

# 非正则覆盖图的加权Zeta函数

梁晋宁

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2022年1月10日; 录用日期: 2022年2月14日; 发布日期: 2022年2月21日

## 摘要

本文主要研究非正则覆盖图的加权zeta函数的基本性质。Ihara和Sato研究了正则覆盖图的加权zeta函数的行列式表示和极点分布, 本文的主要目的就是将正则覆盖图推广到非正则覆盖图的形式, 讨论非正则覆盖图的加权zeta函数的分解为zeta函数的乘积的形式以及不同的非正则覆盖图的加权zeta函数之间的联系。

## 关键词

非正则覆盖, 加权Zeta函数, 行列式表示, 极点

# Weighted Zeta Functions of Irregular Graphs

Jinning Liang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jan. 10<sup>th</sup>, 2022; accepted: Feb. 14<sup>th</sup>, 2022; published: Feb. 21<sup>st</sup>, 2022

## Abstract

In this paper, we will mainly research on the basic properties of weighted zeta functions of irregular covering of graphs. Ihara and Sato had major researched on the determinant expressions and boundary of the poles of the weighted zeta functions of regular covering of graphs. The major point of this paper is extending to the irregular of graphs. We will present a factorization of the weighted zeta function of an irregular covering of graph by a series of zeta functions and the relationship between different weighted zeta functions of irregular covering of graphs.

## Keywords

Irregular Covering, Weighted Zeta Function, Determinant Expression, Pole

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

图的 zeta 函数的主要是研究图的正则覆盖或者非正则覆盖的加权 zeta 函数的基本性质, 包括研究图的 zeta 函数的行列式表示, 函数的零点和极点的分布范围等。文献[1] [2] Ihara 通过引入 Ihara zeta 函数来研究正则覆盖图的 zeta 函数的表达式, Ihara 主要研究图的正则覆盖, 通过电压分配来研究正则覆盖图的加权函数的行列式表示, 并且通过行列式表示来研究 Ihara zeta 函数的零点和极点的范围。之后, 文献[3] Sato 等数学家将无向图的正则覆盖推广至有向图的正则覆盖, 并且得到了有向图的 Ihara zeta 函数的表达式。在此之后, 文献[4]冯荣权, 金珠英等数学家推广了电压分配的概念, 引入图束的概念来研究图的覆盖的基本结构。文献[5] Morita 引入了 Ruelle zeta 函数来研究有向图的加权 zeta 函数的零点和极点的分布。

目前关于图的加权 zeta 函数的研究都是在正则覆盖图上, 因为正则覆盖图有比较简单的代数结构。所以本文主要讨论将正则覆盖图推广至非正则覆盖图, 主要是在正则覆盖的基础上, 通过引入商图的概念来构造非正则覆盖图, 因此非正则覆盖图的结构比正则覆盖图更加复杂, 通过计算非正则覆盖图的加权 zeta 函数, 就能得到更精确的加权 zeta 函数的分解形式和极点的分布范围。

本文考虑的图均为简单图, 主要是通过引入正则覆盖图的商图来构造非正则覆盖图, 并且通过计算来给出非正则覆盖图的加权 zeta 函数分解为 zeta 函数的具体形式, 再通过具体的例子来验证计算结果的准确性。

## 2. 预备知识

本节给出一些本文中所需的基本概念。

**定义 2.1** (文献[1]) 设  $G$  是一个简单的连通图,  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  是  $G$  的顶点集,  $E(G)$  是  $G$  的无向边的集合,  $D(G) = \{(u, v) | (u, v) \in E(G)\}$  是  $G$  的有向边的集合。

**定义 2.2** (文献[1]) 设  $G$  是一个简单连通图, 设  $\Gamma$  是一个有限群。映射  $\alpha: D(G) \rightarrow \Gamma$  是一个电压分配, 若  $\alpha(u, v) = \alpha(v, u)^{-1}$  对任意  $(u, v) \in D(G)$  均成立。通过电压分配, 可以构造图  $G$  的正则覆盖图  $G^\alpha$  :

$$V(G^\alpha) = V(G) \times \Gamma,$$

其顶点为  $(u, h)$ , 其中  $u \in V(G), h \in \Gamma$ 。在图  $G^\alpha$  中, 边  $((u, h), (v, k))$  在图  $G^\alpha$  中, 当且仅当对于  $G^\alpha$  中的任意的边  $(u, v)$ , 均有  $(u, v) \in D(G)$ , 并且  $k = h\alpha(u, v)$ 。

