Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(9), 1009-1014
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.99127

Hans汉斯

The Jacobson Algebras and Boolean Algebras in Normal Classes of Pointwise Complete Algebra

Zongwen Yang, Qinghai He

Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: zwyang@ynu.edu.cn, heqh@ynu.edu.cn

Received: Oct. 18th, 2019; accepted: Nov. 4th, 2019; published: Nov. 11th, 2019

Abstract

Periodic algebras, Jacobson algebras and Boolean algebras in normal classes of pointwise complete algebras are defined. Some properties of periodic algebras, Jacobson algebras and Boolean algebras are discussed. It is proved that both Jacobson algebra class κ and Boolean algebra class β are hereditary radicals, but they are not super nilpotent radicals, so they are not special radicals. It is also proved that regular radical is hereditary radical, but not super nilpotent radical, so it's not a special radical.

Keywords

Normal Classes of Complete Pointwise Algebras, Periodic Algebra, Jacobson Algebras, κ-Radical, Boolean Algebras, β-Radical, Regular Radical

点态化完备代数正规类中的Jacobson代数和Boolean代数

杨宗文，何青海

云南大学，数学系，云南 昆明
Email: zwyang@ynu.edu.cn, heqh@ynu.edu.cn

收稿日期：2019年10月18日；录用日期：2019年11月4日；发布日期：2019年11月11日

摘　要

定义了点态化完备代数正规类中的周期代数、Jacobson代数与Boolean代数，讨论了周期代数、Jacobson

文章引用：杨宗文，何青海．点态化完备代数正规类中的 Jacobson 代数和 Boolean 代数[J]．理论数学，2019，9(9)：1009-1014. DOI: 10.12677/pm.2019.99127

代数与Boolean代数的一些性质，证明了Jacobson代数类κ与Boolean代数类β都是遗传根类，但都不是超幂零根，从而都不是特殊根，并证明了正则根是遗传根，但不是超幂零根，从而不是特殊根。

关键词

点态化完备代数正规类，周期代数，Jacobson代数，κ-根，Boolean代数，β-根，正则根

1. 引言

环及其它代数系统根理论的统一研究促使一般代数正规类根理论的建立[1]-[15]，为了进一步统一的研究一般代数正规类中根性质，文献[16]-[23]分别引入了可积代数正规类、完备代数正规类，对特殊根等进行了研究，并对一类特殊的半环——大半环(可做单侧减法的半环)建立了相应的根理论；文献[24] [25] [26]对完备代数正规类进行了点态化，研究了点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类确定的上根——反单根、遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根、诣零根、λ-根、正则根的结构性质。

本文在文献[24] [25] [26]建立的点态化完备代数正规类基础上，定义了点态化完备代数正规类中的周期代数、Jacobson 代数与 Boolean 代数，讨论了周期代数、Jacobson 代数与 Boolean 代数的一些性质，并证明了 Jacobson 代数类 κ 与 Boolean 代数类 β 都是遗传根类、左遗传根、右遗传根及强遗传根，但都不是超幂 0 根，从而都不是特殊根，并证明了正则根是遗传根，但不是超幂 0 根，从而不是特殊根。

2. 预备知识及基本引理

点态化完备代数正规类的相关概念及性质参见文献[24] [25] [26]。

定义 2.1 [12]：$\mathscr{A}$ 是一个代数类，$\mathrm{R}\subseteq\mathscr{A}$，如果 R 满足：

a) $\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，如果 $a\in\mathrm{R}$，则 $a/i\in\mathrm{R}$ (即 R 商闭)；

b) $\forall a\in\mathscr{A}$，a 有一个最大的 R-理想(记为 R(a))，称 a 的 R-根；

c) $\forall a\in\mathscr{A}$，有 $\mathrm{R}\left(a/\mathrm{R}(a)\right)=0$。

则称 R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类，简称根。

定义 2.2 [16] [21]：$\forall\mathrm{K}\subseteq\mathscr{A}$，称 K 是一个特殊类，如果 K 满足以下 3 条：

