Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(2), 230-236
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.92029

Hans汉斯

Asymptotically Stable Set of Local Compact Metric Space

Ziqing Fu, Zhanfu Huo

School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi
Email: 2864029246@qq.com

Received: Mar. 1st, 2019; accepted: Mar. 15th, 2019; published: Mar. 22nd, 2019

Abstract

Let *X* be a local compact metric space, $f: X \to X$ be a homeomorphism. This article mainly proves the following two conclusions: 1) Assume that $K \subset X$ is a compact strongly invariant set and there exists a compact neighborhood $Q \supset K$, such that $Q \setminus K$ contains no complete negative trajectory for every $x \in X$ and $\omega(x)$ is nonempty set, then *K* is asymptotically stable. 2) If each bounded closed set is a compact set for *X* and let $K \subset X$ be an attractor. Then $\tilde{K}$ is asymptotically stable with the same basin of attraction that *K*. Moreover *K* is asymptotically stable if only if $\tilde{K} = K$.

Keywords

Asymptotically Stable Set, No Complete Negative Trajectory, Attractor, Basin of Attraction

局部紧致度量空间的渐进稳定集

符子晴，霍展福

广西大学，数学与信息科学学院，广西 南宁
Email: 2864029246@qq.com

收稿日期：2019年3月1日；录用日期：2019年3月15日；发布日期：2019年3月22日

摘 要

设*X*为局部紧致度量空间，$f: X \to X$ 是同胚映射。本文主要证明如下两个结论：1) 若对 $\forall x \in X$，

文章引用: 符子晴, 霍展福. 局部紧致度量空间的渐进稳定集[J]. 理论数学, 2019, 9(2): 230-236.
DOI: 10.12677/pm.2019.92029

$\omega(x)\neq\phi$，$K\subset X$ 为紧致强不变集，且存在一个紧致邻域*Q*，使得 $Q\setminus K$ 包含不完整负轨道，则*K*是渐进稳定集；2) 若*X*的每一个有界闭集都是紧致的，且 $K\subset X$ 为吸引子，则 $\tilde{K}$ 是渐进稳定的，其中 $\tilde{K}$ 与*K*有相同的吸引域。更多的，*K*是渐近稳定的当且仅当 $\tilde{K}=K$。结论1)，2)分别是对文献[1]和[2]中的结论进行了进一步推广。

关键词

渐进稳定集，不完全负轨道，吸引子，吸引域

1. 引言

运动稳定性问题在 19 世纪下半叶已有许多学者进行研究并得出一些成果。如著名物理学家 J. C.麦克斯韦(1868)分析蒸汽机调速器和钟表机构稳定性的论文《论调节器》；E. J.劳思(1830~1907)的专著《已知运动状态的稳定性》(1877)；H. E.儒科夫斯基的《论运动的持久性》(1882)等。俄国数学家、力学家李雅普诺夫和法国数学家、理论科学家和科学哲学家儒勒·昂利·庞加莱庞加莱也各自从不同角度研究了运动稳定性理论中的一般性问题。1892 年，李雅普诺夫在《运动稳定性的一般问题》一文中对已知运动状态的稳定性给出了严格的数学定义。本文为了更好地研究局部紧致度量空间的渐进稳定集，借助不完全负轨道，吸引子等的概念来刻画其性质，将文献[1]和[2]中的结论进行了进一步推广。

2. 预备知识

性质 2.1：[3]设 X 是局部紧致的度量空间。对 $\forall x\in X$，$\omega(x)$ 和 $\alpha(x)$ 都是 X 中的闭且强不变集。

定义 2.2：[3]设 X 是局部紧致的度量空间。称紧致集 $K\subset X$ 称为吸引子，如果它是强不变的且存在 K 的一个开邻域 U，使得对所有 $x\in U$，$\omega(x)\neq\phi$ 且 $\omega(x)\subset K$。

定义 2.3：[3]设 X 是局部紧致的度量空间。集合 $\mathrm{A}(K)=\{x\in X:\omega(x)\neq\phi 且 \omega(x)\subset K\}$ 称为 K 的吸引域，且 $\mathrm{A}(K)$ 强不变且是开集。在这种情况下，如果 $\mathrm{A}(K)=X$，我们称这样的 K 为全局吸引子。

定义 2.4：[3]设 X 是局部紧致的度量空间。称紧致集 $K\subset X$ 是渐进稳定集如果它是一个吸引子且对所有的 K 的开邻域 U，存在 $V\subset U$ 为 K 的一个开邻域，使得 $f^n(x)\in U$，对所有 $x\in V$ 且 $n\in N$。在这种情况下，如果 $\mathrm{A}(K)=X$，我们称这样的 K 为全局稳定集。

定义 2.5：[3]设 K 为一吸引子，$\tilde{K}=\{x\in\mathrm{A}(K):\alpha(x)\cap K\neq\phi\}$ 称为 K 的稳定子。