**定义 2.3** (文献[1] [2]) 令  $G^\alpha$  是  $G$  的正则覆盖图,  $B$  是  $\Gamma$  的子群, 设  $|\Gamma| = n$ ,  $|B| = m$ ,  $|\Gamma/B| = t$ , 可以得到群  $\Gamma/B = \{Bg_1, Bg_2, \dots, Bg_t\}$ , 则存在置换电压分配  $\phi: D(G) \rightarrow S_t$  使得  $H = G^\phi$ , 图  $H$  定义为正则覆盖图  $G^\alpha$  的商图。

**定义 2.4** (文献[5]) 设图  $G$  是一个连通图,  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 则图  $G$  的权重矩阵  $(W_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  是一个  $n \times n$  维矩阵, 其定义如下:

$$(w_{ij}) = \begin{cases} w_{ij} & (v_i, v_j) \in D(G), \\ 0 & \end{cases}$$

**定义 2.5** (文献[5]) 图  $G$  的加权 zeta 函数的定义如下:

$$Z_G(u, w) = \prod_{(C)} (1 - w(C)u^{|C|})^{-1},$$

这里的  $[C]$  是图  $G$  上所有的素圈的等价类的集合。

### 3. 基本结果

**引理 3.1** (文献[3]) 循环群  $S_n$  中的任意一个元素均可唯一分解为不相交的轮换的乘积。

例如对于  $S_5$  中的元素  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (123)(45)$ , 就是一个分解形式, 并且分解是唯一的。设  $\rho$  是  $S_n$  中的一个元素, 则其可以分解为不相交的轮换的乘积。令  $p_i$  为长度为  $i$  的轮换的个数, 则  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  为  $S_n$  的圈结构(文献[3] [4])。

**定义 3.2** 对于循环群  $S_n$  中的任意一个元素  $\gamma \in S_n$ ,  $\gamma$  的置换矩阵  $P_\gamma = (p_{ij}^{(\gamma)})_{1 \leq i, j \leq n}$  的定义如下:

$$p_{ij}^{(\gamma)} = \begin{cases} 1 & \gamma(i) = j, \\ 0 & \end{cases}$$

**引理 3.3 (Sato)** (文献[6]) 设  $G$  是一个顶点数为  $n$ , 边数为  $m$  的简单无向连通图,  $\Gamma$  是一个有限群, 再通过电压分配  $\alpha: D(G) \rightarrow \Gamma$  构造图  $G^\alpha$ , 假设  $G^\alpha$  是连通的。令  $\rho$  是群  $\Gamma$  的不可约表示,  $d$  是  $\rho$  的度, 则正则覆盖图  $G^\alpha$  的加权 zeta 函数的行列式表示为:

$$Z_G(u, \rho, \alpha, w)^{-1} = (1-u^2)^{(m-n)d} \det \left( I_{dn} - u \left( \sum_{g \in \Gamma} \rho(g) \otimes W_g \right) + u^2 (d \circ Q) \right).$$

这里的权重矩阵  $W_g = (w_{uv}^{(g)})_{u, v \in V(G)}$  的定义如下:

$$w_{uv}^{(g)} = \begin{cases} w(u, v) & (u, v) \in D(G) \text{ 以及 } g = \alpha(u, v) \text{ 成立,} \\ 0 & \end{cases}$$

并且有  $Q = D - I$ ,  $d \circ Q = I_d \otimes Q$ 。

引理 3.3 是 Sato 和 Mizuno 证明的关于正则覆盖图的加权 zeta 函数的行列式表示, 在此基础上, 我们将给出一个非正则覆盖图的加权 zeta 函数分解为 zeta 函数的具体表达式。

