Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(2), 257-263
Published Online February 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.122030

局部积黎曼流形的半不变子流形

边立泽，李淑雯，何 勇*，田 畅

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2022年1月3日；录用日期：2022年2月3日；发布日期：2022年2月10日

摘 要

本文主要研究局部积黎曼流形的半不变子流形的相关性质。首先，通过Weingarten 公式，给出了局部积黎曼流形的半不变子流形的垂直分布 $\mathcal{D}^{\perp}$ 完全可积的充要条件$A_{FZ}W \in \mathcal{D}^{\perp}$。其次，得到了局部积黎曼流形的半不变子流形成为混合全测地半不变子流形的充分条件。

关键词

黎曼流形，局部积，半不变子流形，垂直分布，混合全测地

Semi-Invariant Submanifolds of a Locally Product Riemannian Manifold

Lize Bian, Shuwen Li, Yong He*, Chang Tian

School of Mathematics Science, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jan. 3rd, 2022; accepted: Feb. 3rd, 2022; published: Feb. 10th, 2022

Abstract

In this paper, we study the semi-invariant submanifolds of a locally product Riemannian manifold. Firstly, for the semi-invariant submanifolds of a locally product

* 通讯作者。

文章引用: 边立泽, 李淑雯, 何勇, 田畅. 局部积黎曼流形的半不变子流形[J]. 理论数学, 2022, 12(2): 257-263.
DOI: 10.12677/pm.2022.122030

Riemannian manifold, the necessary and sufficient conditions for its vertical distribution to be completely integrable are given by the Weingarten formula. Secondly, a sufficient condition is obtained for the semi-invariant submanifolds of a locally product Riemannian manifold to be mixed-geodesic submanifolds.

Keywords

Riemannian Manifold, Locally Product, Semi-Invariant Submanifolds, Vertical Distribution, Mixed-Geodesic

1. 引言

在微分几何中, 具有复结构 $J^2 = -I$ (I是恒同映射)的流形有着非常丰富的几何性质. 1951年, Nijenhuis 研究了复结构 J 的可积性 [1]. 1958 年, Yano 探究了一个类似复结构的光滑结构 $F^2 = I(F \neq \pm I)$, 即殆积结构, 并在局部坐标系下给出了 F 的特征值 1和-1对应的两个正交补分布 T^{+1} 和 T^{-1} 分别完全可积的充要条件 [2].

具有殆积结构的微分流形称为殆积流形. 1959年, Yano 研究了殆积流形的完全可积分布 [3]. 1964年, Hsu 对殆积流形作了较为全面的研究 [4].

1960年, Tachibana 在局部坐标系下用殆积结构 F 给出了局部积黎曼流形的定义 [5]. 1981年, Adati 在研究局部积黎曼流形的子流形问题时发现, 局部坐标系下局部积黎曼流形与其子流形的关系得不到很好的呈现, 于是从殆积结构 F 的整体性出发定义了局部积黎曼流形的不变子流形和反不变子流形 [6].

1984年, Bejancu 定义了局部积黎曼流形的半不变子流形 [7], 此后, Matsumoto [8], Atceken [9–13]和 Gerdan [13,14]等人的研究丰富了这一类子流形. Bejancu 通过第二基本形式 B 给出了局部积黎曼流形的半不变子流形的垂直分布 $\mathcal{D}^\perp$ 和水平分布 $\mathcal{D}$ 分别完全可积的充要条件 [7]. 2003 年, Atceken 也利用第二基本形式 B 给出了垂直分布 $\mathcal{D}^\perp$ 和水平分布 $\mathcal{D}$ 分别完全可积的不同充要条件 [9], 2005年, Atceken 借助向量分解的方法又得到了 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^\perp$ 分别完全可积的全新充要条件 [10].

本文将通过 Weingarten 公式给出垂直分布 $\mathcal{D}^\perp$ 完全可积的充要条件 $A_{FZ}W \in \mathcal{D}^\perp$, 这推广了 Atceken 在文献 [10]中所得到的 $A_{FZ}W = 0$ 这一结论, 极大地丰富了垂直分布的完全可积性.