1) $\forall a\in\mathrm{K}$，a 是一个素代数；

2) $\forall a\in\mathrm{K}$，$i\lhd a$，则 $i\in\mathrm{K}$；

3) $\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，$i\in\mathrm{K}$，则 $a/i^*\in\mathrm{K}$，其中 i^*是 a 的使得 $ki=ik=0$ 的最大理想(称 i 的 0 化子)。

定义 2.3 [16] [21]：设 R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类。如果存在一个特殊类 K，使得 $\mathrm{R}=\mathrm{UK}$，则称 R 是一个特殊根类。

定义 2.4 [16] [21]：$\forall\mathrm{K}\subseteq\mathscr{A}$，称 K 是一个弱特殊类，如果 K 满足以下 3 条：

1) $\forall a\in\mathrm{K}$，a 中无非 0 幂零理想；

2) $\forall a\in\mathrm{K}$，$i\lhd a$，则 $i\in\mathrm{K}$；

3) $\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，$i\in\mathrm{K}$，$i^*=0$，则 $a\in\mathrm{K}$。

定义 2.5 [16] [21]：设 R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类。如果 $\forall a\in\mathrm{R}$，$i\lhd a$，都有 $i\in\mathrm{R}$，则称 R 是遗传根。

定义 2.6：设 R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类。

1) 如果 $\forall a \in R$，$i \lhd_l a$ ($i \lhd_r a$)，都有 $i \in R$，则称 R 是左(右)遗传根；

2) 如果 $\forall a \in R$，$s \le a$，都有 $s \in R$，则称 R 是强遗传根。

注 1：由定义 2.6 知强遗传根分别是左、右遗传根，左、右遗传根都是遗传根。

定义 2.7 [16] [21]：设 S 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类。如果 S 满足以下 2 条，则称根类 S 是一个超幂零根：

1) S 是遗传根；

2) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 a 是幂零代数，则 $a \in S$。

根类的判别经常可用以下 2 组条件。

引理 2.1 [26]：$\mathscr{A}$ 是一个代数类，$R \subseteq \mathscr{A}$，R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类 $\Leftrightarrow$ R 满足以下 3 个条件：

a) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果 $a \in R$，则 $a/i \in R$ (即 R 商闭)；

b) $\forall a \in \mathscr{A}$，$a$ 有一个最大的 R-理想(记为 R(a))；

$\overline{\text{c}}$) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果 $i, a/i \in R$，则有 $a \in R$ (称 R 扩张闭)。

引理 2.2 [26]：$\mathscr{A}$ 是一个代数类，$R \subseteq \mathscr{A}$，R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类 $\Leftrightarrow$ R 满足以下 3 个条件：

a) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果 $a \in R$，则 $a/i \in R$ (即 R 商闭)；

$\overline{\text{b}}$) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 $i_1 \lhd i_2 \lhd \cdots \lhd i_\mu \lhd \cdots$ 是 a 的 R-理想升链(即 $i_\mu \lhd a$，$\forall \mu, i_\mu \in R$)，则理想 $\vee i_\mu \in R$ (称 R 有归纳性质)；

$\overline{\text{c}}$) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果 $i, a/i \in R$，则有 $a \in R$ (称 R 扩张闭)。

引理 2.3 [26]：设 $a \in \mathscr{A}$，$x, y \in S_a$。

1) $xy \in \phi_a\left(\langle x\rangle\langle y\rangle\right)$，从而 $\forall s \le a, x, y \in \phi_a(s)$，有 $xy \in \phi_a(s)$；

2) n 是正整数，则 $x^n \in \phi_a\left(\langle x\rangle^n\right)$，$\left\langle x^n\right\rangle = \langle x\rangle^n$；

3) x 是幂零元当且仅当存在正整数 n，使得 $x^n = 0$。

引理 2.4 [16] [21]：S 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类。则：S 是一个超幂 0 根 $\Leftrightarrow$ $S = UK$，其中 K 是一个弱特殊类，即 S 是由一个弱特殊类确定的上根。

