Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 393-402
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93052

Hans汉斯

Fixed Point Theorems for a Generalized Meir-Keeler-Rational Contraction in Partial ν-Generalized Metric Spaces

Xiaohui Wang, Peisheng Ji, Fangyuan Dong

School of Mathematics and statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: 1578136259@qq.com

Received: Apr. 26th, 2019; accepted: May 6th, 2019; published: May 22nd, 2019

Abstract

In this paper, we consider the fixed points of generalized Meir-Keeler-Rational contractions in the context of partial ν-generalized metric spaces. Our results generalize several known ones in literature.

Keywords

Meir-Keeler-Rational Contraction, Partial ν-Generalized Metric Space, Fixed Points

偏ν-度量空间中有关Meir-Keeler-Rational型映射的不动点理论

王小卉，纪培胜，董芳远

青岛大学，数学与统计学院，山东 青岛
Email: 1578136259@qq.com

收稿日期：2019年4月26日；录用日期：2019年5月6日；发布日期：2019年5月22日

摘　要

本文主要介绍了偏ν-度量空间中有关Meir-Keeler-Rational型映射的不动点定理，我们的结果推广了以往论文中的一些结论。

关键词

Meir-Keeler-Rational型映射，偏ν-度量空间，不动点

文章引用: 王小卉, 纪培胜, 董芳远. 偏 ν-度量空间中有关 Meir-Keeler-Rational 型映射的不动点理论[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 393-402. DOI: 10.12677/pm.2019.93052

1. 引言

Banach [1]引入的 Banach 收缩原理是数学分析中最重要的结果之一，它是数学许多分支中应用最广泛的不动点理论，并在许多不同的方向上被进行了推广。其中一方面推广涉及度量空间的各种推广，且在新的框架中得到不动点的结果，例如，在 b-度量空间、广义度量空间和偏序度量空间中发表了一些关于这个主题的论文。2014 年，Shukla [2]推广了 b-度量空间和偏序度量空间，定义了偏 b-度量空间的概念。Mitrovic 和 Radenovic [3]推广了 ν-度量空间[4]，引入了 $b_\nu(s)$-度量空间的概念。Abdullahi 和 Kumam [5]推广了偏序度量空间和 $b_\nu(s)$-度量空间，定义了偏 $b_\nu(s)$-度量空间，且在其中建立了不动点理论。他们在论文中提出了一些开放型问题：是否可以类似的在推广的 ν-度量空间，$b_\nu(s)$-度量空间，偏 $b_\nu(s)$-度量空间中证明 Chatterjee 型压缩、Hardy-Roger 型压缩、Ciric 型压缩和 Suzuki 型压缩的不动点问题。

另一方面是对压缩条件进行推广。Meir-Keeler [6]采用了一种不同的方法来概括受到广泛关注的 Banach 收缩原理。准确地说，他们取得了以下令人印象深刻的结果。

定理 1.1：[6]假设映射 A 是完备度量空间 (X,d) 上的一个自映射，且满足下述条件：对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对于任意的 $x,y\in X$，有

$$\varepsilon\le d(x,y)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(Ax,Ay)<\varepsilon$$

这个结果随后被推广到很多方面。例如 Jachymski [7]提出了一些等同于 Meir-Keeler 类型条件的条件，并建立了一个完善的不动点理论，该理论将 Meir-Keeler 的理论广泛化。

定理 1.2：[7]假设映射 A 是完备度量空间 (X,d) 上的一个自映射，且满足下述条件：

1) 对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对于任意的 $x,y\in X$，有

$$\varepsilon<m(x,y)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(Ax,Ay)\le\varepsilon$$

其中

$$m(x,y)=\max\left\{d(x,y),d(x,Ax),d(y,Ay),\left[d(x,Ay)+d(y,Ax)\right]/2\right\};$$

2) 对任意的 $x,y\in X$，且 $m(x,y)>0$，

$$d(Ax,Ay)<m(x,y)$$

若 A 是连续的则 A 有唯一的不动点。

本文中我们将在偏 ν-度量空间中建立推广的 Meir-Keeler 型映射的不动点理论，并且给出这一理论的一些直接的结果。

2. 预备知识

从现在开始，我们用 N,R,R^+,R_+ 分别代表正整数，实数，正实数，非负实数。下面我们回顾一下偏 $b_\nu(s)$-度量空间的定义。

定义 2.1：[5]令 X 是非空集合，映射 $d:X\times X\to[0,\infty)$，$\nu\in N$，若对于任意的 $x,y\in X$，存在互不相同的元素 $u_1,u_2,\cdots,u_\nu\in X$，且它们与 x 和 y 是互异的，有下列条件成立：