全测地子流形是黎曼几何中一类非常有研究价值的子流形, 局部积黎曼流形的全测地半不变子流形更是十分重要. 全测地半不变子流形因为其分布的选取不同, 有三种类型, 即混合全测地半不变子流形, $\mathcal{D}^\perp$ 全测地半不变子流形, $\mathcal{D}$ 全测地半不变子流形 [10].

本文的另一个问题是探究局部积黎曼流形的半不变子流形成为混合全测地半不变子流形的充分条件.

基于以上分析, 本文的研究可以得到一种构造具有垂直分布完全可积的半不变子流形的有效方法, 还可以得到一种构造局部积黎曼流形的混合全测地半不变子流形的有效途径.

2. 预备知识

本节主要介绍研究所需的基本概念, 并约定符号.

设 $(\bar{M},\bar{g})$ 和 (M,g) 分别是 $m+n$ 维和 m 维黎曼流形, (M,g) 是 $(\bar{M},\bar{g})$ 的等距浸入子流形. 设 $T\bar{M}$ 和 TM 分别表示 $(\bar{M},\bar{g})$ 和 (M,g) 的切丛, $\bar{\nabla}$ 和 ∇ 分别是 $(\bar{M},\bar{g})$ 和 (M,g) 上的联络. 令 $T^{\perp}M$ 表示 (M,g) 的法丛, 即 $T\bar{M}=TM\oplus T^{\perp}M$, $\nabla^{\perp}$ 表示 (M,g) 上的法联络.

$(\bar{M},\bar{g})$ 的等距侵入子流形 (M,g) 的 Gauss 公式为 [15]:

$$\bar{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+B(X,Y), \tag{1}$$

其中 $X,Y\in TM$, $\nabla_X Y\in TM$, $B(X,Y)\in T^{\perp}M$.

$(\bar{M},\bar{g})$ 的等距侵入子流形 (M,g) 的 Weingarten 公式为 [15]:

$$\bar{\nabla}_X \xi=-A_\xi X+\nabla^{\perp}_X \xi, \tag{2}$$

其中 $X\in TM$, $\xi\in T^{\perp}M$, $A_\xi X\in TM$, $\nabla^{\perp}_X\xi\in T^{\perp}M$.

$\bar{\nabla}_X Y$ 关于 (M,g) 的法向分量 $B(X,Y)$ 和 $\bar{\nabla}_X\xi$ 关于 (M,g) 的切向分量 $A_\xi X$ 有如下关系 [15]:

$$\bar{g}(A_\xi X,Y)=\bar{g}(B(X,Y),\xi)=\bar{g}(X,A_\xi Y). \tag{3}$$

定义 2.1 [5] 设 $(\bar{M},\bar{g})$ 是黎曼流形, F 是 $(\bar{M},\bar{g})$ 上的殆积结构, 若 $\forall\bar{X},\bar{Y}\in T\bar{M}$, 有

$$\bar{g}(F\bar{X},F\bar{Y})=\bar{g}(\bar{X},\bar{Y}), \tag{4}$$

则称 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 是殆积黎曼流形.

定义 2.2 [5] 设 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 是殆积黎曼流形, 若 $\bar{\nabla}F=0$, 则称 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 是局部积黎曼流形.

定义 2.3 [7] 设 (M,g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的等距浸入子流形, 若 (M,g) 的垂直分布 $\mathcal{D}^{\perp}$ 和水平分布 $\mathcal{D}$ 满足:

(i) $TM=\mathcal{D}^{\perp}\oplus\mathcal{D}$;

(ii) $F(\mathcal{D})=\mathcal{D}$;

(iii) $F(\mathcal{D}^{\perp})\subset T^{\perp}M$,

则称 (M,g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的半不变子流形.

当 $dim(\mathcal{D}^{\perp})=0$ 时, 称 (M,g) 为不变子流形 [6]; $dim(\mathcal{D})=0$ 时, 称 (M,g) 为反不变子流形 [6]. 当 (M,g) 是半不变子流形时, 设 $\mathcal{V}$ 是 $F(\mathcal{D}^{\perp})$ 在 $T^{\perp}M$ 中的正交补分布, 即 $T^{\perp}M=F(\mathcal{D}^{\perp})\oplus\mathcal{V}$.