3. 点态化完备代数正规类中的 κ-根与 β-根

$\mathscr{A}$ 是一个点态化完备代数正规类。

定义 3.1 [21]：$a \in \mathscr{A}$。

1) 如果 $\forall x \in S_a$，存在正整数 $n > m$ (n，m 都与 x 有关)，使得 $\left\langle x^n\right\rangle = \left\langle x^m\right\rangle$，则称 a 是周期代数；

2) 如果 $\forall x \in S_a$，存在正整数 $n > 1$ (n 与 x 有关)，使得 $\left\langle x^n\right\rangle = \langle x\rangle$，则称 a 是 Jacobson 代数；

3) $x \in S_a$，如果有 $\left\langle x^2\right\rangle = \langle x\rangle$，则称 x 是一个幂等元；

4) 如果 $\forall x \in S_a$，有 $\left\langle x^2\right\rangle = \langle x\rangle$，则称 a 是 Boolean 代数；

5) 如果有 $e \in S_a, \forall x \in S_a$，都有 $ex = xe = x$，则称 e 是交换代数 a 的单位元，e 通常记为 1。

定理 3.1：设 $a \in \mathscr{A}$。

1) a 是 Boolean 代数，则 a 是 Jacobson 代数；

2) a 是 Jacobson 代数，则 a 是不含非 0 幂零元素的周期代数；

3) a 是 Jacobson 代数，如果 a 有单位元 1，则 a 是正则代数及 λ-代数。

证明：1) 显然。

2) a 是 Jacobson 代数，则显然 a 是周期代数。设 $x \in S_a$ 是 a 的幂零元素，则存在的 $k > 0$，使得 $\left\langle x^k\right\rangle = 0$。又因为 a 是 Jacobson 代数，故存在正整数 $n > 1$，使得 $\left\langle x^n\right\rangle = \langle x\rangle$，设 n, k 是分别满足条件的最小正整数。

如果 $n = k$，则 $\left\langle x^n\right\rangle = \left\langle x^k\right\rangle = 0 = \langle x\rangle$，所以 $x = 0$；

如果 $n>k$，则 $\langle x^n\rangle=\langle x^{k+(n-k)}\rangle=\langle x^k\rangle\langle x^{(n-k)}\rangle=0\langle x^{(n-k)}\rangle=0=\langle x\rangle$，所以 $x=0$；

如果 $n<k$。当 $n-1\nmid k-1$ 时，则有 $k-1=l(n-1)+r,0\le r<n-1$，$\langle x^k\rangle=\langle x^{1+l(n-1)+r}\rangle=\langle x^{1+r}\rangle=0$，即存在 $1+r<1+(n-1)=n<k$，使得 $\langle x^{1+r}\rangle=0$，与 k 的最小性矛盾，即有 $n-1\mid k-1$。设 $k-1=l(n-1),l>1$，则 $\langle x^k\rangle=\langle x^{1+l(n-1)}\rangle=\langle x\rangle=0$，所以 $x=0$。

综上所述有 $x=0$，即 a 是不含非 0 幂零元素的周期代数。

3) 如果 a 有单位元 1，则 $\forall x\in S_a$，$x=x\cdot 1\cdot x=1\cdot x\cdot 1$，所以 $x\le\phi_a(\langle x\rangle\langle 1\rangle\langle x\rangle)\subseteq\phi_a(\langle x\rangle A\langle x\rangle)$，$x\in\phi_a(\langle 1\rangle\langle x\rangle\langle 1\rangle)\subseteq\phi_a(A\langle x\rangle A)$，故 $\langle x\rangle\le\langle x\rangle A\langle x\rangle$，$\langle x\rangle\le A\langle x\rangle A$，即 a 是正则代数及 λ-代数。证毕。