1) $x=y$ 当且仅当 $d(x,y)=d(x,x)=d(y,y)$；

2) $d(x,x)\le d(x,y)$；

3) $d(x,y)=d(y,x)$；

4) 存在 $s\in R$ 且 $s\ge 1$，有 $d(x,y)\le s\left[d(x,u_1)+d(u_1,u_2)+\cdots+d(u_v,y)\right]-\sum_{k=1}^{v}d(u_k,u_k)$ (偏 $b_v(s)$-不等式)。

则 d 称为 X 上的偏 $b_v(s)$-距离，(X,d) 称为偏 $b_v(s)$-度量空间，且系数 $s\ge 1$。

注 1 [5]在偏 $b_v(s)$-度量空间 (X,d) 中，若对 $x,y\in X$，有 $d(x,y)=0$，则 $x=y$。反之不一定成立。

注 2 [5]

1) 偏 $b_1(1)$-度量空间是偏度量空间[8]；

2) 偏 $b_1(s)$-度量空间是偏 b-度量空间，系数 $s\ge 1$ [2]；

3) 偏 $b_2(1)$-度量空间是偏矩形度量空间[9]；

4) 偏 $b_2(s)$-度量空间是偏矩形 b-度量空间，系数 $s\ge 1$；

5) 偏 $b_v(1)$-度量空间是偏 v-度量空间。

定义 2.2： 令 X 是一个非空集合，映射 $d:X\times X\to[0,\infty)$，$v\in N$。若对任意的 $x,y\in X$，存在互不相同的元素 $u_1,u_2,\cdots,u_v\in X$，且它们与 x 和 y 是互异的，有下列条件成立：

1) $x=y$ 当且仅当 $d(x,y)=d(x,x)=d(y,y)$；

2) $d(x,x)\le d(x,y)$；

3) $d(x,y)=d(y,x)$；

4) $d(x,y)\le d(x,u_1)+d(u_1,u_2)+\cdots+d(u_v,y)-\sum_{k=1}^{v}d(u_k,u_k)$ (偏 v-不等式)。

则 d 称为 X 上的偏 v-距离。(X,d) 称为偏 v-度量空间。

定义 2.3： [5]令 (X,d) 是偏 $b_v(s)$-度量空间，数列 $\{x_n\}\subset X$，且 $x\in X$。则

1) 若 $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=d(x,x)$，则数列 $\{x_n\}$ 称为 X 中的收敛列，且收敛于 x。x 称为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$，或 $x_n\to x$，$n\to\infty$。

2) 若 $\lim_{n,m\to\infty}d(x_n,x_m)$ 存在，则数列 $\{x_n\}$ 称为 X 中的柯西列。

3) 若对于 X 中的每个柯西列 $\{x_n\}$，存在 $x\in X$，且 $\lim_{n,m\to\infty}d(x_n,x_m)=\lim_{n,m\to\infty}d(x_n,x)=d(x,x)$，则 (X,d) 称为完备的偏 $b_v(s)$-度量空间。

在[5]中我们给出了一些例子来说明偏 $b_v(s)$-度量空间上的拓扑与推广的度量空间上的拓扑是不相容的[10]。因此，我们在偏 $b_v(s)$-度量空间中定义了连续性。

定义 2.4： 若当 $n\to\infty$，$x_n\to x\in X$ 时，有 $Tx_n\to Tx$，则称映射 T 是连续的。

Samet 等人[11]通过定义 $\alpha-\psi$-收缩映射和 α-容许映射给出了一个有趣的结果，同时也推广了 Banach 收缩原理。

定义 2.5： [11]令 T 是集合 X 上的一个自映射，函数 $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$，我们称 T 是 α-容许映射，若对 $x,y\in X$，下列条件成立：

$$\alpha(x,y)\ge 1\Rightarrow\alpha(Tx,Ty)\ge 1$$

定义 2.6： [12]令 X 是非空集合，映射 $T:X\to X$，函数 $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$。我们称 T 是三角 α-容许映射，若有下列条件成立：

1) 对任意 $x,y\in X$，且 $\alpha(x,y)\ge 1$，有 $\alpha(Tx,Ty)\ge 1$ 成立。

2) 对任意的 $x,y,z\in X$，且 $\alpha(x,z)\ge 1$，$\alpha(z,y)\ge 1$，有 $\alpha(x,y)\ge 1$ 成立。

