{jl}^{\alpha}B_{li}^{\beta}) - \frac{4}{m-2}B_{im}^{\alpha}B_{ml}^{\alpha}B_{lk}^{\beta}B_{ki}^{\beta} + \frac{2(m-1)}{m^2(m-2)}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

其中

$$B_{ik}^{\alpha}B_{jl}^{\alpha}B_{ik}^{\beta}B_{jl}^{\beta} = B_{il}^{\alpha}B_{jk}^{\alpha}B_{il}^{\beta}B_{jk}^{\beta},\ B_{ik}^{\alpha}B_{jl}^{\alpha}B_{il}^{\beta}B_{lk}^{\beta} = B_{il}^{\alpha}B_{jk}^{\alpha}B_{ik}^{\beta}B_{jl}^{\beta}, \tag{4.12}$$

$$\sum_{k,l,\beta}(B_{kl}^{\beta})^2 = \frac{m-1}{m}, \tag{4.13}$$

所以有

$$|W|^2 = 2(B_{ik}^{\alpha}B_{ki}^{\beta}B_{jl}^{\alpha}B_{lj}^{\beta} - B_{ik}^{\alpha}B_{kj}^{\beta}B_{jl}^{\alpha}B_{li}^{\beta}) - \frac{4}{m-2}B_{im}^{\alpha}B_{ml}^{\alpha}B_{lk}^{\beta}B_{ki}^{\beta} + \frac{2(m-1)}{m^2(m-2)}, \tag{4.14}$$

由

$$2\sum_{i,k,j,l,\alpha,\beta}(B_{ik}^{\alpha}B_{ki}^{\beta}B_{jl}^{\alpha}B_{lj}^{\beta} - B_{ik}^{\alpha}B_{kj}^{\beta}B_{jl}^{\alpha}B_{li}^{\beta}) = 2tr(B^{\alpha}B^{\beta}) \cdot tr(B^{\alpha}B^{\beta}) - 2tr(B^{\alpha}B^{\beta}B^{\alpha}B^{\beta}), \tag{4.15}$$

$$\sum_{i,k,l,m,\alpha,\beta}B_{im}^{\alpha}B_{ml}^{\alpha}B_{lk}^{\beta}B_{ki}^{\beta} = tr(B^{\alpha}B^{\alpha}B^{\beta}B^{\beta}), \tag{4.16}$$

结合 (4.14) 式可得

$$|W|^2 = 2[tr(B^{\alpha}B^{\beta})]^2 - 2tr(B^{\alpha}B^{\beta}B^{\alpha}B^{\beta}) - \frac{4}{m-2}tr(B^{\alpha}B^{\alpha}B^{\beta}B^{\beta}) + \frac{2(m-1)}{m^2(m-2)} \tag{4.17}$$

再由

$$\begin{aligned}\|B^\alpha B^\beta - B^\beta B^\alpha\|^2 =& tr[(B^\alpha B^\beta - B^\beta B^\alpha)(B^\alpha B^\beta - B^\beta B^\alpha)^\top] \\ =& tr[(B^\alpha B^\beta - B^\beta B^\alpha)(B^\beta B^\alpha - B^\alpha B^\beta)] \\ =& tr(B^\alpha B^\beta B^\beta B^\alpha - B^\alpha B^\beta B^\alpha B^\beta - B^\beta B^\alpha B^\beta B^\alpha + B^\beta B^\alpha B^\alpha B^\beta) \\ =& tr(B^\alpha B^\beta B^\beta B^\alpha) - tr(B^\alpha B^\beta B^\alpha B^\beta) - tr(B^\beta B^\alpha B^\beta B^\alpha) + tr(B^\beta B^\alpha B^\alpha B^\beta) \\ =& tr(B^\alpha B^\alpha B^\beta B^\beta) - tr(B^\alpha B^\beta B^\alpha B^\beta) - tr(B^\alpha B^\beta B^\alpha B^\beta) + tr(B^\alpha B^\alpha B^\beta B^\beta) \\ =& 2tr(B^\alpha B^\alpha B^\beta B^\beta) - 2tr(B^\alpha B^\beta B^\alpha B^\beta),\end{aligned} \tag{4.18}$$

可得

$$-2tr(B^\alpha B^\beta B^\alpha B^\beta) = \|B^\alpha B^\beta - B^\beta B^\alpha\| - 2tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2], \tag{4.19}$$

于是

$$\begin{aligned}\|W|^2 =& \sum_{\alpha,\beta}\{2[tr(B^\alpha B^\beta)]^2 + \|B^\alpha B^\beta - B^\beta B^\alpha\|^2 - \frac{2m}{m-2}tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2]\} \\ &+ \frac{2(m-1)}{m^2(m-2)} \geq 0,\end{aligned} \tag{4.20}$$

引理 4.1 得证.