**定理 3.4** 设  $G$  是一个顶点数为  $p$ , 边数为  $q$  的简单连通图, 设图  $G$  是无向的,  $\Gamma$  是一个有限群, 再通过电压分配  $\alpha: D(G) \rightarrow \Gamma$  构造图  $G^\alpha$ ,  $W(G)$  为图  $G$  的权重矩阵, 令  $B$  为  $\Gamma$  的子群, 则可以通过置换电压分配  $\phi: D(G) \rightarrow S_t$  来构造  $G^\alpha$  的商图  $H = G^\phi$ 。令  $k = \langle \{ \phi(u, v) \mid (u, v) \in D(G) \} \rangle$  是  $S_t$  的子群, 通过置换矩阵来构造  $k$  的置换表示:  $P: k \rightarrow GL(t, C)$ , 因此对于任意  $\gamma \in k$ , 均有  $P(\gamma) = P_\gamma$ , 其中  $P_\gamma$  是  $\gamma$  的置换矩阵。令表示  $\rho_1 = 1, \rho_2, \dots, \rho_l$  是  $k$  的所有不可约不等价的表示,  $f_1 = 1, f_2, \dots, f_l$  分别是  $\rho_i$  的度,  $m_1 = 1, m_2, \dots, m_l$  分别是  $\rho_i$  的重数, 则置换表示  $P$  等价于矩阵  $m_1 \circ \rho_1 \oplus m_2 \circ \rho_2 \oplus \dots \oplus m_l \circ \rho_l$ , 则非正则覆盖图  $H$  的加权 zeta 函数为:

$$Z_H(\tilde{w}, u) = \prod_{i=1}^l Z_G(u, \rho_i, \phi, w)^{m_i} \tag{1}$$

**证明:** 令  $V(G) = \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ , 将图  $H = G^\phi$  中的路分为  $t$  个矩阵块, 在这个路的矩阵块下, 我们考虑图  $H$  的加权矩阵  $W(H)$ 。这  $t$  个矩阵块分别为:  $(V_1, 1), (V_2, 1), \dots, (V_p, 1); \dots; (V_1, t), (V_2, t), \dots, (V_p, t)$ 。

对任意  $\gamma \in k$ , 根据置换矩阵的定义有: 若  $j = \gamma(i)$ , 则有  $p_{ij}^\gamma = 1$ 。在非正则覆盖图  $H$  中, 等式  $j = \phi(u, v)i$  成立, 当且仅当  $Bg_j = \alpha(u, v)Bg_i$  成立。则可知图  $H$  的置换矩阵也是  $P_\gamma$ 。因此若  $(u, v) \in D(G)$ ,  $\phi(u, v) = \gamma$ , 则有  $j = \gamma(i)$ , 并且有  $((u, Bg_i), (v, Bg_j)) \in D(H)$ 。因此通过分析可知  $W(H)$  可以表示为:

$$W(H) = \sum_{\gamma \in \Gamma} P_\gamma \otimes W_\gamma,$$

这里的  $W_\gamma = \left( w_{uv}^{(\gamma)} \right)_{u,v \in V(G)}$ , 若  $(u,v) \in D(G)$ ,  $\phi(u,v) = \gamma$ , 则有  $w_{uv}^{(\gamma)} = w(u,v)$ 。反之则为 0。因为  $P: k \rightarrow GL(t, C)$  是  $k$  的置换表示, 所以存在非奇异矩阵  $T$  使得  $T^{-1}P_\gamma T = m_1 \circ \rho_1 \oplus m_2 \circ \rho_2 \oplus \dots \oplus m_l \circ \rho_l$  成立。令矩阵  $A = (T^{-1} \otimes I_p)W(H)(T \otimes I_p)$ , 将  $T^{-1}P_\gamma T$  代入到矩阵  $A$  中可以得到:

$$A = \sum_{\gamma \in \Gamma} \{m_1 \circ \rho_1 \oplus m_2 \circ \rho_2 \oplus \dots \oplus m_l \circ \rho_l\} \otimes W_\gamma.$$

