Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1348-1360
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117152

Hans汉斯

带有非线性阻尼的Kirchhoff型Berger方程的一致吸引子

张娟娟*，徐　玲

西北师范大学数学与统计学院，甘肃　兰州
Email: *zjj19950303g@163.com, 13893414055@163.com

收稿日期：2021年6月8日；录用日期：2021年7月9日；发布日期：2021年7月21日

摘　要

本文考虑带有非线性阻尼的Kirchhoff型Berger方程解的长时间行为，运用收缩函数和渐近先验估计的方法证明了上述问题在空间$\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\times L^2(\Omega)$中一致吸引子的存在性。

关键词

Berger方程，Kirchhoff型，非线性阻尼，一致吸引子

Uniform Attractor for Berger Equation of Kirchhoff-Type with Nonlinear Damping

Juanjuan Zhang*, Ling Xu

College of Mathematics and Statistic, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: *zjj19950303g@163.com, 13893414055@163.com

Received: Jun. 8th, 2021; accepted: Jul. 9th, 2021; published: Jul. 21st, 2021

Abstract

In this paper, we consider the long-time behavior of solution for Berger equation of Kirchhoff-type with nonlinear damping, and prove the existence of uniform attractor for the above problem by using the method of contractive function and asymptotic priori estimation in the space $\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\times L^2(\Omega)$.

*通讯作者。

文章引用: 张娟娟, 徐玲. 带有非线性阻尼的 Kirchhoff 型 Berger 方程的一致吸引子[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1348-1360.
DOI: 10.12677/pm.2021.117152

Keywords

Berger Equation, Kirchhoff-Type, Nonlinear Damping, Uniform Attractor

1. 引言

本文考虑带有非线性阻尼的 Kirchhoff 型非自治 Berger 方程

$$\begin{cases} u_{tt}+a(x)\varphi(u_t)+\left(\beta-\alpha\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+\Delta^2u+\mu u+g(u)=h(x,t), \quad x\in\Omega, & (1)\\ u|_{\partial\Omega}=\Delta u|_{\partial\Omega}=0, & (2)\\ u(x,\tau)=u_\tau^0(x),\ u_t(x,\tau)=u_\tau^1(x) & (3)\end{cases}$$

一致吸引子的存在性，其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个具有足够光滑边界的有界域，函数 $u(x,t)$ 代表板的挠度，β 是一个常数，它与作用在板上的压力成正比，$h(x,t)$ 描述板的横向负载，函数 $a(x)$ 表示环境阻力，μ 和 α 是大于 0 的常数。

假设函数 $h(x,t)$、$\varphi(s)$、$g(s)$ 和 $a(x)$ 分别满足如下条件

(W1) 函数 $a\in L^\infty(\Omega)$，并且存在正常数 α_0，使得

$$a(x)\ge\alpha_0>0,\quad x\in\Omega. \tag{4}$$

(W2) 函数 $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$，满足以下条件

$$\varphi(0)=0,\ \varphi\text{是严格增的},\ \liminf_{|s|\to\infty}\varphi'(s)>0, \tag{5}$$

$$|\varphi(s)|\le C\left(1+|s|^q\right), \tag{6}$$

其中当 $n\le4$ 时，$1\le q<\infty$；当 $n>4$ 时，$1\le q\le\dfrac{n+4}{n-4}$。

(W3) 函数 $g\in C^1(\mathbb{R})$，$G(u)=\int_0^u g(s)\mathrm{d}s$，满足如下条件

$$|g'(s)|\le C_1\left(1+|s|^p\right), \tag{7}$$

$$\liminf_{|s|\to\infty}\frac{g(s)}{s}>-\lambda_1, \tag{8}$$

其中当 $n\le4$ 时，$1\le p<\infty$；当 $n>4$ 时，$1\le p\le\dfrac{4}{n-4}$。λ_1 是满足 Poincáre 不等式($\|\nabla u\|^2\ge\sqrt{\lambda_1}\|u\|^2$)的适当常数。

(W4) 外力项 $h(x,t)$ 满足条件

$$h(x,t)\in L^\infty\left(\mathbb{R};L^2(\Omega)\right), \tag{9}$$

$$\partial_t h\in L_b^r\left(\mathbb{R};L^r(\Omega)\right),\ r>\frac{2n}{n+4}. \tag{10}$$

Berger 方程起源于飞机在空中飞行的过程中，金属表面遇到气流时的非线性振动现象以及能量耗散，它描述板的非线性振动情况，这类方程较早地可以追溯到 Berger 的理论中，参见文献[1] [2]。

当 $\beta=\alpha=0$ 时，即方程(1)不具有 Kirchhoff 型且 $\varphi(u_t)=u_t$ 时，文献[3]（$a(x)\equiv\xi$ (常数))和文献[4]都研究了自治的 Berger 方程在无界域上全局吸引子的存在性，文献[5]研究了方程(1)在空间 $H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 中一致吸引子的存在性；若 $\varphi(u_t)$ 为非线性阻尼时，文献[6]研究了自治的 Berger 方程在空间 $H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 中全局吸引子的存在性。

当 β,α 均不为 0 时，文献[7]研究了方程(1) ($g(u)=0,\ \mu=0,\ \alpha=1$)解的长时间动力学行为，并且在空间 $\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\times L^2(\Omega)$ 中证明了该方程紧的一致吸引子的存在性。

受此启发，本文试图运用收缩函数和渐近先验估计的方法证明问题(1)~(3)在空间 $\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\times L^2(\Omega)$ 中一致吸引子的存在性。特别地，非线性阻尼项和 Kirchhoff 项的引入给一致有界吸收集的存在性和过程渐近紧性的证明带来了本质性的困难。

本文的结构如下，第二部分，介绍本文相关的预备知识；第三部分，在所给的函数空间中证明问题(1)~(3)所对应过程的一致有界吸收集的存在性；第四部分，首先运用能量不等式进行先验估计，其次根据定理 A 证明过程的渐近紧性，进而得到问题(1)~(3)在空间 $\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\times L^2(\Omega)$ 中一致吸引子的存在性。

在本文中，C 和 $C_i\ (i=0,1,2,\cdots)$ 都表示正常数，在不同之处可表示不同的值。

2. 预备工作

为了方便起见，给出如下简写：$L^p=L^p(\Omega)$，$H^k=H^k(\Omega)$，$H=L^2$，$V_1=H_0^1$，$V_2=H^2\cap H_0^1$，其中 $p\geq 1$，$k>0$。这里 H^k 是Sobolev空间，H_0^k 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 H^k 中的闭包。

用 $\|\cdot\|$ 和 $(\cdot,\cdot)$ 分别表示空间 H 中的范数和内积，V_{-2} 表示 V_2 的对偶空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示对偶空间之间的对偶积。