由周期代数、Jacobson 代数、Boolean 代数的定义，即有定理 3.2、定理 3.3：

定理 3.2： 设 $a\in\mathscr{A}$，$i\lhd_l a$（$i\lhd_r a$ 或 $i\lhd a$）。则：

1) 如果 a 是周期代数，则 i 是周期代数；

2) 如果 a 是 Jacobson 代数，则 i 是 Jacobson 代数；

3) 如果 a 是 Boolean 代数，则 i 是 Boolean 代数。

定理 3.3： 设 $a\in\mathscr{A}$，$s\le a$。则：

1) 如果 a 是周期代数，则 s 是周期代数；

2) 如果 a 是 Jacobson 代数，则 s 是 Jacobson 代数；

3) 如果 a 是 Boolean 代数，则 s 是 Boolean 代数。

记所有 Jacobson 代数的类为 κ，记所有 Boolean 代数的类为 β。

定理 3.4： Jacobson 代数类 κ 是一个根类。

证明： 1) 设 $a\in\kappa$，$i\lhd a$，$\forall x\in S_{a/i}$，对满射 $\gamma_i:S_\alpha\to S_{\alpha/i}$，存在 $y\in S_a$，$x=\gamma_i(y)$。由 $a\in\kappa$，存在正整数 $n>1$，使得 $\langle y^n\rangle=\langle y\rangle$，所以 $\langle x^n\rangle=\langle(\gamma_i(y))^n\rangle=\langle\gamma_i(y^n)\rangle=\langle\gamma_i(y)\rangle=\langle x\rangle$，从而 a/i 是 Jacobson 代数，代数类 κ 对商闭。

2) $\forall a\in\mathscr{A}$，如果 $i_1\lhd i_2\lhd\cdots\lhd i_\mu\lhd\cdots$ 是 a 的 λ-理想升链，$\forall x\in\phi_a(\vee i_\mu)=\cup\phi_a(i_\mu)$，故存在 μ，使得 $x\in\phi_a(i_\mu)$，因此存在正整数 $n>1$，使得 $\langle x^n\rangle=\langle x\rangle$，即 $\vee i_\mu$ 是 Jacobson 代数，代数类 κ 有归纳性质。

3) $\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，如果 $i,a/i\in\kappa$。$\forall x\in S_a$，$y=\gamma_i(x)\in a/i$，存在正整数 $n>1$，使得 $\langle y^n\rangle=\langle y\rangle$，即 $\langle y\rangle=(\langle x\rangle\vee i)/i=\langle y^n\rangle=(\langle x^n\rangle\vee i)/i$，故而 $\langle x\rangle\vee i=\langle x^n\rangle\vee i$，因此 $\langle x\rangle\le\langle x^n\rangle\vee i$，所以有 $x_1\in\langle x^n\rangle,x_2\in i$，使得 $\langle x\rangle\le\langle x_1\rangle\vee\langle x_2\rangle$，$\langle x_2\rangle\le\langle x\rangle\vee\langle x_1\rangle$。由于 $x_1\in\langle x^n\rangle\le\langle x\rangle$，所以 $\langle x_1\rangle\le\langle x\rangle$，故 $\langle x_2\rangle\le\langle x\rangle\vee\langle x\rangle=\langle x\rangle$。又因为 $i\in\kappa$，$x_2\in\phi_a(i)$，所以存在正整数 $m>1$，使得 $\langle x_2^m\rangle=\langle x_2\rangle$，故 $\langle x^m\rangle=\langle x\rangle^m=\langle x_2\rangle^m=\langle x_2^m\rangle=\langle x_2\rangle=\langle x\rangle$，即 $a\in\kappa$，代数类 κ 扩张闭。

根据引理 2.2，代数类 κ 是一个根类。证毕。

Jacobson 代数类 κ 确定的根类 κ 称 κ-根。

定理 3.5： Boolean 代数类 β 是一个根类。

证明： 1) 设 $a\in\beta$，$i\lhd a$，$\forall x\in S_{a/i}$，对满射 $\gamma_i:S_\alpha\to S_{\alpha/i}$，存在 $y\in S_a$，$x=\gamma_i(y)$。由 $a\in\beta$，则 $\langle y^2\rangle=\langle y\rangle$，所以 $\langle x^2\rangle=\langle(\gamma_i(y))^2\rangle=\langle\gamma_i(y^2)\rangle=\langle\gamma_i(y)\rangle=\langle x\rangle$，从而 a/i 是 Boolean 代数，代数类 β 对商闭。