又因为  $m_1 f_1 + m_2 f_2 + \dots + m_l f_l = t$ , 并且图  $G$  的权重矩阵  $W(G) = \sum_{\gamma \in \Gamma} W_\gamma$ , 因此根据引理 3.3 并将矩阵  $A$  和  $W(H)$  的表达式代入可以得到:

$$\begin{aligned} Z_H(\tilde{w}, u)^{-1} &= (1-u^2)^{(q-p)t} \det(I_{pt} - uW(H) + I_t \otimes (D - I_p)u^2) \\ &= (1-u^2)^{q-p} \det(I_p - W(G) + (D - I_p)u^2) \\ &\quad \times \prod_{i=2}^l \left\{ (1-u^2)^{(q-p)f_i} \det(I_{pf_i} - u \sum_{\gamma \in \Gamma} \rho_i(\gamma) \otimes W_\gamma + (I_{f_i} \otimes (D - I_p)u^2)) \right\}^{m_i}. \end{aligned}$$

根据引理 3.3, 通过比较加权 zeta 函数的形式可以得到等式(1)成立, 因此定理 3.4 成立。

定理 3.4 将正则覆盖图推广至非正则覆盖图的加权 zeta 函数, 从定理 3.4 我们还能推导出正则覆盖图的 zeta 函数的两个定理。

**推论 3.5** 设图  $G$  是一个连通图,  $\Gamma$  是一个有限群,  $\alpha: D(G) \rightarrow \Gamma$  是一个电压分配, 则  $G^\alpha$  是  $G$  的正则覆盖图, 假设  $G^\alpha$  是连通的,  $W(G)$  是图  $G$  的权重矩阵, 则有:

$$Z_{G^\alpha}(\tilde{w}, u) = \prod_{\rho} Z_G(u, \rho, \alpha, w)^{\deg \rho}. \tag{2}$$

这里的  $\rho$  是  $\Gamma$  的所有不等价不可约表示。

**推论 3.6 (Sato)** 设图  $G$  是一个连通图, 令  $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , 通过置换电压分配  $\phi: D(G) \rightarrow S_n$  构造覆盖图  $G^\phi$ , 设  $W = W(G)$  为图  $G$  的权重矩阵, 则  $G^\phi$  的 zeta 函数为:

$$Z(G^\phi, u)^{-1} = \prod_{[C]} \prod_{j=1}^n (1 - u^{|C|^j})^{c_j}. \tag{3}$$

这里的  $[C]$  是  $G$  中的素圈的等价类的集合,  $c_j$  是  $S_n$  的圈结构。

通过定理 3.4, 推论 3.5 和推论 3.6, 可以算出不同覆盖图的 Ihara zeta 函数的表达式, 下表 1 列出了图  $G$  的正则覆盖和非正则覆盖的 Ihara zeta 函数的联系和区别。

**Table 1.** Ihara zeta functions of different coverings of graph

**表 1.** 图  $G$  的不同覆盖的 Ihara zeta 函数

	Ihara zeta 函数	加权 Ihara zeta 函数
图 $G$	$Z_G(u) = \prod_{[C]} (1 - u^{ C })^{-1}$	$Z_G(w, u) = \prod_{[C]} (1 - w(C)u^{ C })^{-1}$
图 $G$ 的正则覆盖	$Z(G^\alpha, u)^{-1} = \prod_{[C]} (1 - u^{ C ^k})^{n/k}$	$Z_{G^\alpha}(\tilde{w}, u)^{-1} = \prod_{[C]} (1 - w(C)^k u^{ C ^k})^{n/k}$
图 $G$ 的非正则覆盖	$Z(G^\phi, u)^{-1} = \prod_{[C]} \prod_{j=1}^n (1 - u^{ C ^j})^{c_j}$	$Z_{G^\phi}(\tilde{w}, u)^{-1} = \prod_{[C]} \prod_{j=1}^n (1 - w(C)^j u^{ C ^j})^{c_j}$

注释: 其中  $k = ord(\alpha(C))$ 。

根据定理 3.4, 要计算图  $G$  的非正则覆盖图的加权 zeta 函数, 必须要先算出置换表示  $P$  的度  $f_i$  和重数  $m_i$  的值, 下面给出计算重数  $m_i$  的方法。