若对所有的 $x\in X$，有 $\alpha(x,x)\ge 1$ 成立，我们称 α 具有反身性。

引理 2.1：[12]令 T 是三角 α -容许映射。假设存在 $x_0\in X$，且 $\alpha(x_0,Tx_0)\ge 1$。通过如下方式来定义数列 $\{x_n\}$：$x_n=T^n x_0$。则对所有的 $m,n\in N$，且 $m<n$，有 $\alpha(x_m,x_n)\ge 1$ 成立。

下面的引理将用于证明我们的主要结论。

引理 2.2：令 (X,d) 是偏 ν -度量空间，数列 $\{x_n\}$ 是 X 中的柯西列，当 $n\ne m$ 时，有 $x_n\ne x_m$，且 $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m)=0$。则数列 $\{x_n\}$ 至多收敛于一个点。

证明：假设 $x,y\in X$ 是数列 $\{x_n\}$ 的两个极限，且

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m)=\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x)=d(x,x)=\lim_{n\to\infty} d(x_n,y)=d(y,y)$$

由偏 ν -不等式，我们有

$$\begin{aligned} d(x,y) &\le d(x,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+\nu-1},x_{n+\nu})+d(x_{n+\nu},y)-\sum_{k=1}^{\nu} d(x_{n+k},x_{n+k}) \\ &\le d(x,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+\nu-1},x_{n+\nu})+d(x_{n+\nu},y) \end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y)=\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1})=0$，我们得到 $d(x,y)=0$。由偏 ν -推广度量空间的定义，有 $x=y$。

引理 2.3：令 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是非负数列。若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \max\{a_n,b_n\}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$。

在本文中，我们用 $F(T)$ 代表映射 T 的不动点集合。

3. 主要结论

在这一节中，我们将在完备的偏 ν -度量空间中来证明我们的结论。

定理 3.1：令 (X,d) 是完备的偏 ν -度量空间，函数 $\alpha: X\times X\to[0,\infty)$，映射 $T: X\to X$。假设下列条件成立：

1) 对所有的 $x,y\in X$，且 $\alpha(x,y)\ge 1, M(x,y)>0$，有

$$d(Tx,Ty)<M(x,y) \tag{3.1}$$

其中

$$M(x,y)=\max\left\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{d(x,Tx)d(y,Ty)}{1+d(x,y)+d(x,Ty)+d(y,Tx)},\frac{d(x,Tx)d(y,Ty)}{1+d(Tx,Ty)}\right\};$$

2) 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对所有的 $x,y\in X$，有

$$\alpha(x,y)\ge 1,\ M(x,y)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(Tx,Ty)\le\varepsilon; \tag{3.2}$$

3) T 是三角 α -容许映射，且 α 具有反身性；

4) 存在 $x_0\in X$，有 $\alpha(x_0,Tx_0)\ge 1$ 成立；

5) T 是连续的。

则 T 有唯一的不动点 u，且 $\{T^n x_0\}$ 收敛于 u。更进一步，若对所有的 $x,y\in F(T)$，有 $\alpha(x,y)\ge 1$，则 T 在 X 中有唯一的不动点。

证明：令 $x_0\in X$ 且满足 $\alpha(x_0,Tx_0)\ge 1$。我们通过下列方式来构造数列 $\{x_n\}$：$x_n=Tx_{n-1}=T^n x_0$，$n\in N$。

若对某个 $n\in N$，有 $x_n=x_{n+1}$，则 x_n 是 T 的不动点。在接下来的证明中，我们假设对所有的 $n\in N$，$x_n\neq x_{n+1}$。因为 T 是 α -容许映射，对所有的 $n,m\in N$， $n<m$， 我们有

$$\alpha\left(x_n,x_m\right)\geq 1 \tag{3.3}$$

1) 我们首先证明 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n-1},x_n\right)=0$ 。

在(3.1)中令 $x=x_{n-1}$， $y=x_n$， 我们得到

$$d\left(x_n,x_{n+1}\right)=d\left(Tx_{n-1},Tx_n\right)<M\left(x_{n-1},x_n\right) \tag{3.4}$$