定义算子 $A:V_2\to V_{-2}$，

$$\langle Au,v\rangle=\langle\Delta u,\Delta v\rangle,\ \forall u,v\in V_2,$$

$$D(A)=\left\{u\in H\,\middle|\,Au\in H\right\}=\left\{u\in H^4\,\middle|\,u,\Delta u\in H_0^1\right\},$$

则 A 是空间 H 中的自伴算子，且在空间 V_2 中是严格正的。因此可以定义算子 A 的能量为 $A^s\ (s\in\mathbb{R})$，于是空间 $V_s=D\left(A^{\frac{s}{4}}\right)$ 是Hilbert空间，并且具有如下的内积和范数

$$(u,v)_s=\left(A^{\frac{s}{4}}u,A^{\frac{s}{4}}v\right),\ \|u\|_{V_s}=\left\|A^{\frac{s}{4}}u\right\|.$$

显然，$\|u\|_{V_2}=\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|=\|\Delta u\|,\|u\|_{V_1}=\left\|A^{\frac{1}{4}}u\right\|=\|\nabla u\|$。

下面介绍一些非自治动态系统的基本概念和定理，至于更详细的理论可参考文献[8] [9]。

空间 $L_{\mathrm{loc}}^r\left(\mathbb{R};L^k(\Omega)\right)(r,k\geq 1)$ 中的平移有界函数空间

$$L_b^r\left(\mathbb{R};L^k(\Omega)\right)=\left\{h\in L_{\mathrm{loc}}^r\left(\mathbb{R};L^k(\Omega)\right):\sup\nolimits_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\|h(x,s)\|_{L^k(\Omega)}^r\mathrm{d}s<\infty\right\}.$$

假设X是Banach空间，Σ 是参数集。如果对任意的 $\sigma\in\Sigma$，$\tau\in\mathbb{R}$，

$$U_\sigma(t,s)\circ U_\sigma(s,\tau)=U_\sigma(t,\tau),\ \forall t\geq s\geq\tau, \tag{11}$$

$$U_\sigma(\tau,\tau)=\mathrm{Id}\ (\text{恒等算子}), \tag{12}$$

则称算子 $\{U_\sigma(t,\tau)\}\ (t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 为 X 中的带有符号空间 Σ 的过程族。

假设 $\{T(s)\}_{s\ge0}$ 是作用于 Σ 的平移半群，如果

$$U_\sigma(t+s,\tau+s)=U_{T(s)\sigma}(t,\tau),\ \ \forall\sigma\in\Sigma,\ t\ge\tau,\ \tau\in\mathbb{R},\ s\ge0, \tag{13}$$

$$T(s)\Sigma=\Sigma,\quad \forall s\ge0, \tag{14}$$

则称过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}\ (t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 满足平移恒等式。

用 $\mathcal{B}(X)$ 表示 X 中所有有界集的集合， $\mathbb{R}_\tau=\{t\in\mathbb{R},\ t\ge\tau\}$ 。

定义1 [8]设 $B_0\in\mathcal{B}(X)$，如果对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$， $B\in\mathcal{B}(X)$，存在时刻 $T_0=T_0(B,\tau)\ge\tau$，使得

$$\bigcup\nolimits_{\sigma\in\Sigma}U_\sigma(t,\tau)B\subset B_0,\quad t\ge T_0,$$

则称 B_0 是过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}\ (t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 的一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)有界吸收集。

定义2 [8]设 $\mathcal{A}\subset X$ ，如果对任意固定的 $\tau\in\mathbb{R}$ ，以及每一个 $B\in\mathcal{B}(X)$，

$$\lim\nolimits_{t\to+\infty}\left(\sup\nolimits_{\sigma\in\Sigma}\mathrm{dist}\left(U_\sigma(t,\tau)B,\mathcal{A}\right)\right)=0,$$

则称 $\mathcal{A}$ 是过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 的一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)吸引集，其中 $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ 表示 X 中两个集合的Hausdorff半距离。特别地，如果闭的一致吸引集 $\mathcal{A}_\Sigma\subset X$ 包含在任何封闭的一致吸引集中(最小性)，则称 $\mathcal{A}$ 为过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 的一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)吸引子。

定义3 [9]设 X 是Banach空间， B 是 X 的有界子集， Σ 是符号空间，若对任何序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset B$ 和每个 $\{\sigma_n\}\subset\Sigma$，都存在子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$，使得

$$\lim\nolimits_{k\to\infty}\lim\nolimits_{l\to\infty}\phi\left(x_{n_k},x_{n_l};\sigma_{n_k},\sigma_{n_l}\right)=0,$$

则称 $(X\times X)\times(\Sigma\times\Sigma)$ 上的函数 $\phi(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)$ 是定义在 $B\times B$ 上的收缩函数。

$\mathrm{contr}(B,\Sigma)$ 表示所有定义在 $B\times B$ 上收缩函数的集合。

定理A [9]设 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 是Banach空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中的一个过程族，满足平移恒等式(13)和(14)，并且有一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)有界吸收集 $B_0\subset X$ 。进一步，假设对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $T=T(B_0,\varepsilon)$ 和 $\phi_T\in\mathrm{contr}(B,\Sigma)$，使得

$$\left\|U_{\sigma_1}(T,0)x-U_{\sigma_2}(T,0)y\right\|\le\varepsilon+\phi_T(x,y;\sigma_1,\sigma_2),\quad \forall x,y\in B_0,\ \forall\sigma_1,\sigma_2\in\Sigma,$$

则称 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 在 X 中是一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)渐近紧的。

非线性阻尼函数 φ 满足以下结果

引理1 [10]设非线性函数 $\varphi(s)$ 满足(W2)，则对任意的 $\delta>0$ ，存在 $C_\delta>0$ ，使得

$$|u-v|^2\le\delta+C_\delta(\varphi(u)-\varphi(v))(u-v),\quad \forall u,v\in\mathbb{R}.$$

类似于文献[7]中定理3.1，可以得到问题(1)~(3)解的存在性和唯一性结果如下：

定理1 设(W1)~(W4)成立，则对任意的初值 $(u_\tau^0,u_\tau^1)\in V_2\times H$ ，问题(1)~(3)有唯一的解 $u(t)$ 满足

$$(u(t),u_t(t))\in C(\mathbb{R}_\tau;V_2\times H)\text{和}\partial_{tt}u(t)\in L^2_{loc}\left(\mathbb{R}_\tau;H^{-2}(\Omega)\right).$$

设 $y(t)=(u(t),u_t(t))$， $y_\tau=(u_\tau^0,u_\tau^1)$， $E_0=V_2\times H$ ，其范数为

$$\|y\|_{E_0}=\|\Delta u\|^2+\|u_t\|^2.$$

系统(1)~(3)等价于如下系统

$$\begin{cases}\partial_t u_t=-a(x)\varphi(u_t)-\left(\beta-\alpha\|\nabla u\|^2\right)\Delta u-\Delta^2 u-\mu u-g(u)+h(x,t),\ t\ge\tau,\\ u|_{\partial\Omega}=\dfrac{\partial}{\partial\nu}u|_{\partial\Omega}=0,\ u(x,\tau)=u_\tau^0(x),\ u_t(x,\tau)=u_\tau^1(x),\end{cases}$$