**定理 3.7** 设图  $G$  是一个连通图,  $W(G)$  是图  $G$  的权重矩阵,  $\Gamma$  是一个有限群,  $B$  为  $\Gamma$  的子群, 通过电压分配  $\alpha: D(G) \rightarrow \Gamma$  可以构造图  $G$  的正则覆盖图  $G^\alpha$ , 假设  $G^\alpha$  是连通的。通过构造置换电压分配  $\phi: D(G) \rightarrow S_t$  可以构造  $G^\alpha$  的商图  $H$ , 假设  $H$  也是连通的。令  $k = \{ \{ \phi(u, v) \mid (u, v) \in D(G) \} \}$  是  $S_t$  的子群, 通过置换矩阵来构造  $k$  的置换表示:  $P: k \rightarrow GL(t, C)$ 。令  $\sigma_1 = 1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  是群  $B$  的所有不可约表示,  $p_i$  是表示  $\sigma_i$  的度, 其中  $p_1 = 1$ 。令  $\rho_1 = 1, \rho_2, \dots, \rho_m$  是  $\Gamma$  的所有不可约表示,  $f_i$  是表示  $\rho_i$  的度,  $m_i$  是  $\rho_i$  在置换表示  $P$  中的重数。因为  $B$  是  $\Gamma$  的子群, 所以存在从  $B$  的表示  $\sigma$  到  $\Gamma$  的诱导表示(见文献[7]), 记为  $\sigma_i^* = \text{Ind}_B^\Gamma \sigma_i$ , 由诱导表示可知:

$$\sigma_i^* = e_{i1} \circ \rho_1 \oplus e_{i2} \circ \rho_2 \oplus \dots \oplus e_{im} \rho_m \quad (1 \leq i \leq n). \tag{4}$$

则可以得到:

$$f_j = m_j + e_{2j} p_2 + e_{3j} p_3 + \dots + e_{nj} p_n \quad (1 \leq j \leq m). \tag{5}$$

其中  $m_1 = 1$ 。

**证明:** 通过置换电压分配  $\phi: D(G) \rightarrow S_t$ , 可以构造图  $H = G^\phi$ 。根据文献[3]中的图覆盖的基本性质可知, 存在电压分配  $\tau: D(H) \rightarrow B$  使得  $H^\tau = G^\alpha$ , 又根据文献[6] [8]中的 Bartholdi zeta 函数的分解形式可知:

$$\zeta(G^\alpha, \tilde{w}_{G^\alpha}, u, t) = \zeta(G, w, u, t) \prod_{j=2}^m \zeta(w, u, t, \rho_j, \alpha)^{f_j}. \tag{6}$$

又因为  $H^\tau = G^\alpha$ , 所以将  $H^\tau$  代入到式子(6)可得:

$$\zeta(G^\alpha, \tilde{w}_{G^\alpha}, u, t) = \zeta(H^\tau, \tilde{w}_{G^\alpha}, u, t) = \zeta(H, \tilde{w}_H, u, t) \prod_{i=2}^n \zeta_H(\tilde{w}_H, u, t, \sigma_i, \tau)^{p_i}. \tag{7}$$

再根据文献[3]中的 Bartholdi zeta 函数的恒等式可得:

$$\zeta_H(\tilde{w}_H, u, t, \sigma_i, \tau) = \zeta_G(w, u, t, \sigma_i^*, \alpha). \tag{8}$$

将等式(8)代入式子(7)可得:

$$\zeta(G^\alpha, \tilde{w}_{G^\alpha}, u, t) = \zeta(H, \tilde{w}_H, u, t) \prod_{j=1}^m \prod_{i=2}^n \zeta_G(w, u, t, \rho_j, \alpha)^{e_{ij} p_i}. \tag{9}$$

将等式(6), (7)代入到等式(9)可得:

$$\zeta(H, \tilde{w}_H, u, t) \prod_{j=1}^m \prod_{i=2}^n \zeta_G(w, u, t, \rho_j, \alpha)^{e_{ij} p_i} = \zeta(G, w, u, t) \prod_{j=2}^m \zeta_G(w, u, t, \rho_j, \alpha)^{f_j}.$$

等式移项可得:

$$\zeta(H, \tilde{w}_H, u, t) = \zeta(G, w, u, t)^{1 - e_{21} p_2 - e_{31} p_3 - \dots - e_{n1} p_n} \prod_{j=2}^m \zeta(w, u, t, \rho_j, \alpha)^q.$$