其中

$$\begin{aligned}
&M\left(x_{n-1},x_n\right)\\
&=\max\left\{d\left(x_{n-1},x_n\right),d\left(x_{n-1},Tx_{n-1}\right),d\left(x_n,Tx_n\right),\frac{d\left(x_{n-1},Tx_{n-1}\right)d\left(x_n,Tx_n\right)}{1+d\left(x_{n-1},x_n\right)+d\left(x_{n-1},Tx_n\right)+d\left(x_n,Tx_{n-1}\right)},\right.\\
&\left.\quad\frac{d\left(x_{n-1},Tx_{n-1}\right)d\left(x_n,Tx_n\right)}{1+d\left(Tx_{n-1},Tx_n\right)}\right\}\\
&=\max\left\{d\left(x_{n-1},x_n\right),d\left(x_{n-1},x_n\right),d\left(x_n,x_{n+1}\right),\frac{d\left(x_{n-1},x_n\right)d\left(x_n,x_{n+1}\right)}{1+d\left(x_{n-1},x_n\right)+d\left(x_{n-1},x_{n+1}\right)},\frac{d\left(x_{n-1},x_n\right)d\left(x_n,x_{n+1}\right)}{1+d\left(x_n,x_{n+1}\right)}\right\}\\
&=\max\left\{d\left(x_{n-1},x_n\right),d\left(x_n,x_{n+1}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

利用(3.4)和(3.5)，对所有的 $n\in N$， 我们得到

$$d\left(x_n,x_{n+1}\right)<d\left(x_{n-1},x_n\right) \tag{3.6}$$

因此 $\left\{d\left(x_n,x_{n+1}\right)\right\}$ 是递减数列。故存在 $r\geq 0$， 使 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n,x_{n+1}\right)=r$ 。明显地， 对于所有的 $n\in N$， $d\left(x_n,x_{n+1}\right)>r$ 。若 $r>0$， 令 $\varepsilon=r$， 存在 $\delta>0$， 对所有的 $x,y\in X$， 有

$$\alpha(x,y)\geq 1,\ M(x,y)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(Tx,Ty)\leq\varepsilon \tag{3.7}$$

因为对于所有的 $n\in N$，$d\left(x_n,x_{n+1}\right)=M\left(x_n,x_{n+1}\right)$，$\lim_{n\to\infty} d\left(x_n,x_{n+1}\right)=r$，则存在 $n_0\in N$，对所有的 $n\geq n_0$，有

$$M\left(x_n,x_{n+1}\right)=d\left(x_n,x_{n+1}\right)<r+\delta$$

由(3.7)，对所有的 $n\geq n_0$， 我们得到 $d\left(x_{n+1},x_{n+2}\right)\leq r$， 这与 $d\left(x_n,x_{n+1}\right)>r$， $\forall n\in N$ 是矛盾的。因此得到 $r=0$ 。因此

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_n,x_{n+1}\right)=0 \tag{3.8}$$

2) 下面我们证明对所有的 $n\neq m$， 有 $x_n\neq x_m$ 。假设若对某一 $n>m$， 有 $x_n=x_m$ 成立，因此我们得到 $x_{n+1}=Tx_n=Tx_m=x_{m+1}$ 。由(3.6)，得到 $d\left(x_n,x_{n+1}\right)<d\left(x_{n-1},x_n\right)<\cdots<d\left(x_m,x_{m+1}\right)=d\left(x_n,x_{n+1}\right)$， 矛盾。因此，对任意 $n\neq m$， $x_n\neq x_m$ 。

3) 接下来证明，对任意的 $p\in N$， 且 $p\geq 2$， 有 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n,x_{n+p}\right)=0$ 成立。

因为 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n,x_{n+1}\right)=0$， 对任意的 $n\in N$， 我们可以假设 $d\left(x_n,x_{n+1}\right)<1$ 。在(3.1)中， 令 $x=x_{n-1}$， $y=x_{n+p-1}$。因 $M\left(x_{n-1},x_{n+p-1}\right)\geq d\left(x_{n-1},x_{n+p-1}\right)>0$， $\alpha\left(x_{n-1},x_{n+p-1}\right)\geq 1$， 我们得到