该系统的算子表示形式如下

$$\partial_t y=A_{\sigma(t)}(y),\ y|_{t=\tau}=y_\tau, \tag{15}$$

其中 $\sigma(t)=h(x,t)$ 是方程(15)的符号。现在定义方程(15)的符号空间，取固定的符号 $\sigma_0(t)=h_0(x,t)$，$h_0\in L^\infty\left(\mathbb{R};L^2(\Omega)\right)\cap W_b^{1,r}\left(\mathbb{R};L^r(\Omega)\right)\left(r>\dfrac{2n}{n+4}\right)$ 和集合

$$\Sigma_0=\left\{h_0(x,t+s):s\in\mathbb{R}\right\}, \tag{16}$$

$$\text{符号空间}\Sigma\text{是}\Sigma_0\text{在}L^\infty\left(\mathbb{R};L^2(\Omega)\right)\cap W_b^{1,r}\left(\mathbb{R};L^r(\Omega)\right)\text{中的弱*闭包}. \tag{17}$$

于是有如下性质成立。

命题1 Σ 在空间 $L^\infty\left(\mathbb{R};L^2(\Omega)\right)\cap W_b^{1,r}\left(\mathbb{R};L^r(\Omega)\right)$ 中是有界的，并且对任意的 $\sigma\in\Sigma$，有以下估计成立

$$\|\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R};L^2(\Omega))\cap W_b^{1,r}(\mathbb{R};L^r(\Omega))}\le\|h_0\|_{L^\infty(\mathbb{R};L^2(\Omega))\cap W_b^{1,r}(\mathbb{R};L^r(\Omega))}.$$

因此，由定理1可知，问题(1)~(3)对所有的 $\sigma\in\Sigma$ 是适定的，并且产生了一个由公式 $U_\sigma(t,\tau)y_\tau=y(t)$ 给出的过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$。$y(t)$ 是问题(1)~(3)满足条件(W1)~(W4)的解，并且 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 满足(11)~(12)。同时，由唯一可解性知，$\{U_\sigma(t,\tau)\}(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 满足平移等式(13)~(14)。

用 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 表示由(15)~(17)产生的过程族。

应用文献[11]中命题7.1，可以得出如下结果：

命题2 设 $h\in L^\infty\left(\mathbb{R};L^2(\Omega)\right)\cap W_b^{1,r}\left(\mathbb{R};L^r(\Omega)\right)\left(r>\dfrac{2n}{n+4}\right)$，则存在常数 $M>0$，使得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|h(x,t+s)\|_{L^2(\Omega)}\le M,\ s\in\mathbb{R}$$

命题3 设 $s_i\in\mathbb{R}\ (i=1,2,\cdots)$，$h\in L^\infty\left(\mathbb{R};L^2(\Omega)\right)\cap W_b^{1,r}\left(\mathbb{R};L^r(\Omega)\right)\left(r>\dfrac{2n}{n+4}\right)$，$\{u_n(t):t\ge0,n=1,2,\cdots\}$ 在空间 $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 中有界，并且对每个 $T_1>0$，$\{u_{n_t}(t)|n=1,2,\cdots\}$ 在空间 $L^\infty\left(0,T_1;L^2(\Omega)\right)$ 中有界，则对任意的 $T>0$，存在子序列 $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{s_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{s_n\}_{n=1}^\infty$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\int_0^T\int_s^T\int_\Omega\left(h(x,\tau+s_{n_k})-h(x,\tau+s_{n_l})\right)\left(u_{n_k}-u_{n_l}\right)_t(\tau)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=0.$$

3. 一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)有界吸收集的存在性

定理 2 假设(W1)~(W4)成立，若 $h_0\in L^\infty\left(\mathbb{R};L^2(\Omega)\right)\cap W_b^{1,r}\left(\mathbb{R};L^r(\Omega)\right)\left(r>\dfrac{2n}{n+4}\right)$，且 Σ 是由(17)所定义的，则问题(1)~(3)对应的过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 在空间 E_0 中有一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)有界吸收集。

证明 用方程(1)与 u_t 在空间 H 中作内积，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+\int_\Omega a(x)\varphi(u_t)u_t\mathrm{d}x=\left(h(t),u_t\right), \tag{18}$$

其中

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2+\frac{\mu}{2}\|u\|^2+\frac{\alpha}{4}\|\nabla u\|^4-\frac{\beta}{2}\|\nabla u\|^2+\int_\Omega G(u)\mathrm{d}x. \tag{19}$$

联立(4)和(5)可知，存在 $\delta_1>0$ 和 $C_{\delta_1}>0$，使得

$$\left(a(x)\varphi(u_t),u_t\right)\geq 2\delta_1\|u_t\|^2-C_{\delta_1}\mathrm{meas}(\Omega), \tag{20}$$

$$\left(\frac{3}{4}a(x)\varphi(u_t)-\delta_1 u_t,u_t\right)\geq\frac{\delta_1}{2}\|u_t\|^2-C_{\delta_1}\mathrm{meas}(\Omega). \tag{21}$$

由(8)式可知，存在 $\lambda_1>\lambda'>0$ 和 C_0，使得

$$\left(g(u),u\right)\geq-\lambda'\|u\|^2-C_0\mathrm{meas}(\Omega), \tag{22}$$

$$\int_\Omega G(u)\mathrm{d}x\geq-\frac{\lambda'}{2}\|u\|^2-C_0\mathrm{meas}(\Omega). \tag{23}$$

根据 Poincáre 不等式和(23)，可以推出

$$-\frac{\beta^2}{2\alpha}-C_0\mathrm{meas}(\Omega)\leq\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{m}{2}\|\Delta u\|^2+\frac{\alpha}{8}\|\nabla u\|^4-\frac{\beta^2}{2\alpha}-C_0\mathrm{meas}(\Omega)\leq E(t), \tag{24}$$

其中 $m\in(0,1]$ 是一个常数，若 $\mu\geq\lambda'$，则 $m=1$；若 $0<\mu<\lambda'$，则 $m\leq 1-\lambda_1^{-1}(\lambda'-\mu)$。

由(5)和(6)可知

$$|\varphi(s)|^{\frac{q+1}{q}}\leq\begin{cases}C, & |s|\leq 1,\\ 2C\varphi(s)s, & |s|\geq 1.\end{cases} \tag{25}$$