接下来证明定理 A . 由引理 4.1 有

$$\begin{aligned}\|W|^2 =& \sum_{\alpha,\beta}\{2[tr(B^\alpha B^\beta)]^2 + \|B^\alpha B^\beta - B^\beta B^\alpha\|^2 - \frac{2m}{m-2}tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2]\} \\ &+ \frac{2(m-1)}{m^2(m-2)},\end{aligned} \tag{4.21}$$

所以

$$\sum_{\alpha,\beta}\{2[tr(B^\alpha B^\beta)]^2 + \|B^\alpha B^\beta - B^\beta B^\alpha\|^2 - \frac{2m}{m-2}tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2]\} + \frac{2(m-1)}{m^2(m-2)} \geq 0, \tag{4.22}$$

由 $DDVV$ 不等式(文献[5])有

$$\sum_{\alpha,\,\beta}\|B^\alpha B^\beta - B^\beta B^\alpha\|^2 \leq (\sum_\alpha \|B^\alpha\|^2)^2, \tag{4.23}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\sum_{\alpha,\,\beta}[tr(B^\alpha B^\beta)]^2 \leq \sum_\alpha \|B^\alpha\|^2 \cdot \sum_\beta \|B^\beta\|^2, \tag{4.24}$$

于是有

$$\sum_{\alpha,\beta}\{2[tr(B^\alpha B^\beta)]^2+\|B^\alpha B^\beta-B^\beta B^\alpha\|^2-\frac{2m}{m-2}tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2]\}+\frac{2(m-1)}{m^2(m-2)}$$
$$\leq(\sum_\alpha\|B^\alpha\|^2)^2+2\sum_\alpha\|B^\alpha\|^2\cdot\sum_\beta\|B^\beta\|^2-\frac{2m}{m-2}\sum_{\alpha,\beta}tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2]+\frac{2(m-1)}{m^2(m-2)},\tag{4.25}$$

结合 (4.22) 和 (4.25) 式得

$$(\sum_\alpha\|B^\alpha\|^2)^2+2\sum_\alpha\|B^\alpha\|^2\cdot\sum_\beta\|B^\beta\|^2-\frac{2m}{m-2}\sum_{\alpha,\beta}tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2]+\frac{2(m-1)}{m^2(m-2)}\geq 0,\tag{4.26}$$

因此

$$\frac{2m}{m-2}\sum_{\alpha,\beta}tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2]\leq(\sum_\alpha\|B^\alpha\|^2)^2+2\sum_\alpha\|B^\alpha\|^2\cdot\sum_\beta\|B^\beta\|^2+\frac{2(m-1)}{m^2(m-2)},\tag{4.27}$$

而且

$$\sum_\alpha\|B^\alpha\|^2=\sum_\beta\|B^\beta\|^2=\frac{m-1}{m},\tag{4.28}$$

于是有

$$\sum_{\alpha,\beta}tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2]\leq\frac{(m-1)(3m^2-9m+8)}{2m^3},\tag{4.29}$$

其中等号成立当且仅当 M^m 是共形平坦且 B^α 相似于下列矩阵之一

$$\begin{bmatrix}0&u&0\cdots&0\\u&0&0\cdots&0\\0&0&0\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0\cdots&0\end{bmatrix}_{n\times n},\quad\begin{bmatrix}u&0&0\cdots&0\\0&-u&0\cdots&0\\0&0&0\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0\cdots&0\end{bmatrix}_{n\times n}$$

这就完成了定理 A 的证明.

注记 上述当 $x(M^m)$ Möbius 等价于 Veroness 曲面时, 则等号成立.

例 1 设 $S^2(\sqrt{3})=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3|x_1^2+x_2^2+x_3^2=3\}$, 定义映射 $x:S^2(\sqrt{3})\to S^4(1)$ 如下

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{3}}x_2x_3,\ y_2=\frac{1}{\sqrt{3}}x_3x_1,\ y_3=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1x_2$$

$$y_4=\frac{1}{2\sqrt{3}}(x_1^2-x_2^2),\ y_5=\frac{1}{6}(x_1^2+x_2^2-2x_3^2),$$

则 $S^2(\sqrt{3})$ 是 $S^4(1)$ 的极小子流形, 称为 Veroness 曲面.

选取恰当的标架,则第二基本形式分别为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

由 $\rho^2 = \frac{8}{3}$ 因此

$$B^3 = \rho^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}, B^4 = \rho^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

此时 $M^m = S^2(\sqrt{3})$ 是 $S^4(1)$ 中的 Veroness 曲面.
而且

$$(B^3)^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix},$$

$$(B^4)^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix},$$

上述不等式左边 $\sum_{\alpha,\beta} tr[(B^\alpha)^2(B^\beta)^2] = \frac{1}{8}$, $m = 2$ 代入右边 $\frac{(m-1)(3m^2-9m+8)}{2m^3} = \frac{1}{8}$.
此时上述不等式等号成立.

参考文献

[1] Li, H.Z., Liu, H.L., Wang, C.P. and Zhao, G.S. (2002) Moebius Isoparametric Hypersurfaces in S^{n+1} with Two Distinct Princinal Curvatures. *Acta Mathematica Sinica*, **18**, 437-446. https://doi.org/10.1007/s10114-002-0173-y

[2] Hu, Z.J. and Li, H.Z. (2004) The Classification of Hyperfurfaces in S^{n+1} with Parallel Moebius Second Fundamental Form. *Science in China, Series A*, **34**, 28-39. (In Chinese)

[3] Hu, Z.J. and Li, H.Z. (2003) Submanifolds with Constant Moebius Scalar Curvature in S^n. *Manuscripta Mathematica*, **111**, 287-302. https://doi.org/10.1007/s00229-003-0368-2

[4] Wang, C.P. (1998) Moebius Geometry of Submanifolds in S^n. *Manuscripta Mathematica*, **96**, 517-534. https://doi.org/10.1007/s002290050080

[5] Ge, J.G. and Tang, Z.Z. (2008) A Proof of the DDVV Conjecture and Its Equality Case. *Pacific Journal of Mathematics*, **237**, 87-95. https://doi.org/10.2140/pjm.2008.237.87