$$d\left(x_n, x_{n+p}\right) < M\left(x_{n-1}, x_{n+p-1}\right) \tag{3.9}$$

其中

$$\begin{aligned}
&M\left(x_{n-1}, x_{n+p-1}\right) \\
&= \max\left\{d\left(x_{n-1}, x_{n+p-1}\right), d\left(x_{n-1}, Tx_{n-1}\right), d\left(x_{n+p-1}, Tx_{n+p-1}\right),\right. \\
&\left.\frac{d\left(x_{n-1}, Tx_{n-1}\right) d\left(x_{n+p-1}, Tx_{n+p-1}\right)}{1+d\left(x_{n-1}, x_{n+p-1}\right)+d\left(x_{n-1}, Tx_{n+p-1}\right)+d\left(Tx_{n-1}, x_{n+p-1}\right)}, \frac{d\left(x_{n-1}, Tx_{n-1}\right) d\left(x_{n+p-1}, Tx_{n+p-1}\right)}{1+d\left(Tx_{n-1}, Tx_{n+p-1}\right)}\right\} \\
&= \max\left\{d\left(x_{n-1}, x_{n+p-1}\right), d\left(x_{n-1}, x_n\right), d\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}\right),\right. \\
&\left.\frac{d\left(x_{n-1}, x_n\right) d\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}\right)}{1+d\left(x_{n-1}, x_{n+p-1}\right)+d\left(x_{n-1}, x_{n+p}\right)+d\left(x_n, x_{n+p-1}\right)}, \frac{d\left(x_{n-1}, x_n\right) d\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}\right)}{1+d\left(x_n, x_{n+p}\right)}\right\}
\end{aligned}$$

因为数列$\left\{d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right\}$是递减的，且对所有的$n \in N$，有$d\left(x_n, x_{n+1}\right) < 1$，故得到

$$M\left(x_{n-1}, x_{n+p-1}\right) = \max\left\{d\left(x_{n-1}, x_{n+p-1}\right), d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right\} \tag{3.10}$$

由(3.9)和(3.10)，得到

$$d\left(x_n, x_{n+p}\right) < \max\left\{d\left(x_{n-1}, x_{n+p-1}\right), d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right\} \tag{3.11}$$

令$a_n = d\left(x_n, x_{n+p}\right)$，$b_n = d\left(x_n, x_{n+1}\right)$，故

$$a_n < \max\left\{a_{n-1}, b_{n-1}\right\}$$

因为$b_n < b_{n-1} \le \max\left\{a_{n-1}, b_{n-1}\right\}$，因此对任意的$n \in N$，得到$\max\left\{a_n, b_n\right\} < \max\left\{a_{n-1}, b_{n-1}\right\}$。故数列$\left\{\max\left\{a_n, b_n\right\}\right\}_{n \in N}$是递减的，假设它收敛于某一$t \ge 0$。因为$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$，由引理2.3得到

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \max\left\{a_n, b_n\right\} = t$$

若$t > 0$，因为$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \max\left\{a_n, b_n\right\} = t > 0$，接下来，我们假设$a_n > b_n$，$n \in N$，即$a_n = \max\left\{a_n, b_n\right\} > t$，$n \in N$。

令$\varepsilon = t$，存在$\delta > 0$，对任意的$x, y \in X$，有

$$\alpha(x, y) \ge 1,\ M(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) \le \varepsilon \tag{3.12}$$

因为对所有的$n \in N$，$d\left(x_n, x_{n+p}\right) = M\left(x_n, x_{n+p}\right)$，且$\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+p}\right) = t$，则存在$n_0 \in N$，对$n \ge n_0$，有

$$M\left(x_n, x_{n+p}\right) = d\left(x_n, x_{n+p}\right) < t + \delta$$

由(3.12)，对所有的$n \ge n_0$，$d\left(x_{n+1}, x_{n+p+1}\right) \le t$，这与$d\left(x_n, x_{n+p}\right) > t$，$n \in N$是矛盾的。故$t = 0$。即

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+p}\right) = 0 \tag{3.13}$$

4) 下面我们证明$\lim_{n,m\to\infty} d\left(x_n, x_m\right) = 0$。相反地，我们假设$\left\{d\left(x_n, x_m\right)\right\}$不收敛于0，选取子列$\left\{x_{m_i}\right\}, \left\{x_{n_i}\right\} \subset \left\{x_n\right\}$，存在$\varepsilon_0 > 0$，$n_i$是使下列式子成立的最小指标

$$n_i > m_i > i，\ d\left(x_{m_i}, x_{n_i}\right) > 2\varepsilon_0 \tag{3.14}$$

由定理 3.1 条件(2)知，存在 $\delta > 0$，对任意的 $x, y \in X$，

$$\alpha(x,y) \ge 1，\ M(x,y) < \varepsilon_0 + \delta \Rightarrow d(Tx,Ty) \le \varepsilon_0 \tag{3.15}$$