运用 Hölder 不等式和 Young 不等式，结合(4)，(5)和(25)，可以得到如下估计

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega a(x)\varphi(u_t)u\mathrm{d}x\right|\\
&\leq\left|\int_{\Omega(|u_t|\leq1)}a(x)\varphi(u_t)u\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\Omega(|u_t|\geq1)}a(x)\varphi(u_t)u\mathrm{d}x\right|\\
&\leq\int_{\Omega(|u_t|\leq1)}Ca(x)|u|\mathrm{d}x+\left(\int_{\Omega(|u_t|\geq1)}2Ca(x)\varphi(u_t)u_t\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{q+1}}\left(\int_{\Omega(|u_t|\geq1)}a(x)|u|^{q+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q+1}}\\
&\leq C\int_{\Omega(|u_t|\leq1)}a(x)|u|\mathrm{d}x+q(q+1)^{-\left(1+\frac{1}{q}\right)}\varepsilon_2^{-\frac{1}{q}}\int_{\Omega(|u_t|\geq1)}2Ca(x)\varphi(u_t)u_t\mathrm{d}x\left(\int_{\Omega(|u_t|\geq1)}a(x)|u|^{q+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-1}{q(q+1)}}\\
&\quad+\varepsilon_2\left(\int_{\Omega(|u_t|\geq1)}a(x)|u|^{q+1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q+1}}\\
&\leq\frac{C^2}{4\varepsilon_1}\mathrm{meas}(\Omega)+\left(\varepsilon_1 a_0^2\lambda_1^{-1}+\varepsilon_2 a_0^{\frac{2}{q+1}}C_\lambda^{-1}\right)\|\Delta u\|^2\\
&\quad+\left[2Cq(q+1)^{-\left(1+\frac{1}{q}\right)}\varepsilon_2^{-\frac{1}{q}}a_0^{\frac{q-1}{(q+1)q}}C_\lambda^{-\frac{q-1}{2q}}\right]\|\Delta u\|^{\frac{q-1}{q}}\int_\Omega a(x)\varphi(u_t)u_t\mathrm{d}x\\
&=C_2+\eta\|\Delta u\|^2+C_\eta\|\Delta u\|^{\frac{q-1}{q}}\int_\Omega a(x)\varphi(u_t)u_t\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $a_0=\sup\{a(x)|x\in\Omega\}$，由紧嵌入 $H^2\Subset L^{q+1}$ 可知，$\|\Delta u\|^2\geq C_\lambda\|u\|_{q+1}^2$ (C_λ 为正常数)。

将 $v=u_t+\delta_1 u$ (δ_1 如(20)所定义)代入方程(1)，可得

$$v_t-\delta_1 u_t+a(x)\varphi(u_t)+\Delta^2 u+\mu u+\left(\beta-\alpha\|\nabla u\|^2\right)\Delta u+g(u)=h(x,t). \tag{27}$$

用 v 与(27)式在空间 H 中作内积，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\delta_1}(t)+K(t)=0, \tag{28}$$

其中

$$E_{\delta_1}(t)=\frac{1}{2}\|v\|^2-\frac{1}{2}\delta_1^2\|u\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2+\frac{\mu}{2}\|u\|^2+\frac{\alpha}{4}\|\nabla u\|^4-\frac{\beta}{2}\|\nabla u\|^2+\int_\Omega G(u)\mathrm{d}x, \tag{29}$$

$$\begin{aligned}K(t)=&\left(\frac{3}{4}a(x)\varphi(u_t)-\delta_1 u_t,u_t\right)+\frac{1}{4}\left(a(x)\varphi(u_t),u_t\right)+\delta_1\left(a(x)\varphi(u_t),u\right)+\delta_1\alpha\|\nabla u\|^4\\&-\delta_1\beta\|\nabla u\|^2+\delta_1\|\Delta u\|^2+\mu\delta_1\|u\|^2+\delta_1\left(g(u),u\right)-\left(h(t),u_t\right)-\left(h(t),\delta_1 u\right).\end{aligned} \tag{30}$$

运用 Poincáre 不等式并结合(23)式，有

$$\begin{aligned}E_{\delta_1}(t)&\geq\frac{1}{2}\|v\|^2+\left(\frac{m}{2}-\frac{\delta_1^2}{2\lambda_1}\right)\|\Delta u\|^2+\frac{\alpha}{8}\|\nabla u\|^4-\left(\frac{\beta^2}{2\alpha}+C_0\mathrm{meas}(\Omega)\right)\\&\geq \mathrm{C}_3\left(\|v\|^2+\|\Delta u\|^2+\frac{\alpha}{4}\|\nabla u\|^4\right)-\left(\frac{\beta^2}{2\alpha}+C_0\mathrm{meas}(\Omega)\right),\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $\delta_1>0$ 足够小，使得 $2^{-1}m-(2\lambda_1)^{-1}\delta_1^2>0$。

运用 Young 不等式、Poincáre 不等式，再结合(21)~(22)和(26)，能够得出下列估计

$$\begin{aligned}K(t)\geq&\frac{\delta_1}{2}\|u_t\|^2-C_{\delta_1}\mathrm{meas}(\Omega)+\frac{1}{4}\left(a(x)\varphi(u_t),u_t\right)+\delta_1\left(-C_2-\eta\|\Delta u\|^2-C_\eta\|\Delta u\|^{\frac{q-1}{q}}\int_\Omega a(x)\varphi(u_t)u_t\mathrm{d}x\right)\\&+\frac{\delta_1\alpha}{2}\|\nabla u\|^4-\frac{\delta_1\beta^2}{2\alpha}+\delta_1\|\Delta u\|^2+\mu\delta_1\|u\|^2+\delta_1\left(-\lambda'\|u\|^2-C_0\mathrm{meas}(\Omega)\right)-\frac{1}{2\varepsilon_3}\|h(t)\|^2-\frac{\varepsilon_3}{2}\|u_t\|^2\\&-\frac{1}{2\varepsilon_3}\|h(t)\|^2-\frac{\varepsilon_3}{2}\delta_1^2\|u\|^2\\\geq&\frac{\delta_1-\varepsilon_3}{2}\|u_t\|^2+\delta_1(1-\eta)\|\Delta u\|^2+\delta_1\left(\mu-\lambda'-\frac{\varepsilon_3\delta_1}{2}\right)\|u\|^2+\left(\frac{1}{4}-\delta_1 C_{E(\tau)}\right)\int_\Omega a(x)\varphi(u_t)u_t\mathrm{d}x\\&+\frac{\delta_1\alpha}{2}\|\nabla u\|^4-\left(C_{\delta_1}\mathrm{meas}(\Omega)+\delta_1 C_2+\frac{\delta_1\beta^2}{2\alpha}+\delta_1 C_0\mathrm{meas}(\Omega)+\frac{1}{\varepsilon_3}\|h(t)\|^2\right)\\\geq&\frac{\delta_1-\varepsilon_3}{2}\|u_t\|^2+\delta_1 m'(1-\eta)\|\Delta u\|^2+\frac{\delta_1\alpha}{2}\|\nabla u\|^4-\left(\mathrm{C}_5+\frac{1}{\varepsilon_3}\|h(t)\|^2\right)\\\geq& C_4\left(\|u_t\|^2+\|\Delta u\|^2+\frac{\alpha}{4}\|\nabla u\|^4\right)-\left(\mathrm{C}_5+\frac{1}{\varepsilon_3}\|h(t)\|^2\right)\end{aligned} \tag{32}$$