命题 2.1 [15] 设映射 $B:TM\times TM\to T^{\perp}M$ 是 (M,g) 在 $(\bar{M},\bar{g})$ 中的第二基本形式, 则 B

是对称的且 C^∞ 双线性的, 即 $\forall X, Y \in TM$, 有:

(i) $B(X,Y) = B(Y,X)$,

(ii) $B(aX, bY) = abB(X,Y)$.

定义 2.4 [15] 设 (M,g) 是 $(\bar{M},\bar{g})$ 的等距浸入子流形, 若 (M,g) 在 $(\bar{M},\bar{g})$ 中的第二基本形式 $B=0$, 则称 (M,g) 为 $(\bar{M},\bar{g})$ 的全测地子流形.

定义 2.5 [9] 设 (M,g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的半不变子流形, 若 $\forall X\in\mathcal{D}$, $Z\in\mathcal{D}^\perp$, 有 $B(X,Z)=0$, 则称 (M,g) 是 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的混合全测地半不变子流形.

定义 2.6 [10] 设 (M,g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的半不变子流形, 若 $\forall X,Y\in\mathcal{D}$, $Z,W\in\mathcal{D}^\perp$, 有 $B(Z,W)=0$ (或 $B(X,Y)=0$), 则称 (M,g) 是 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的 $\mathcal{D}^\perp$ (或 $\mathcal{D}$) 全测地半不变子流形.

定义 2.7 [16] 设 $\mathcal{D}^l$ 为 m 维实微分流形 M 的 l 维分布, 若 $\forall X,Y\in\mathcal{D}^l$, 有 Lie 括号

$$[X,Y]\in\mathcal{D}^l,$$

则称分布 $\mathcal{D}^l$ 满足 Frobenius 条件.

引理 2.1 [16] 设 $\mathcal{D}^l$ 为 m 维实微分流形 M 的 l 维分布, 则分布 $\mathcal{D}^l$ 完全可积等价于分布 $\mathcal{D}^l$ 满足 Frobenius 条件.

命题 2.2 [5] 设 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 是局部积黎曼流形, 则 $\forall \bar{X},\bar{Y}\in T\bar{M}$, 有

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}(F\bar{Y}) = F(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}). \tag{5}$$

命题 2.3 [9] 设 (M,g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的半不变子流形, 则 $\forall Z,W\in\mathcal{D}^\perp$, 有

$$A_{FZ}W = -A_{FW}Z. \tag{6}$$

引理 2.2 [9] 设 (M,g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的半不变子流形, $T^\perp M = F(\mathcal{D}^\perp)\oplus\mathcal{V}$, 则 $\mathcal{D}^\perp$ 完全可积当且仅当 $\forall X\in\mathcal{D}, Z\in\mathcal{D}^\perp$, 有

$$B(X,Z)\in\mathcal{V}. \tag{7}$$

3. 半不变子流形

半不变子流形的切丛和分布有十分密切的关系, 因此通过分布来刻画半不变子流形是非常有意义的. 本节主要探究局部积黎曼流形的半不变子流形的垂直分布 $\mathcal{D}^\perp$ 完全可积的充要条件以及半不变子流形成为混合全测地半不变子流形的充分条件.

命题 3.1 设 (M,g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的半不变子流形, 则 $\forall Z,W\in\mathcal{D}^\perp, X\in\mathcal{D}$, 有

$$\bar{g}([Z,W],FX) = 2\bar{g}(A_{FZ}W,X). \tag{8}$$

证明 根据定义2.3, $\forall Z, W \in \mathcal{D}^{\perp}$, 有 $FZ, FW \in T^{\perp}M$, 再由(2), 可得

$$\bar{\nabla}_Z(FW) = -A_{FW}Z + \nabla^{\perp}_Z FW, \tag{9}$$

$$\bar{\nabla}_W(FZ) = -A_{FZ}W + \nabla^{\perp}_W FZ. \tag{10}$$

由(9)减去(10), 可得

$$\bar{\nabla}_Z(FW) - \bar{\nabla}_W(FZ) = -A_{FW}Z + A_{FZ}W + \nabla^{\perp}_Z FW - \nabla^{\perp}_W FZ. \tag{11}$$

