Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1416-1420
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117158

Hans汉斯

三角函数的积分计算技巧

徐晓静

沈阳师范大学，辽宁 沈阳
Email: 1748691725@qq.com

收稿日期：2021年6月12日；录用日期：2021年7月14日；发布日期：2021年7月22日

摘 要

三角有理函数的积分求解是微积分中一个很重要的内容。在三角函数的积分中，将被积函数化为已知的三角函数和用变量代换是计算三角函数积分的两种重要的算法。但是对于三角函数的积分算法不止仅限于以上的两种，我们应该根据被积函数的特征，掌握更多的求解三角函数积分的方法。本文用实际的例子给出五种处理三角有理函数积分的方法与技巧，分别是利用三角函数恒等变形、变量代换法、万能换元、奇偶性、递推法。

关键词

变量代换，万能换元，递推法，三角函数

Integral Calculation Skills of Trigonometric Functions

Xiaojing Xu

Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning
Email: 1748691725@qq.com

Received: Jun. 12th, 2021; accepted: Jul. 14th, 2021; published: Jul. 22nd, 2021

Abstract

The integral solution of trigonometric rational function is a very important content in calculus. In the integration of trigonometric functions, converting the integrand into known trigonometric functions and using variable substitution are two important algorithms for calculating the integration of trigonometric functions. But for the trigonometric function integration algorithm is not limited to the above two; we should master more methods to solve the trigonometric function in-

文章引用: 徐晓静. 三角函数的积分计算技巧[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1416-1420.
DOI: 10.12677/pm.2021.117158

tegration according to the characteristics of the integrand. In this paper, five methods and techniques for processing trigonometric rational function integration are given by practical examples. They are the same deformation of trigonometric function, variable substitution method, universal substitution method, parity and recursion method.

Keywords

Variable Substitution, Variable Substitution, Recursion, Trigonometric Function

1. 引言

三角函数由于其性质的特殊性[1]，使得这类积分往往是比较困难的。在三角函数积分的计算中，我们教材中提到一般是用万能变换和变量替换的方法。但对于某些题目来说，经过变化就会更为复杂，更不利于积分的计算了。所以我们需要根据被积函数的特征，选取适合的方法进行求解。本文介绍了几种常用的积分计算方法，有利于化简被积函数从而提高做题效率。

2. 一般区间上的三角函数的定积分的算法

2.1. 利用三角函数恒等变形[2]

当不定积分中的被积函数都是三角函数时，一般说来，不易直接看出求解方法，往往需先对被积函数作恒等变形，至于如何去变形，则需从实践中不断总结经验，变形过程中常用到三角函数的基本关系式、积化和差公式、倍角或半角公式等。

例：计算积分 $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx$ 。

解：因为 $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\sec^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}\right)$

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{2}\int e^x\sec^2\frac{x}{2}dx+\int e^x\tan\frac{x}{2}dx=e^x\tan\frac{x}{2}-\int e^x\tan\frac{x}{2}dx+\int e^x\tan\frac{x}{2}dx+c\\&=e^x\tan\frac{x}{2}+c\end{aligned}$$

2.2. 利用变量代换[3]

被积函数有 $\sin x$ 、 $\cos x$ 、 $\tan x$ 等，通过转化被积函数就转化为含有新的变量的函数。一般形式如 $\int f(\sin x,\cos x,\tan x)dx$ 、 $\int f\left(\sqrt{x^2\pm a^2},\sqrt{a^2-x^2},(a+x^2)\right)dx$ 、 $\int f(\cos mx\sin nx,\sin mx\sin nx,\cos mx\cos nx)dx$ 、 $\int \cos^m x\sin^n x dx$ 等可以用变量代换的方法。

例：求 $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$ 。

解：由于$1+\tan^2 x=\sec^2 x$，设$x=a\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}a\tan t=a\sec^2 t\mathrm{d}t$。

则有$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}=a\sec t$。

$$\int_a^b\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\int_{a_1}^{b_1}\frac{a\sec^2 t\mathrm{d}t}{a\sec t}=\int_{a_1}^{b_1}a\sec t\mathrm{d}t=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+c.$$

把$\tan t=\frac{x}{a}$，$\sec t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$代入，

解得$\int_a^b\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+c$。

2.3. 万能换元法[4]

一般积分形式有$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，此类积分一般通过万能替换$t=\tan\frac{x}{2}$，则可以得到

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

例： 计算积分：$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+4\cos x}$。

解：令$t=\tan\frac{x}{2}$，则$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$。从而

$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+4\cos x}=\int\frac{2\mathrm{d}t}{5-3t^2}=-\int\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}\mathrm{t}-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}\mathrm{t}+\sqrt{5}}\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\frac{\sqrt{3}\mathrm{t}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}\mathrm{t}+\sqrt{5}}+c$ 把$t=\tan\frac{x}{2}$代入解得

$\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\frac{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{5}}+c$。