其中 $C_{E(\tau)}$ 是依赖于 $C_\eta,E(\tau)$ 的常数；$\delta_1,\varepsilon_3,\eta>0$ 足够小，使得 $2^{-1}(\delta_1-\varepsilon_3)>0,\ 1-\eta>0,\ 4^{-1}-\delta_1 C_{E(\tau)}>0$；$m'\in(0,1]$ 是一个常数，若 $\mu\geq\lambda'+2^{-1}\varepsilon_3\delta_1$，则 $m'=1$；若 $0<\mu<\lambda'+2^{-1}\varepsilon_3\delta_1$，则 $m'\leq 1-\lambda_1^{-1}(1-\eta)^{-1}\times\left(\lambda'+2^{-1}\varepsilon_3\delta_1-\mu\right)$。

$$\|u_t\|^2+\|\Delta u\|^2+\frac{\alpha}{4}\|\nabla u\|^4\leq C_6\left(\|v\|^2+\|\Delta u\|^2+\frac{\alpha}{4}\|\nabla u\|^4\right), \tag{33}$$

其中 $C_6=\max\left\{2,2\delta_1^2\lambda_1^{-1}+1\right\}$。

令

$$Y(t)=\|u_t(t)\|^2+\|\Delta u(t)\|^2+\frac{\alpha}{4}\|\nabla u(t)\|^4,$$

联立(28)~(33)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t)+r_1Y(t)\le r_2+r_3\|h\|^2,$$

其中 $r_1=C_4C_6C_3^{-1}$，$r_2=C_5C_6C_3^{-1}$，$r_3=C_6C_3^{-1}\varepsilon_3^{-1}$。

运用 Gronwall 引理可以计算出

$$Y(t)\le Y(\tau)\exp(-r_1(t-\tau))+r_1^{-1}r_2+r_3(1+r_1^{-1})\|h\|_{L_b^2}^2.$$

结合 σ 的定义、命题 1 及命题 2 可知，对任意的 $\sigma\in\Sigma$，有 $\|\sigma\|_{L_b^2}^2\le\|h_0\|_{L_b^2}^2$，即 $\|h\|_{L_b^2}^2\le\|h_0\|_{L_b^2}^2$。

因此，就得到了 E_0 中的一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)有界吸收集 B_0，

$$B_0=\left\{(u_0,v_0)\in E_0\,\middle|\,\|\Delta u_0(t)\|^2+\|v_0(t)\|^2+\frac{\alpha}{4}\|\nabla u_0(t)\|^4\le\rho^2\right\},$$

其中 $\rho^2=2r_1^{-1}r_2+2r_3(1+r_1^{-1})\|h_0\|_{L_b^2}^2$。即对于 E_0 中的任意有界子集 B，存在 $t_0=t_0(\tau,B)\ge\tau$，使得

$$\bigcup_{h\in\Sigma}U_h(t,\tau)B\subset B_0,\ \forall t\ge t_0.$$

4. 一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)吸引子的存在性

在本节中，首先运用能量不等式进行先验估计，其次根据定理 A 证明空间 E_0 中过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 的一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)渐近紧性，最后给出问题(1)~(3)所对应的过程族一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)吸引子存在的结论。

用 B_0 表示空间 E_0 中过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma)$ 的一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)有界吸收集，并且设

$$E_w(t)=\frac{1}{2}\|\Delta w(t)\|^2+\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2.$$

4.1. 先验估计

对任意的 $(u_0^i,v_0^i)\in B_0$，设 $(u_i(t),u_{i_t}(t))$ 是对应于时间符号 σ_i 且依赖于初值 (u_0^i,v_0^i) 的解，$i=1,2$，即 $(u_i(t),u_{i_t}(t))$ 是如下方程的解

$$\begin{cases}u_{tt}+a(x)\varphi(u_t)+\left(\beta-\alpha\|\nabla u\|^2\right)\Delta u+\Delta^2u+\mu u+g(u)=\sigma_i(x,t), & (34)\\ u|_{\partial\Omega}=\dfrac{\partial}{\partial v}u|_{\partial\Omega}=0, & (35)\\ (u(0),u_t(0))=(u_0^i,v_0^i). & (36)\end{cases}$$

为了方便起见，记 $h_i(t)=\sigma_i(x,t)$，$t\ge0$，$i=1,2$，$w(t)=u_1(t)-u_2(t)$，则 $w(t)$ 满足下面的方程组

$$\begin{cases}w_{tt}(t)+a(x)\left(\varphi(u_{1_t}(t))-\varphi(u_{2_t}(t))\right)+\Delta^2w(t)-\alpha\left(\|\nabla u_1(t)\|^2\Delta u_1(t)-\|\nabla u_2(t)\|^2\Delta u_2(t)\right)\\ +\mu w(t)+\beta\Delta w(t)+g(u_1(t))-g(u_2(t))=h_1(t)-h_2(t), & (37)\\ w|_{\partial\Omega}=\dfrac{\partial}{\partial v}w|_{\partial\Omega}=0, & (38)\\ (w(0),w_t(0))=(u_0^1,v_0^1)-(u_0^2,v_0^2). & (39)\end{cases}$$

首先，用 $w(t)$ 乘以(37)式，并对其在 $[0,T]\times\Omega$ 上积分，得

$$\begin{aligned}\int_0^T\|\Delta w(t)\|^2\mathrm{d}t=&\int_\Omega w(0)w_t(0)\mathrm{d}x-\int_\Omega w(T)w_t(T)\mathrm{d}x+\beta\int_0^T\|\nabla w(t)\|^2\mathrm{d}t+\int_0^T\|w_t(t)\|^2\mathrm{d}t-\mu\int_0^T\|w(t)\|^2\mathrm{d}t\\&-\int_0^T\int_\Omega a(x)\left(\varphi\left(u_{1_t}(t)\right)-\varphi\left(u_{2_t}(t)\right)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\left(g\left(u_1(t)\right)-g\left(u_2(t)\right)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\alpha\int_0^T\int_\Omega\left(\|\nabla u_1(t)\|^2\Delta u_1(t)-\|\nabla u_2(t)\|^2\Delta u_2(t)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega\left(h_1(t)-h_2(t)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{40}$$