由于 $W, Z \in \mathcal{D}^{\perp} \subset TM \subset T\bar{M}$, 应用(5), 可以得到

$$\bar{\nabla}_Z(FW) - \bar{\nabla}_W(FZ) = F(\bar{\nabla}_Z W) - F(\bar{\nabla}_W Z) = F[Z, W]. \tag{12}$$

根据(6), $\forall Z, W \in \mathcal{D}^{\perp}$, 有

$$-A_{FW}Z + A_{FZ}W = 2A_{FZ}W. \tag{13}$$

将(12)和(13)代入(11), 得

$$F[Z, W] = 2A_{FZ}W + \nabla^{\perp}_Z FW - \nabla^{\perp}_W FZ. \tag{14}$$

因为 $\nabla^{\perp}_Z FW - \nabla^{\perp}_W FZ \in T^{\perp}M, X \in \mathcal{D} \subset TM$, 所以 $\bar{g}(\nabla^{\perp}_Z FW - \nabla^{\perp}_W FZ, X) = 0$, 故由(14)可以得到

$$\bar{g}(F[Z, W], X) = 2\bar{g}(A_{FZ}W, X). \tag{15}$$

根据(4), 并注意到 $F^2 = I$, 有

$$\bar{g}(F[Z, W], X) = \bar{g}(F^2[Z, W], FX) = \bar{g}([Z, W], FX). \tag{16}$$

由(16)和(15), 易得

$$\bar{g}([Z, W], FX) = 2\bar{g}(A_{FZ}W, X).$$

定理 3.1 设 (M, g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M}, \bar{g}, F)$ 的半不变子流形, 则 $\mathcal{D}^{\perp}$ 完全可积当且仅当 $\forall Z, W \in \mathcal{D}^{\perp}$, 有 $A_{FZ}W \in \mathcal{D}^{\perp}$.

证明 设 (M, g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M}, \bar{g}, F)$ 的半不变子流形, 由引理2.1可知, $\mathcal{D}^{\perp}$ 完全可积等价于 $[Z, W] \in \mathcal{D}^{\perp}$, 从而 $\forall X \in \mathcal{D}$, 有 $\bar{g}([Z, W], FX) = 0$, 再由命题3.1, 这等价于 $A_{FZ}W \in \mathcal{D}^{\perp}$, 即 $\mathcal{D}^{\perp}$ 完全可积当且仅当 $A_{FZ}W \in \mathcal{D}^{\perp}$, 定理得证.

定理 3.2 设 (M, g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M}, \bar{g}, F)$ 的半不变子流形, 若 $\mathcal{D}^{\perp}$ 完全可积, 且 $F(\mathcal{D}^{\perp}) = T^{\perp}M$, 则 (M, g) 是 $(\bar{M}, \bar{g}, F)$ 的混合全测地半不变子流形.

证明 设 (M, g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M}, \bar{g}, F)$ 的半不变子流形, 根据(3), $\forall Z, W \in \mathcal{D}^{\perp}$, $X \in \mathcal{D}$, 有

$$\bar{g}(A_{FZ}W, X) = \bar{g}(B(X, W), FZ). \tag{17}$$

由命题3.1和(17), 易得

$$\bar{g}([Z,W],FX)=2\bar{g}(B(X,W),FZ). \tag{18}$$

根据引理2.2, $\mathcal{D}^{\perp}$ 完全可积等价于 $B(X,W)\in\mathcal{V}$, 再由 $F(\mathcal{D}^{\perp})=T^{\perp}M$, 即 $T^{\perp}M$ 中不存在分布 $\mathcal{V}$, 故(18)中 $B(X,W)=0$. 从而由定义2.5可知, (M,g) 是 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的混合全测地半不变子流形, 定理得证.

推论 3.1 设 (M,g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的混合全测地半不变子流形, 则 (M,g) 的垂直分布 $\mathcal{D}^{\perp}$ 完全可积.