显然地，(3.15)式中用 $\delta' = \min\{\varepsilon_0, \delta\}$ 来代替 δ，(3.15)仍成立。因为 $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+p}\right) = 0$，$p = 1,2,\cdots,\nu$，则存在 $i_0 \in N$，对所有 $n \ge i_0$，有

$$d\left(x_n, x_{n+p}\right) < \frac{\delta'}{3\nu} \tag{3.16}$$

对 $j \in \left[m_{i_0}, n_{i_0}\right]$，由偏 ν-不等式，有

$$\begin{aligned} d\left(x_{m_{i_0}}, x_j\right) &\le d\left(x_{m_{i_0}}, x_{j+1}\right) + d\left(x_{j+1}, x_{j+2}\right) + \cdots + d\left(x_{j+\nu-1}, x_{j+\nu}\right) + d\left(x_{j+\nu}, x_j\right) - \sum_{k=1}^{\nu} d\left(x_{j+k}, x_{j+k}\right) \\ &\le d\left(x_{m_{i_0}}, x_{j+1}\right) + \nu \times \frac{\delta'}{3\nu} = d\left(x_{m_{i_0}}, x_{j+1}\right) + \frac{\delta'}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\left(x_{m_{i_0}}, x_{j+1}\right) &\le d\left(x_{m_{i_0}}, x_j\right) + d\left(x_j, x_{j+2}\right) + \cdots + d\left(x_{j+\nu-1}, x_{j+\nu}\right) \\ &\quad + d\left(x_{j+\nu}, x_{j+1}\right) - d\left(x_j, x_j\right) - \sum_{k=2}^{\nu} d\left(x_{j+k}, x_{j+k}\right) \\ &\le d\left(x_{m_{i_0}}, x_j\right) + \nu \times \frac{\delta'}{3\nu} = d\left(x_{m_{i_0}}, x_j\right) + \frac{\delta'}{3} \end{aligned}$$

即 $\left| d\left(x_{m_{i_0}}, x_j\right) - d\left(x_{m_{i_0}}, x_{j+1}\right) \right| \le \dfrac{\delta'}{3}$。

因为 $d\left(x_{m_{i_0}}, x_{m_{i_0}+1}\right) < \varepsilon_0$，$d\left(x_{m_{i_0}}, x_{n_{i_0}}\right) > \varepsilon_0 + \delta'$，即能推得存在 $j_0 \in \left[m_{i_0}, n_{i_0}\right]$，有

$$\varepsilon_0 + \frac{2\delta'}{3} < d\left(x_{m_{i_0}}, x_{j_0}\right) < \varepsilon_0 + \delta' \tag{3.17}$$

其中

$$\begin{aligned} & M\left(x_{m_{i_0}}, x_{j_0}\right) \\ &= \max\left\{ d\left(x_{m_{i_0}}, x_{j_0}\right), d\left(x_{m_{i_0}}, Tx_{m_{i_0}}\right), d\left(x_{j_0}, Tx_{j_0}\right), \right. \\ &\quad \left. \frac{d\left(x_{m_{i_0}}, Tx_{m_{i_0}}\right) d\left(x_{j_0}, Tx_{j_0}\right)}{1 + d\left(x_{m_{i_0}}, x_{j_0}\right) + d\left(x_{m_{i_0}}, Tx_{j_0}\right) + d\left(Tx_{m_{i_0}}, x_{j_0}\right)}, \frac{d\left(x_{m_{i_0}}, Tx_{m_{i_0}}\right) d\left(x_{j_0}, Tx_{j_0}\right)}{1 + d\left(Tx_{m_{i_0}}, Tx_{j_0}\right)} \right\} \\ &= \max\left\{ d\left(x_{m_{i_0}}, x_{j_0}\right), d\left(x_{m_{i_0}}, x_{m_{i_0}+1}\right), d\left(x_{j_0}, x_{j_0+1}\right), \right. \\ &\quad \left. \frac{d\left(x_{m_{i_0}}, x_{m_{i_0}+1}\right) d\left(x_{j_0}, x_{j_0+1}\right)}{1 + d\left(x_{m_{i_0}}, x_{j_0}\right) + d\left(x_{m_{i_0}}, x_{j_0+1}\right) + d\left(x_{m_{i_0}+1}, x_{j_0}\right)}, \frac{d\left(x_{m_{i_0}}, x_{m_{i_0}+1}\right) d\left(x_{j_0}, x_{j_0+1}\right)}{1 + d\left(x_{m_{i_0}+1}, Tx_{j_0+1}\right)} \right\} \\ &= d\left(x_{m_{i_0}}, x_{j_0}\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