在 $[0,T]$ 上对 $E_w(t)$ 关于 t 积分，再结合(40)式，有

$$\begin{aligned}\int_0^T E_w(t)\mathrm{d}t=&\frac{1}{2}\int_\Omega w(0)w_t(0)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega w(T)w_t(T)\mathrm{d}x+\frac{\beta}{2}\int_0^T\|\nabla w(t)\|^2\mathrm{d}t+\int_0^T\|w_t(t)\|^2\mathrm{d}t-\frac{\mu}{2}\int_0^T\|w(t)\|^2\mathrm{d}t\\&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega a(x)\left(\varphi\left(u_{1_t}(t)\right)-\varphi\left(u_{2_t}(t)\right)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\left(g\left(u_1(t)\right)-g\left(u_2(t)\right)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\frac{\alpha}{2}\int_0^T\int_\Omega\left(\|\nabla u_1(t)\|^2\Delta u_1(t)-\|\nabla u_2(t)\|^2\Delta u_2(t)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\left(h_1(t)-h_2(t)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{41}$$

其次，用 $w_t(t)$ 乘以(37)式，并对其在 $[s,T]\times\Omega$ $(0\le s\le T)$ 上积分，得

$$\begin{aligned}&E_w(T)+\frac{\mu}{2}\|w(T)\|^2+\int_s^T\int_\Omega a(x)\left(\varphi\left(u_{1_t}(t)\right)-\varphi\left(u_{2_t}(t)\right)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=E_w(s)+\frac{\mu}{2}\|w(s)\|^2+\frac{\beta}{2}\|\nabla w(T)\|^2-\frac{\beta}{2}\|\nabla w(s)\|^2-\int_s^T\int_\Omega\left(g\left(u_1(t)\right)-g\left(u_2(t)\right)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad+\alpha\int_s^T\int_\Omega\left(\|\nabla u_1(t)\|^2\Delta u_1(t)-\|\nabla u_2(t)\|^2\Delta u_2(t)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_s^T\int_\Omega\left(h_1(t)-h_2(t)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{42}$$

对(42)式在 $[0,T]$ 上关于 s 积分，可得

$$\begin{aligned}TE_w(T)\le&\int_0^T E_w(s)\mathrm{d}s+\frac{\mu}{2}\int_0^T\|w(s)\|^2\mathrm{d}s+\frac{T\beta}{2}\|\nabla w(T)\|^2-\frac{\beta}{2}\int_0^T\|\nabla w(s)\|^2\mathrm{d}s\\&+\alpha\int_0^T\int_s^T\int_\Omega\left(\|\nabla u_1(t)\|^2\Delta u_1(t)-\|\nabla u_2(t)\|^2\Delta u_2(t)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\&+\int_0^T\int_s^T\int_\Omega\left(h_1(t)-h_2(t)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s-\int_0^T\int_s^T\int_\Omega\left(g\left(u_1(t)\right)-g\left(u_2(t)\right)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{43}$$

进一步，取 $s=0$，则由(42)式可知

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega a(x)\left(\varphi\left(u_{1_t}(t)\right)-\varphi\left(u_{2_t}(t)\right)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=E_w(0)+\frac{\mu}{2}\|w(0)\|^2+\frac{\beta}{2}\|\nabla w(T)\|^2-\frac{\beta}{2}\|\nabla w(0)\|^2-\int_0^T\int_\Omega\left(g\left(u_1(t)\right)-g\left(u_2(t)\right)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad+\alpha\int_0^T\int_\Omega\left(\|\nabla u_1(t)\|^2\Delta u_1(t)-\|\nabla u_2(t)\|^2\Delta u_2(t)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega\left(h_1(t)-h_2(t)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{44}$$

进而结合(4)和引理 1 可得，

$$\begin{aligned}\int_0^T\|w_t(t)\|^2\mathrm{d}t\le&\,\delta T\mathrm{meas}(\Omega)+\frac{C_\delta}{\alpha_0}E_w(0)+\frac{\mu C_\delta}{2\alpha_0}\|w(0)\|^2+\frac{\beta C_\delta}{2\alpha_0}\|\nabla w(T)\|^2-\frac{\beta C_\delta}{2\alpha_0}\|\nabla w(0)\|^2\\&-\frac{C_\delta}{\alpha_0}\int_0^T\int_\Omega\left(g\left(u_1(t)\right)-g\left(u_2(t)\right)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{C_\delta}{\alpha_0}\int_0^T\int_\Omega\left(h_1(t)-h_2(t)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\frac{\alpha C_\delta}{\alpha_0}\int_0^T\int_\Omega\left(\|\nabla u_1(t)\|^2\Delta u_1(t)-\|\nabla u_2(t)\|^2\Delta u_2(t)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{45}$$

下面估计 $\int_0^T\int_\Omega a(x)\left(\varphi\left(u_{1_t}(t)\right)-\varphi\left(u_{2_t}(t)\right)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 。

先用方程(1)与 $u_{i_t}(t)$ 在空间 H 中作内积，然后结合一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)有界吸收集存在性的证明过程，

可知

$$\int_0^T \int_\Omega a(x)\varphi\left(u_{i_t}(t)\right)u_{i_t}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C_{\rho,T}, \tag{46}$$

其中 $C_{\rho,T}$ 是一个与空间 E_0 中一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)有界吸收集 B_0 的大小和 T 有关的常数。

类似于(26)的估计方法，运用 Hölder 不等式，结合(5)、(25)和(46)可得，当 $i=1,2$ 时有

$$\left|\int_0^T \int_\Omega a(x)\varphi\left(u_{i_t}(t)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \le 2CC_{\rho,T}\left(\int_0^T \int_\Omega a(x)\left|w(t)\right|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q+1}} + C\int_0^T \int_\Omega a(x)\left|w(t)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{47}$$

联立(41)、(45)、(47)、(43)，可以推出

$$E_w(T) \le \frac{C_T}{T} + \frac{1}{T}\phi_T\left(\left(u_0^1,v_0^1\right),\left(u_0^2,v_0^2\right);\sigma_1,\sigma_2\right) \tag{48}$$