2) $\forall a\in\mathscr{A}$，如果 $i_1\lhd i_2\lhd\cdots\lhd i_\mu\lhd\cdots$ 是 a 的 λ-理想升链，$\forall x\in\phi_a(\vee i_\mu)=\cup\phi_a(i_\mu)$，故存在 μ，使得 $x\in\phi_a(i_\mu)$，因此有 $\langle x^2\rangle=\langle x\rangle$，即 $\vee i_\mu$ 是 Boolean 代数，代数类 β 有归纳性质。

3) $\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，如果 $i,a/i\in\kappa$。$\forall x\in S_a$，$y=\gamma_i(x)\in a/i$，则 $\langle y^2\rangle=\langle y\rangle$，即 $\langle y\rangle=(\langle x\rangle\vee i)/i=\langle y^2\rangle=(\langle x^2\rangle\vee i)/i$，故而 $\langle x\rangle\vee i=\langle x^2\rangle\vee i$，因此 $\langle x\rangle\le\langle x^2\rangle\vee i$，所以有 $x_1\in\langle x^2\rangle,x_2\in i$，使得 $\langle x\rangle\le\langle x_1\rangle\vee\langle x_2\rangle$，$\langle x_2\rangle\le\langle x\rangle\vee\langle x_1\rangle$。由于 $x_1\in\langle x^2\rangle\le\langle x\rangle$，所以 $\langle x_1\rangle\le\langle x\rangle$，故 $\langle x_2\rangle\le\langle x\rangle\vee\langle x\rangle=\langle x\rangle$。又因为 $i\in\beta$，$x_2\in\phi_a(i)$，所以 $\langle x_2^2\rangle=\langle x_2\rangle$，故 $\langle x^2\rangle=\langle x\rangle^2=\langle x_2\rangle^2=\langle x_2^2\rangle=\langle x_2\rangle=\langle x\rangle$，即 $a\in\beta$，代数类 β 扩张闭。

根据引理 2.2，代数类 β 是一个根类。证毕。

Jacobson 代数类 β 确定的根类 β 称 β-根。

定理 3.6： κ-根与 β-根都是左遗传根、右遗传根及强遗传根。

证明： 由定理 3.3 知 Jacobson 代数、Boolean 代数都对子代数封闭即得 κ-根与 β-根都是强遗传根，从而都是左、右遗传根。证毕。

定理 3.7： κ-根与 β-根都是遗传根，但都不是超幂零根，从而都不是特殊根。

证明： 由定理 3.6 知 Jacobson 代数类 κ，Boolean 代数类 β 都是遗传根。由定理 3.1 知 Jacobson 代数、Boolean 代数都不含非 0 幂零元素，从而 Jacobson 代数类 κ，Boolean 代数类 β 中都不含非 0 幂零代数，故 κ-根与 β-根都是遗传根，但都不是超幂零根，从而都不是特殊根。证毕。

定理 3.8： 设 $a \in \mathscr{A}$，a 是正则代数，$i \lhd a$，则 i 是正则代数，即正则代数对理想封闭，从而正则根是遗传根，但正则根不是超幂零根，从而不是特殊根。

证明： $\forall x \in \phi_a(i) \subseteq S_a$，于是 $\langle x \rangle \le \langle x \rangle a \langle x \rangle$，所以存在 $y \in S_a$，使得 $\langle x \rangle \le \langle x \rangle \langle y \rangle \langle x \rangle \le \langle x \rangle \langle y \rangle (\langle x \rangle \langle y \rangle \langle x \rangle) = \langle x \rangle (\langle y \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle) \langle x \rangle$。因为 $\langle y \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle \le \langle y \rangle (x) \langle y \rangle \le (x) \le i$，所以 $\langle x \rangle \le \langle x \rangle i \langle x \rangle$，即 x 是正则元素，从而 i 是正则代数。

取 a 是非 0 零乘代数，即 $a^2 = 0$，$0 \ne x \in S_a$，则 $\langle x \rangle a \langle x \rangle \le a^3 = 0$，故 $\langle x \rangle a \langle x \rangle = 0$，$\langle x \rangle \not\le \langle x \rangle a \langle x \rangle$，从而 x 不是正则元，即 a 不是正则代数，所以正则根不是超幂零根，从而不是特殊根。证毕。