推论 3.2 设 (M,g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的混合全测地半不变子流形, 则 $\forall Z\in\mathcal{D}^{\perp}$, $X\in\mathcal{D}$, $\xi\in T^{\perp}M$, 有

$$A_{\xi}Z\in\mathcal{D}^{\perp},$$

$$A_{\xi}X\in\mathcal{D}.$$

推论 3.3 设 (M,g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的 $\mathcal{D}^{\perp}$ 全测地半不变子流形, 则 $\forall Z\in\mathcal{D}^{\perp}$, $\xi\in T^{\perp}M$, 有

$$A_{\xi}Z\in\mathcal{D}.$$

推论 3.4 设 (M,g) 是局部积黎曼流形 $(\bar{M},\bar{g},F)$ 的 $\mathcal{D}$ 全测地半不变子流形, 则 $\forall X\in\mathcal{D}$, $\xi\in T^{\perp}M$, 有

$$A_{\xi}X\in\mathcal{D}^{\perp}.$$

4. 结论

本文给出了局部积黎曼流形的半不变子流形的垂直分布 $\mathcal{D}^{\perp}$ 完全可积的充要条件, 即 $A_{FZ}W\in\mathcal{D}^{\perp}$, 从而可以得到一种构造具有垂直分布完全可积的半不变子流形的有效方法. 本文还得到了局部积黎曼流形的半不变子流形成为混合全测地半不变子流形的充分条件, 可以由此来构造局部积黎曼流形的混合全测地半不变子流形.

基金项目

国家自然科学基金(11761069).

参考文献

[1] Nijenhuis, A. (1951) X_{n-1}-Forming Sets of Eigenvectors. *Indagationes Mathematicae*, **54**, 200-212. https://doi.org/10.1016/S1385-7258(51)50028-8

[2] Yano, K. (1958) On Walker Differentiation in Almost Product or Almost Complex Spaces. *Indagationes Mathematicae*, **61**, 573-580. https://doi.org/10.1016/S1385-7258(58)50082-1

[3] Yano, K. (1959) Affine Connexions in an Almost Product Space. *Kodai Mathematical Journal*, **11**, 1-24. https://doi.org/10.2996/kmj/1138844134

[4] Hsu, C. (1964) Remarks on Certain Almost Product Spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, **14**, 163-176. https://doi.org/10.2140/pjm.1964.14.163

[5] Tachibana, S. (1960) Some Theorems on Locally Riemannian Spaces. *Tohoku Mathematical Journal*, **12**, 281-292. https://doi.org/10.2748/tmj/1178244441

[6] Adati, T. (1981) Submanifolds of an Almost Product Riemannian Manifold. *Kodai Mathematical Journal*, **4**, 327-343. https://doi.org/10.2996/kmj/1138036379

[7] Bejancu, A. (1984) Semi-Invariant Submanifolds of Locally Product Riemannian Manifold. *An Univ Timisoara Ser Stiint Math Al*, **22**, 3-11.

[8] Matsumoto, K. (1982) On Submanifolds of Locally Product Riemannian Manifolds. *TRU Mathematics*, **18**, 145-157.

[9] Sahin, B. and Atceken, M. (2003) Semi-Invariant Submanifolds of Riemannian Product Manifold. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, **24**, 549-558.

[10] Atceken, M. (2005) Submanifolds of Riemannian Product Manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, **29**, 389-401.

[11] Atceken, M. (2010) Geometry of Semi-Invariant Submanifolds of a Riemannian Product Manifold. *Mathematica Moravica*, **14**, 23-34. https://doi.org/10.5937/MatMor1001023A

[12] Atceken, M. (2008) A Condition for Warped Product Semi-Invariant Submanifolds to Be Riemannian Product Semi-Invariant Submanifolds in Locally Riemannian Product Manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, **32**, 349-362.

[13] Tastan, H.M. and Gerdan, S. (2018) Doubly Twisted Product Semi-Invariant Submanifolds of a Locally Product Riemannian Manifold. *Mathematical Advances in Pure and Applied Sciences*, **1**, 23-26.

[14] Traore, M., Tastan, H.M. and Gerdan, S. (2021) Multiply Warped Product Generalized Semi-Invariant Submanifolds. *International Electronic Journal of Geometry*, **14**, 313-330.

[15] 白正国, 沈一冰. 黎曼几何初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[16] 陈维桓. 微分流形初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.