其中

$$\begin{aligned} C_T &= \delta T\mathrm{meas}(\Omega) + \frac{C_\delta}{\alpha_0}E_w(0) + \frac{\beta C_\delta}{2\alpha_0}\left\|\nabla w(T)\right\|^2 - \frac{\beta C_\delta}{2\alpha_0}\left\|\nabla w(0)\right\|^2 \\ &\quad + \frac{\mu C_\delta}{2\alpha_0}\left\|w(0)\right\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega w(T)w_t(T)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega w(0)w_t(0)\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &\phi_T\left(\left(u_0^1,v_0^1\right),\left(u_0^2,v_0^2\right);\sigma_1,\sigma_2\right) \\ &= CC_{\rho,T}\left(\int_0^T \int_\Omega a(x)\left|w(t)\right|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q+1}} + C\int_0^T \int_\Omega a(x)\left|w(t)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{T\beta}{2}\left\|\nabla w(T)\right\|^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(h_1(t)-h_2(t)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T \int_s^T \int_\Omega \left(g\left(u_1(t)\right)-g\left(u_2(t)\right)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &+ \frac{C_\delta}{\alpha_0}\int_0^T \int_\Omega \left(h_1(t)-h_2(t)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \frac{C_\delta}{\alpha_0}\int_0^T \int_\Omega \left(g\left(u_1(t)\right)-g\left(u_2(t)\right)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &+ \int_0^T \int_s^T \int_\Omega \left(h_1(t)-h_2(t)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(g\left(u_1(t)\right)-g\left(u_2(t)\right)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &+ \alpha\int_0^T \int_s^T \int_\Omega \left(\left\|\nabla u_1(t)\right\|^2 \Delta u_1(t) - \left\|\nabla u_2(t)\right\|^2 \Delta u_2(t)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &+ \frac{\alpha}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(\left\|\nabla u_1(t)\right\|^2 \Delta u_1(t) - \left\|\nabla u_2(t)\right\|^2 \Delta u_2(t)\right)w(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &+ \frac{\alpha C_\delta}{\alpha_0}\int_0^T \int_\Omega \left(\left\|\nabla u_1(t)\right\|^2 \Delta u_1(t) - \left\|\nabla u_2(t)\right\|^2 \Delta u_2(t)\right)w_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{50}$$

4.2. 渐近紧性

定理 3 假设(W1)~(W4)成立，若 $h_0\in L^\infty\left(\mathbb{R};L^2(\Omega)\right)\cap W_b^{1,r}\left(\mathbb{R};L^r(\Omega)\right)\left(r>\dfrac{2n}{n+4}\right)$，且 Σ 是由(17)所定义的，则问题(1)~(3)对应的过程族 $\left\{U_\sigma(t,\tau)\right\}\left(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma\right)$ 在空间 E_0 中是一致(关于 $\sigma\in\Sigma$)渐近紧的。

证明 因为过程族 $\left\{U_\sigma(t,\tau)\right\}\left(t\ge\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma\right)$ 有一致有界吸收集，所以对任意固定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta\le\left(2\mathrm{meas}(\Omega)\right)^{-1}\varepsilon$，取 T 足够大，使得 $T^{-1}C_T\le\varepsilon$。因此，根据定理 A，下面只需证明对于每一个固定的 T，函数 $\phi_T(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)\in\mathrm{contr}\left(B_0,\Sigma\right)$。

根据定理 2 的证明过程可以推断出，对于每一个固定的 T，

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcup_{t\in[0,T]}U_\sigma(t,0)B_0\text{在}E_0\text{中是有界的} \tag{51}$$

并且界依赖于 T。

设 $\left(u_n,u_{n_t}\right)$ 是对应于时间符号 $\sigma_n\in\sum$ 且依赖于初值 $\left(u_0^n,v_0^n\right)\in B_0$ 的解，$n=1,2,\cdots$ 依据(51)，假设

$$u_n\text{在空间}L^\infty\left(\left[0,T\right];V_2\right)\text{中弱*收敛于}u\,, \tag{52}$$

$$u_{n_t}\text{在空间}L^\infty\left(\left[0,T\right];H\right)\text{中弱*收敛于}u_t\,, \tag{53}$$

$$u_n\text{在空间}L^2\left(\left[0,T\right];H\right)\text{中收敛于}u\,, \tag{54}$$

$$u_n\text{在空间}L^{q+1}\left(\left[0,T\right];L^{q+1}\right)\text{中收敛于}u\,, \tag{55}$$

$$u_n\left(T\right)\text{在空间}V_1\text{中强收敛于}u\left(T\right), \tag{56}$$

其中有紧嵌入 $H^2\Subset V_1$； $H^2\Subset L^{q+1}$， $q<\dfrac{n+4}{n-4}$ 。

下面计算(50)中每一项。首先，由命题 2 和(55)可知

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega\left(h_n\left(x,t\right)-h_m\left(x,t\right)\right)\left(u_n\left(t\right)-u_m\left(t\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0\,, \tag{57}$$

且根据命题 3 有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega\left(h_n\left(x,t\right)-h_m\left(x,t\right)\right)\left(u_{n_t}\left(t\right)-u_{m_t}\left(t\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0\,, \tag{58}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_s^T\int_\Omega\left(h_n\left(x,t\right)-h_m\left(x,t\right)\right)\left(u_{n_t}\left(t\right)-u_{m_t}\left(t\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s=0\,. \tag{59}$$

其次，结合(4)，(52)和(55)，有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left\|\nabla u_n\left(T\right)-\nabla u_m\left(T\right)\right\|^2=0\,, \tag{60}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega a\left(x\right)\left|u_n\left(t\right)-u_m\left(t\right)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0\,, \tag{61}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(\int_0^T\int_\Omega a\left(x\right)\left|u_n\left(t\right)-u_m\left(t\right)\right|^{q+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q+1}}=0\,. \tag{62}$$

因为 $\left\{\left(u_n,u_{n_t}\right)\right\}_{n=1}^\infty$ 在空间 $C\left(0,T;E_0\right)$ 中是有界的，且有紧嵌入 $H^2\Subset C\left(\bar{\Omega}\right)$，根据 Arzela 定理，$\left\{u_n\right\}_{n=1}^\infty$ 在空间 $C\left(0,T;C\left(\bar{\Omega}\right)\right)$ 中是紧的；另一方面，$\left\{u_n\right\}_{n=1}^\infty$ 在空间 $L^\infty\left(0,T;V_2\right)$ 中弱*收敛于 u，因此 $\left\{u_n\right\}_{n=1}^\infty$ 在空间 $C\left(0,T;C\left(\bar{\Omega}\right)\right)$ 中强收敛，于是有

$$\left|\int_0^T\int_\Omega\left(\left\|\nabla u_n\left(t\right)\right\|^2\Delta u_n\left(t\right)-\left\|\nabla u_m\left(t\right)\right\|^2\Delta u_m\left(t\right)\right)\left(u_n\left(t\right)-u_m\left(t\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\le C_{R,T}\left\|u_n\left(t\right)-u_m\left(t\right)\right\|_{C\left(0,T;C\left(\bar{\Omega}\right)\right)}. \tag{63}$$

由上式可知

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega\left(\left\|\nabla u_n\left(t\right)\right\|^2\Delta u_n\left(t\right)-\left\|\nabla u_m\left(t\right)\right\|^2\Delta u_m\left(t\right)\right)\left(u_n\left(t\right)-u_m\left(t\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{64}$$

最后，由于解的光滑性，则有

$$\int_\Omega\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|^2\Delta u\left(t\right)u_t\left(t\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|^4. \tag{65}$$