利用定理 3.1 条件(2)，我们有 $d\left(x_{m_{i_0}+1},x_{j_0+1}\right)\le\varepsilon_0$。然而，由(3.15)~(3.18)知

$$\begin{aligned}\varepsilon_0+\frac{2\delta'}{3}&<d\left(x_{m_{i_0}},x_{j_0}\right)\\&\le d\left(x_{m_{i_0}},x_{m_{i_0}+1}\right)+d\left(x_{m_{i_0}+1},x_{j_0+1}\right)+d\left(x_{j_0+1},x_{j_0+2}\right)+\cdots+d\left(x_{j_0+v-2},x_{j_0+v-1}\right)\\&\quad+d\left(x_{j_0+v-1},x_{j_0}\right)-d\left(x_{m_{i_0}+1},x_{m_{i_0}+1}\right)-\sum_{k=1}^{v-1}d\left(x_{j_0+k},x_{j_0+k}\right)\\&<d\left(x_{m_{i_0}+1},x_{j_0+1}\right)+v\times\frac{\delta'}{3v}\le\varepsilon_0+\frac{\delta'}{3}\end{aligned}$$

这与已知的矛盾。故 $\lim\limits_{n,m\to\infty}d\left(x_n,x_m\right)=0$，即 $\{x_n\}$ 是柯西列。因为 (X,d) 是完备的，所以存在 $u\in X$，使得

$$\lim_{n,m\to\infty}d\left(x_n,x_m\right)=\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,u\right)=d\left(u,u\right)=0$$

5) 假设 T 是连续的，下面我们证明 u 是 T 的不动点。因为 T 是连续的，则

$$\lim_{n\to\infty}d\left(Tx_n,Tu\right)=\lim_{n\to\infty}d\left(x_{n+1},Tu\right)=d\left(Tu,Tu\right)$$

因为对于 $n\ne m$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\ne x_m$，我们可以假设每一 x_n 与 u,Tu 都是不同的。考虑

$$\begin{aligned}d\left(u,Tu\right)&\le d\left(u,x_{n+v}\right)+d\left(x_{n+v},x_{n+v-1}\right)+\cdots+d\left(x_{n+2},x_{n+1}\right)+d\left(x_{n+1},Tu\right)-\sum_{k=1}^{v}d\left(x_{n+k},x_{n+k}\right)\\&\le d\left(u,x_{n+v}\right)+d\left(x_{n+v},x_{n+v-1}\right)+\cdots+d\left(x_{n+2},x_{n+1}\right)+d\left(x_{n+1},Tu\right)\end{aligned}$$

因 $\lim\limits_{n,m\to\infty}d\left(x_n,x_m\right)=0$，得到 $d\left(u,Tu\right)\le d\left(Tu,Tu\right)$。因此

$$d\left(u,Tu\right)=d\left(Tu,Tu\right)\tag{3.19}$$

假设 u 不是 T 的不动点，即 $u\ne Tu$，则

$$\begin{aligned}M\left(u,u\right)&=\max\left\{d\left(u,u\right),d\left(u,Tu\right),d\left(u,Tu\right),\frac{d\left(u,Tu\right)d\left(u,Tu\right)}{1+d\left(u,u\right)+d\left(u,Tu\right)+d\left(u,Tu\right)},\frac{d\left(u,Tu\right)d\left(u,Tu\right)}{1+d\left(Tu,Tu\right)}\right\}\\&=d\left(u,Tu\right)>0\end{aligned}$$

因为 α 具有反身性，由(3.1)，$x=u,y=u$，我们得到

$$d\left(Tu,Tu\right)<M\left(u,u\right)=d\left(u,Tu\right)$$

这与(3.19)是矛盾的。即 u 是 T 的不动点。

6) 最后，我们证明 T 的不动点是唯一的。假设 u,v 是 T 的两个不动点，且 $u\ne v$。则由假设 $\alpha\left(u,v\right)\ge1$。所以由(3.1)式，$x=u,y=v$，得到

$$d\left(u,v\right)=d\left(Tu,Tv\right)<M\left(u,v\right)$$

其中

$$M\left(u,v\right)=\max\left\{d\left(u,v\right),d\left(u,Tu\right),d\left(v,Tv\right),\frac{d\left(u,Tu\right)d\left(v,Tv\right)}{1+d\left(u,v\right)+d\left(u,Tv\right)+d\left(v,Tu\right)},\frac{d\left(u,Tu\right)d\left(v,Tv\right)}{1+d\left(Tu,Tv\right)}\right\}=d\left(u,v\right)$$