4. 小结

本文定义了点态化完备代数正规类中的周期代数、Jacobson 代数与 Boolean 代数，讨论了周期代数、Jacobson 代数与 Boolean 代数的一些性质，证明了 Jacobson 代数类 κ 与 Boolean 代数类 β 都是遗传根类、左遗传根、右遗传根及强遗传根，但都不是超幂零根，从而都不是特殊根，并证明了正则根是遗传根，但不是超幂零根，从而不是特殊根。

基金项目

国家自然科学基金(11261067)。

参考文献

[1] Száse, F.A. (1981) Radicals of Rings. John Wiley &Sons, New York.

[2] Gardner, B.J. and Wiegandt, R. (2004) Radical Theory of Rings. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel. http://ecite.utas.edu.au/27037 https://doi.org/10.1201/9780203913352

[3] Beidar, K.I., Fong, Y. and Ke, W.-F. (1998) On Complemented Radicals. *Journal of Algebra*, **201**, 328-356. https://doi.org/10.1006/jabr.1997.7254

[4] Tumurbat, S. and Zand, H. (2001) Hereditariness, Strongness and Relationship between Brown-McCoy and Behrens Radicals. *Contributions to Algebra and Geometry*, **42**, 275-280.

[5] 蔡传仁. 对偶根和 F A SZASZ 的问题 21[J]. 数学学报: 中文版, 1989, 32(3): 394-400.

[6] 蔡传仁. 半遗传根的一个特征性质[J]. 数学研究与评论, 1991, 11(1): 9-12.

[7] 谢邦杰. 关于周期环与 Jacobson 环的几个定理[J]. 数学研究与评论, 1982, 2(2): 11-13.

[8] 于宪君. 关于 $F_{A,\delta}$-环与广义周期环的几个定理[J]. 数学研究与评论, 1988, 8(3): 341-345.

[9] 胡小美. 几类与 Jacbson 根相关环的研究[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 杭州师范大学, 2017.

[10] 于宪君, 朱捷. 关于周期环的几个定理[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2004, 21(3): 20-22.

[11] 杜现昆, 齐毅. 周期环的刻划[J]. 吉林大学自然科学学报, 2001, 39(3): 29-31.

[12] Puczylowski, E.R. (1993) On General Theory of Radicals. *Algebra Universalis*, **39**, 53-60.

https://doi.org/10.1007/BF01196549

[13] Wang, Y. and Zhang, A.H. (2002) Radicals and Semisimple Classes of the Class of Algebras. *Journal of Anshan Normal University*, **4**, 5-10.

[14] 任艳丽，王尧. 代数正规类中的遗传根与强半单根[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(4): 597-602.

[15] Yang, Z.W. (2006) The Upper Radical Classes of the Class of Algebras. *Journal of Yunnan University* (*Natural Sciences Edition*), **28**, 8-11.

[16] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2008) The Supernilpotent Radical, Special Radical and Bear Radical in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **32**, 181-192.

[17] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2010) The Radicals and Like Modules in Normal Classes of Complete Alagebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 377-386.

[18] 杨宗文，杨柱元. 完备代数正规类的根与右理想[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2006, 31(3):112-116+120.

[19] 杨宗文，杨柱元. 子环的和与积[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 335-338.

[20] 杨宗文，杨柱元，李友宝. 大半环子半环的和与积[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2007, 32(6): 113-118.

[21] 杨宗文，杨柱元，李友宝. 可积代数正规类中半素代数类及半素一致代数类确定的上根[J]. 数学理论与应用, 2008, 28(4): 71-75.

[22] Yang, Z.W., Yang, Z.Y. and Li, Y.B. (2010)The General Radicals Theory of the Big Semirings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 1149-1167.

[23] Yang, Z.W. and Yang, Z.Y. (2011) The Semihereditary and Semisupernilpotent Radicals in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **35**, 891-902.

[24] 杨宗文，何青海. 点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 546-554.

[25] 杨宗文，何青海. 点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根及诣零根[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 712-722.

[26] 杨宗文，何青海. 点态化完备代数正规类中的 λ-根和正则根[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 836-842.