根据上式，可以计算出

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega\left(\left\|\nabla u_n\left(t\right)\right\|^2\Delta u_n\left(t\right)-\left\|\nabla u_m\left(t\right)\right\|^2\Delta u_m\left(t\right)\right)\left(u_{n_t}\left(t\right)-u_{m_t}\left(t\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=-\int_0^T\int_\Omega\left\|\nabla u_n\left(t\right)\right\|^2\Delta u_n\left(t\right)u_{m_t}\left(t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\left\|\nabla u_m\left(t\right)\right\|^2\Delta u_m\left(t\right)u_{n_t}\left(t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad+\frac{1}{4}\left(\left\|\nabla u_n\left(0\right)\right\|^4-\left\|\nabla u_n\left(T\right)\right\|^4+\left\|\nabla u_m\left(0\right)\right\|^4-\left\|\nabla u_m\left(T\right)\right\|^4\right).\end{aligned} \tag{66}$$

结合(52)~(53)及(56)，先让$m\to\infty$，再让$n\to\infty$，可以推出

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega\left(\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2\Delta u_n(t)-\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2\Delta u_m(t)\right)\left(u_{n_t}(t)-u_{m_t}(t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left(\left\|\nabla u(0)\right\|^4-\left\|\nabla u(T)\right\|^4\right)-2\int_0^T\int_\Omega\left\|\nabla u(t)\right\|^2\Delta u(t)u_t(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.\end{aligned}\tag{67}$$

类似地，可以得到

$$\begin{aligned}&\int_s^T\int_\Omega\left(\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2\Delta u_n(t)-\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2\Delta u_m(t)\right)\left(u_{n_t}(t)-u_{m_t}(t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=-\int_s^T\int_\Omega\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2\Delta u_n(t)u_{m_t}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_s^T\int_\Omega\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2\Delta u_m(t)u_{n_t}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad+\frac{1}{4}\left(\left\|\nabla u_n(s)\right\|^4-\left\|\nabla u_n(T)\right\|^4+\left\|\nabla u_m(s)\right\|^4-\left\|\nabla u_m(T)\right\|^4\right).\end{aligned}\tag{68}$$

同时，对于每个固定的T，$\left|\int_s^T\int_\Omega\left(\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2\Delta u_n(t)-\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2\Delta u_m(t)\right)\left(u_{n_t}(t)-u_{m_t}(t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|$是有界的，于是结合 Lebesgue 控制收敛定理，可以计算出

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_s^T\int_\Omega\left(\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2\Delta u_n(t)-\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2\Delta u_m(t)\right)\left(u_{n_t}(t)-u_{m_t}(t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\&=\int_0^T\left(\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_s^T\int_\Omega\left(\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2\Delta u_n(t)-\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2\Delta u_m(t)\right)\left(u_{n_t}(t)-u_{m_t}(t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\\&=\int_0^T0\mathrm{d}s=0.\end{aligned}\tag{69}$$

由(54)可知

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega\left(g\left(u_n(t)\right)-g\left(u_m(t)\right)\right)\left(u_n(t)-u_m(t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.\tag{70}$$

结合文献[12]中的引理 4.4，类似地，可以推出

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega\left(g\left(u_n(t)\right)-g\left(u_m(t)\right)\right)\left(u_{n_t}(t)-u_{m_t}(t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,\tag{71}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_s^T\int_\Omega\left(g\left(u_n(t)\right)-g\left(u_m(t)\right)\right)\left(u_{n_t}(t)-u_{m_t}(t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s=0.\tag{72}$$

因此，结合(57)~(72)，有$\phi_T(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)\in\mathrm{contr}\left(B_0,\Sigma\right)$。

4.3. 一致(关于$\sigma\in\Sigma$)吸引子的存在性

由定理 2 和定理 3 可以得到一致(关于$\sigma\in\Sigma$)吸引子的存在性，结果如下

定理 4 假设(W1)~(W4)成立，若$h_0\in L^\infty\left(\mathbb{R};L^2(\Omega)\right)\cap W_b^{1,r}\left(\mathbb{R};L^r(\Omega)\right)\left(r>\frac{2n}{n+4}\right)$，且$\Sigma$是由(17)所定义的，则问题(1)~(3)对应的过程族$\left\{U_\sigma(t,\tau)\right\}\left(t\geq\tau,\tau\in\mathbb{R},\sigma\in\Sigma\right)$在空间$E_0$中有紧的一致(关于$\sigma\in\Sigma$)吸引子。

基金项目

国家自然科学基金项目(11561064)；甘肃省自然科学基金项目(17JR5RA069)；甘肃省高等学校科研项目(2017B-90)；西北师范大学青年教师科研能力提升计划(NWNU-LKQN-16-16；NWNU-LKQN-18-14)。

参考文献

[1] Berger, M. (1955) A New Approach to the Large Deflection of Plate. *Journal of Applied Mechanics*, **22**, 465-472. https://doi.org/10.1115/1.4011138

[2] Dmitrieva, Z.N. (1978) On the Theory of Nonlinear Oscillations of Thin Rectangular Plate. *Journal of Soviet Mathe-*

matics, **22**, 48-51.

[3] Khanmamedov, A. (2005) Existence of a Global Attractor for the Plate Equation with a Critical Exponent in an Unbounded Domain. *Applied Mathematics Letters*, **18**, 827-832. https://doi.org/10.1016/j.aml.2004.08.013

[4] Khanmamedov, A. (2006) Global Attractors for the Plate Equation with a Localized Damping and a Critical Exponent in an Unbounded Domain. *Journal of Differential Equations*, **225**, 528-548. https://doi.org/10.1016/j.jde.2005.12.001

[5] Yang, L. (2008) Uniform Attractor for Non-Autonomous Plate Equation with a Localized Damping and a Critical Nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **338**, 1243-1254. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.06.011

[6] Yang, L. and Zhong, C.-K. (2008) Global Attractor for Plate Equation with Nonlinear Damping. *Nonlinear Analysis*, **69**, 3802-3810. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.10.016

[7] Yang, L. and Wang, X. (2017) Existence of Attractors for the Non-Autonomous Berger Equation with Nonlinear Damping. *Electronic Journal of Differential Equations*, **278**, 1-14.

[8] Chepyzhov, V.V. and Vishik, M.I. (2002) Attractors for Equations of Mathematical Physics. American Mathematical Society, Rhode Island, 35-37. https://doi.org/10.1090/coll/049

[9] Sun, C., Cao, D. and Duan, J.-Q. (2007) Uniform Attractors for Non-Autonomous Wave Equations with Nonlinear Damping. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **6**, 293-318. https://doi.org/10.1137/060663805

[10] Khanmamedov, A. (2006) Global Attractors for von Karman Equations with Nonlinear Interior Dissipation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **318**, 92-101. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.05.031

[11] Robinson, J.C. (2001) Infinite-Dimensional Dynamical Systems, An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors. Cambridge University Press, Cambridge.

[12] Chueshov, I. and Lasiecka, I. (2007) Long-Time Dynamics of Wave Equation with Nonlinear Interior/Boundary Damping and Sources of Critical Exponents. *AMS Contemporary Mathematics*, **426**, 153-192. https://doi.org/10.1090/conm/426/08188