注意： 万能换元法，不要滥用万能公式。例如$\int\frac{\cot x\mathrm{d}x}{1+\sin x}$用万能公式做反而麻烦，用三角恒等变形和变量的方法，则更为简单。

2.4. 利用被积函数奇偶性

考虑被积函数在积分区间上的奇偶性可以减少计算步骤，大大提高做题效率。

定理[4]：

证明若$f(x)$为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的连续函数，则有$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$；

解：用换元的方法做$x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x;$$

例： 计算积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$。

解：因为$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$，所以有$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$$原式=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

例： 计算积分 $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}$。

解：令 $\theta=\pi-x$，则 $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos(\pi-x)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2-\cos x}$ 因为 $\frac{1}{2-\cos x}$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上是偶函数，故可以写成 $2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2-\cos x}$ (在用万能变换 $t=\tan\frac{x}{2}$)

$$=2\int_0^{\infty}\frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=4\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+3t^2}=4\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3}t\Big|_0^{\infty}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

2.5. 利用递推公式

计算形如 $\int\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$ 这样的积分。

例[5]： 计算积分若 $I(m,n)=\int_a^b\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$，证明当 $m+n\neq 0$，时有

$$I(m,n)\begin{cases}\dfrac{\cos^{m-1}x+\sin^{n+1}x}{m+n}+\dfrac{m-1}{m+n}I(m-2,n)\cdots(m\geq 2,\ n\geq 0);\\ -\dfrac{\cos^{m+1}x+\sin^{n-1}x}{m+n}+\dfrac{n-1}{m+n}I(m,n-2)\cdots(m\geq 0,\ n\geq 2);\end{cases}$$

解：

$$\begin{aligned}I(m,n)&=\int\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x=\int\cos^{m-1}x\sin^n x\mathrm{d}\sin x=\frac{1}{n+1}\int\cos^{m-1}x\mathrm{d}\sin^{n+1}x\\&=\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^{m-2}x\sin^{n+2}x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^{m-2}x\sin^n x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}I(m-2,n)-\frac{m-1}{n+1}\int\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n+1}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}I(m-2,n)-\frac{m-1}{n+1}I(m,n)\end{aligned}$$

化简，因此，$I(m,n)=\frac{\cos^{m-1}x+\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}\mathrm{I}(m-2,n)\cdots(m\geq 2,\ n\geq 0)$。

同理可以把 $\sin x$ 提到 $\mathrm{d}x$ 就可以得到第二个公式

$$\mathrm{I}(m,n)=-\frac{\cos^{m+1}x+\sin^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\mathrm{I}(m,n-2)\cdots(m\geq 0,\ n\geq 2).$$

3. 一类特殊区间上的三角函数定积分的算法

定理二 [1]: 记 $I(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$，根据定理一则有 $I(m,n)=I(n,m)$，则可以证明

[1] 李扬数学分析强化讲义[Z]，2021。

$$I(m,n)=\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)=\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2)=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} & m,n\text{不全为偶数}\\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\dfrac{\pi}{2} & m,n\text{全为偶数}\end{cases}$$

证明：由于刚才而基础知识可以知道

$$I(m,n)\begin{cases}\left.\dfrac{\cos^{m-1}x+\sin^{n+1}x}{m+n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{m-1}{m+n}I(m-2,n)=\dfrac{n-1}{m+n}I(m,n-2) & (m\geq 2,\ n\geq 0);\\ -\left.\dfrac{\cos^{m+1}x+\sin^{n-1}x}{m+n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{n-1}{m+n}I(m,n-2)=\dfrac{m-1}{m+n}I(m-2,n) & (m\geq 0,\ n\geq 2);\end{cases}$$

而我们已知 $I(0,0)=\frac{\pi}{2}$； $I(1,0)=I(0,1)=1$； $I(1,1)=\frac{1}{2}$，经过反复的递推就可以得到了。

注意：我们这个公式所的区间必须是要求在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上。对与三角函数在 $[0,\pi]$，$[0,2\pi]$ 我们通过三角函数的对称性就可以得到了。

例：计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x$ 。

解：利用上面的公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x\frac{(3-1)!!(4-1)!!}{(3+4)!!}=\frac{3!!2!!}{7!!}$ 。

4. 结论

关于三角函数的定积分的计算技巧有很多种，因为方法灵活多样，就需要我们今后在练习中不断发现、积累、总结，达到能够根据被积函数的特征，选取最合适的方法进行求解。同时也希望我们在今后的学习中能探究更多的解题方法，提高三角函数定积分解题的效率。

参考文献

[1] 王剑英. 一类特殊三角函数的积分及应用[J]. 科技信息, 2008(30): 208.

[2] 张涪梅. 三角函数恒等变形在不定积分中的应用[J]. 西藏大学学报(自然科学版), 2008(2): 105-106+114.

[3] 王仙彩. 换元法在计算三角函数有理式积分中的应用[J]. 高等函授学报(自然科学版), 2007, 20(2): 22-23+25.

[4] 钱吉林. 数学分析解题精粹[M]. 武汉: 崇文书局, 2003.

[5] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.