其中  $q = f_j - e_{2j} p_2 - e_{3j} p_3 - \dots - e_{nj} p_n$ 。

又因为  $m_j$  是  $\rho_j$  在置换表示  $P$  中的表示重数, 则有  $m_j = q$ , 所以等式:

$$m_j = f_j - e_{2j} p_2 - e_{3j} p_3 - \dots - e_{nj} p_n \quad (1 \leq j \leq m).$$

成立, 所以定理 3.7 成立。

**推论 3.8** 在定理 3.7 中, 因为  $m_1 = 1$ , 则有:

$$e_{i1} = 0 \quad (2 \leq i \leq n).$$

并且因为  $m_j \geq 0$ , 则不等式:

$$f_j \geq e_{2j}p_2 + e_{3j}p_3 + e_{4j}p_4 + \cdots + e_{nj}p_n \quad (2 \leq j \leq m).$$

成立, 这个不等式是代数表示论文献[7]中关于表示的重数和度的重要不等式。所以可以看出, 通过研究非正则覆盖图的加权 zeta 函数, 可以从不同的角度来研究群的结构。

#### 4. 例子

设  $G$  是一个连通图, 顶点数为  $m$ , 边数为  $s$ , 设  $\Gamma$  是  $S_3$ , 则可以通过置换电压分配  $\phi: D(G) \rightarrow S_3$ , 可以构造图  $G^\phi$ , 并且  $G^\phi$  是图  $G$  的 3-fold 覆盖图[9]。先求  $S_3$  的所有不可约表示: 对称群  $S_3$  一共有 3 个不可约表示, 第一个是平凡表示  $\rho_1 = 1$ , 第二个表示  $\rho_2$  是符号表示, 这两种表示的次数是 1, 第三个表示是矩阵表示, 次数是 2, 具体的形式如下:

$$\begin{aligned} \rho_3(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_3((132)) = \begin{pmatrix} u^2 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \quad \rho_3((23)) = \begin{pmatrix} 0 & u^2 \\ u & 0 \end{pmatrix} \\ \rho_3((123)) &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}, \quad \rho_3((12)) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ u^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3((13)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中  $u = \exp \frac{2\pi i}{3}$ 。

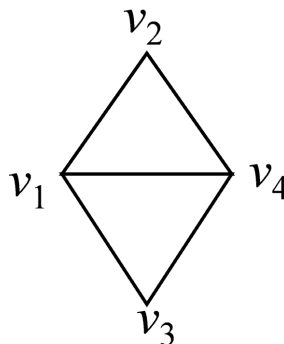
因此,  $S_3$  的置换表示为:  $P = \rho_1 \oplus \rho_3$ , 表示  $\rho_1$  和  $\rho_3$  在  $P$  中的重数为 1 [10]。根据文献[4]中的图覆盖定理可得,  $G^\phi$  的 Ihara zeta 函数的行列式表示为:

$$\zeta_{G^\phi}(u)^{-1} = \zeta_G(u)^{-1} (1-u^2)^{2(s-m)} \det \left( I_{2m} - \left( \sum_{\gamma \in S_3} A(G_{(\phi, \gamma)}) \otimes \rho_3(\gamma) \right) u + (Q_G \otimes I_2) u^2 \right).$$

其中  $Q_G = D_G - I_m$ ,  $A(G_{(\phi, \gamma)})$  是图  $G_{(\phi, \gamma)}$  的邻接矩阵。

为了求出  $G^\phi$  的 Ihara zeta 函数的具体形式, 可以假设图  $G$  为完全图  $K_4$  去掉一条边, 如图 1 所示, 其顶点集为  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , 边  $(v_2, v_4)$  的权为(23), 边  $(v_3, v_4)$  的权为(12), 其余的边的权为 1, 其中(23), (12) 是  $S_3$  中的元素, 则图  $G$  的 Ihara zeta 函数为:

$$\zeta_G(u)^{-1} = (1-u^2)(1-u)(1+u^2)(1-u^2-2u^3)(1+u+2u^2).$$



**Figure 1.** An  $S_3$ -voltage assignment on the diamond graph

**图 1.** 菱形图上的  $S_3$ -电压分配

接下来计算  $G^\phi$  的 Ihara zeta 函数。首先,  $G^\phi$  的邻接矩阵[4] [11]如下:

$$A(G_{(\phi,(23))}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(G_{(\phi,(12))}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(G_{(\phi,(1))}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然, 其余的邻接矩阵均为 0 矩阵。