即

$$d(u,v)<d(u,v)$$

矛盾。因此$u=v$。

推论 3.2： 令$(X,\prec,d)$是完备的偏ν-度量空间。映射$T:X\to X$是单调的，且满足下列条件：

1) 对任意的$x,y\in X$，且$x\prec y$，若$M(x,y)>0$，则有$d(Tx,Ty)<M(x,y)$，其中

$$M(x,y)=\max\left\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{d(x,Tx)d(y,Ty)}{1+d(x,y)+d(x,Ty)+d(y,Tx)},\frac{d(x,Tx)d(y,Ty)}{1+d(Tx,Ty)}\right\};$$

2) 对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，且对任意的$x,y\in X$，有

$$x\prec y,\ M(x,y)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(Tx,Ty)\le\varepsilon;$$

3) 存在$x_0\in X$，满足$x_0\prec Tx_0$；

4) T是连续的。

则T存在不动点u且$\{T^n x_0\}$收敛于u。更进一步，若对任意的$x,y\in F(T)$，我们有$\alpha(x,y)\ge1$，则T在X中存在唯一的不动点。

证明：定义$\alpha:X\times X\to[0,\infty)$，且

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}1 & x\prec y\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

显然地，由定理 3.1，T存在不动点。

致　谢

在论文完成之际，我要特别感谢纪培胜老师的热情关怀和悉心指导，无论是在论文的选题、构思和资料的收集方面，还是在论文的研究方法以及成文定稿方面，纪老师都给予了无私的帮助，在此表示真诚的感谢和深深的谢意。在论文的写作过程中，也得到了董芳远同学的宝贵建议，在此一并致以诚挚的谢意。最后，还要感谢山东省自然科学基金资助项目对本论文的支持。

基金项目

山东省自然科学基金资助项目(ZR2016AM05)。

参考文献

[1] Banach, S. (1922) Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals. *Fundamenta Mathematicae*, **20**, 133-181. https://doi.org/10.4064/fm-3-1-133-181

[2] Shukla, S. (2014) Partial *b*-Metric Spaces and Fixed Point Theorems. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **11**, 703-711. https://doi.org/10.1007/s00009-013-0327-4

[3] Mitrovic, Z.D. and Radenovic, S. (2017) The Banach and Reich Contractions in $b_\nu(s)$-Metric Spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, **19**, 3087-3095. https://doi.org/10.1007/s11784-017-0469-2

[4] Branciari, A. (2000) A Fixed Point Theorem of Banach-Caccioppoli Type on a Class of Generalized Metric Spaces. *Publicationes Mathematicae*, **57**, 31-37.

[5] Abdullahi, M.S. and Kumam, P. (2018) Partial $b_\nu(s)$-Metric Spaces and Fixed Point Theorems. *Fixed Point Theory and Applications*, **20**, 113. https://doi.org/10.1007/s11784-018-0591-9

[6] Meir, A. and Keeler, E. (1969) A Theorem on Contraction Mappings. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **28**, 326-329. https://doi.org/10.1016/0022-247x(69)90031-6

[7] Jachymski, J. (1995) Equivalent Conditions and the Meir-Keeler Type Theorems. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **194**, 293-303. https://doi.org/10.1006/jmaa.1995.1299

[8] Mattehews, S.G. (1994) Partial Metric Topology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **728**, 183-197.

[9] Shukla, S. (2014) Partial Rectangular Metric Spaces and Fixed Point Theorems. *The Scientific World Journal*, **2014**, Article ID: 756298. https://doi.org/10.1155/2014/756298

[10] Suzuki, T. (2014) Generalized Metric Spaces Do Not Have the Compatible Topology. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 458098. https://doi.org/10.1155/2014/458098

[11] Samet, B., Vetro, C. and Vetro, P. (2012) Fixed Point Theorems for $\alpha-\psi$ -Contractive Type Mappings. *Nonlinear Analysis*, **75**, 2154-2165. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.10.014

[12] Vahid, P., Nawab, H. and Zoran, K. (2016) Generalized Wardowski Type Fixed Point Theorems via α -Admissable *FG*-Contractions in *b*-Metric Spaces. *Acta Mathematica Scientia*, **5**, 1445-1456. https://doi.org/10.1016/s0252-9602(16)30080-7