因此, 将邻接矩阵  $A$  代入到  $G^\phi$  的 Ihara zeta 函数的行列式表示中可得:

$$\zeta_{G^\phi}(u)^{-1} = \zeta_G(u)^{-1} (1 + u + 2u^2 + u^3 + 2u^4) p. \quad (10)$$

其中  $p$  的值为:  $p = (1 - u^2)^2 (1 - u - u^3 + 2u^4) (1 - u + 2u^2 - u^3 + 2u^4) (1 + u + u^3 + 2u^4)$ 。

从等式(10)可以得出结论: 若  $G^\phi$  为  $G$  的  $n$ -fold 图覆盖, 则  $\zeta_G(u)^{-1}$  整除  $\zeta_{G^\phi}(u)^{-1}$ 。

## 5. 结论

本文主要讨论了图的非正则覆盖的加权 zeta 函数的基本性质, 给出了非正则覆盖图的加权 zeta 函数的分解形式以及图的非正则覆盖的群表示系数的求解公式。从本文的定理和推论可以看出, 相较于正则覆盖图, 非正则覆盖图的结构更加复杂, 所得出的结论也更具有普遍性。同时可以通过非正则覆盖图的加权 zeta 函数来研究群表示的性质, 从而进一步研究群的结构。关于非正则覆盖图的加权 zeta 函数的零点和极点的分布, 需要更进一步的计算和研究。

## 致 谢

非常感谢审稿人对论文提出的宝贵意见, 同时也十分感谢指导老师对论文的写作提供的帮助。

## 参考文献

- [1] Bass, H. (1992) The Ihara-Selberg zeta Function of a Tree Lattice. *International Journal of Mathematics*, **3**, 717-797. <https://doi.org/10.1142/S0129167X92000357>
- [2] Foata, D. and Zeilberger, D. (1999) A Combinatorial Proof of Bass's Evaluations of the Ihara-Selberg Zeta Function for Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, **351**, 2257-2274. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-99-02234-5>
- [3] Negami, S. and Sato, I. (2010) Weighted Zeta Functions for Quotients of Regular Coverings of Graphs. *Journal of Advanced Mathematical Studies*, **225**, 1717-1738. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2010.03.025>
- [4] 冯荣权, 金珠英. 有向图覆盖的 Zeta 函数[J]. 数学年刊, 2008, 29A(2): 143-150.
- [5] Horton, D. (2007) Ihara Zeta Functions of Digraphs. *Journal of Linear Algebra and Its Applications*, **425**, 130-142. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.03.013>
- [6] Mizuno, H. and Sato, I. (2004) Weighted Zeta Functions of Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **91**, 169-183. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2003.12.003>
- [7] Hashimoto, K. (1989) Zeta Functions of Finite Graphs and Representations of  $p$ -Adic Groups. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **15**, 211-280. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-330580-0.50015-X>
- [8] Sato, I. (2008) Weighted Bartholdi Zeta Functions of Graph Coverings. *Journal of Discrete Mathematics*, **308**, 2600-2606. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.07.044>
- [9] Stark, H.M. and Terras, A.A. (1996) Zeta Functions of Finite Graphs and Coverings. *Advances in Mathematics*, **121**, 124-165. <https://doi.org/10.1006/aima.1996.0050>
- [10] Kotani, M. and Sunada, T. (2000) Zeta Functions of Finite Graphs. *Journal of Mathematical Sciences (University of Tokyo)*, **7**, 7-25.
- [11] Choe, Y.-B., Kwak, J.H., Park, Y.S. and Sato, I. (2007) Bartholdi Zeta and L-Functions of Weighted Digraphs, Their Coverings and Products. *Advances in Mathematics*, **213**, 865-886. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2007.01.013>