定义 2.6：[4]设 X 是局部紧致度量空间，$f:X\to X$ 是同胚映射，$x\in X$。如果存在递增序列 n_i，使得 $\lim\limits_{i\to+\infty}f^{n_i}(x)=y$，则称 $y\in X$ 为 x 的 ω-极限点，并称 x 的全体 ω-极限点的集合为 x 的 ω-极限集，记作 $\omega(x,f)$。显然，$\omega(x,f)=\bigcap\limits_{n\geq0}\overline{\bigcup\limits_{k\geq n}orb\left(f^k(x)\right)}$。同样，如果存在递增序列 n_i，使得 $\lim\limits_{i\to+\infty}f^{-n_i}(x)=y$，则称 $y\in X$ 为 x 的 α-极限点，并称 x 的全体 α-极限点的集合为 x 的 α-极限集，记作 $\alpha(x,f)$。

定义 2.7：[4]设 (X,f) 为动力系统，$x\in X$，称集合 $\{x,f(x),f^2(x),\cdots,f^n(x),\cdots\}$ 为 x 在 f 之下的轨道，记为 $O(x,f)$ 或 $orb(x)$。

定义 2.8：[4]设 X 是一个集合，$\rho:X\times X\to R$ 如果对于任何的 $x,y,z\in X$，有

1) $\rho(x,y)\ge 0$，并且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

3) $\rho(x,z)\le \rho(x,y)+\rho(y,z)$；

则称 ρ 为集合 X 的一个度量。

定义 2.9：[5]设 X 是一个拓扑空间，如果 X 中的每一个点都有一个紧致邻域，则称拓扑空间 X 是一个局部紧致空间。

定义 2.10：[5]设 x 是度量空间 X 中的一个点。U 是 X 的子集，如果存在一个开集 V 满足条件：$x\in V\subset U$，则称 U 是点 x 的一个邻域。

性质 2.11：[5]设 x 是度量空间 X 中的一个点。则 X 的子集 U 是点 x 的一个邻域的充分必要条件是点 x 有某一个球形邻域包含于 U。

定义 2.12：[5]设 X,Y 是两个度量空间，$h:X\to Y, x_0\in X$。若对于 $h(x_0)$ 的任意邻域 $B(h(x_0),\varepsilon)$，存在 x_0 的某邻域 $B(x_0,\delta)$，使得 $h(B(x_0,\delta))\subset B(h(x_0),\varepsilon)$，则称 h 在点 x_0 处连续，若 h 在 X 的每一个点处都连续，则称 h 是一个连续映射。

定义 2.13：[5]设 X 和 Y 是拓扑空间，如果存在一个同胚映射 $f:X\to Y$，则称拓扑空间 X 于拓扑空间 Y 是同胚的，或称 X 与 Y 同胚，或称 X 同胚于 Y。

定义 2.14：[5]设 (X,f) 为动力系统。点 $x\in X$ 的一条完整负轨道是一个无限序列 (x_n)，使得对 $\forall n\ge 1$，有 $x_0=x$ 且 $f(x_n)=x_{n-1}$。

定义 2.15：[5]设 X 是拓扑空间。如果 X 的每一个开覆盖有一个有限子覆盖，则称拓扑空间 X 是一个紧致空间。

定义 2.16：[5]设 X 是局部紧致的度量空间，且设 $f:X\to X$ 为同胚映射。$Y\subset X$，如果 $f(Y)\subset Y$，则称 Y 为不变集，进一步：如果 $f(Y)=Y$，则称 Y 是强不变的。

3. 相关引理

引理 3.1：设 $f:X\to X$ 同胚，其中 X 为局部紧致的度量空间，假设 $K\subset X$ 为全局吸引子，设 $Q_1\supset K$ 为一紧致邻域，则存在紧致邻域 Q_2，使得 $Q_1\subset Q_2$ 且 $f(Q_2)\subset Q_2$。

证明：设 $x\in Q_1$，则由 K 为全局吸引子，因此由 K 的定义，设 $n_x\ge 1$ 为第一个自然数使得 $f^{n_x}(x)\in \operatorname{int}(Q_1)$。则由 f^{n_x} 的连续性知，存在 x 的一个 δ-邻域 $S(x,\delta)$，使得 $f^{n_x}\left(\overline{S(x,\delta)}\right)\subset \operatorname{int}Q_1$。由 X 为局部紧致的，由 X 的定义可知，存在 x 的一个紧致邻域 B'_x，令 $B_x=B'_x\cap\overline{S(x,\delta)}$，则 B_x 是闭集且 $B_x\subset B'_x$，因此由紧致集的闭子集还是紧致集知 B_x 是 x 的一个紧致邻域。又 $f:X\to X$ 同胚，则知 f 是一一映射，所以有 $f^{n_x}(B_x)=f^{n_x}(B'_x)\cap f^{n_x}\left(\overline{S_x}\right)$ 且 $f^{n_x}(B_x)\subset f^{n_x}\left(\overline{S_x}\right)$，则 $f^{n_x}(B_x)\subset \operatorname{int}Q_1$。再由邻域的定义知，存在开集 C_x 使得 $x\in C_x\subset B_x$，所以有 $\bigcup_{x\in Q_1} C_x\supset Q_1$，于是存在 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in Q_1$，使得 $Q_1\subset\bigcup_{i=1}^{k}C_{x_i}\subset\bigcup_{i=1}^{k}B_{x_i}$。定义

$$Q_2=\bigcup_{i=1}^{k}\left(\bigcup_{j=0}^{n_{x_i}}f^j\left(B_{x_i}\right)\right)$$

由 B_{x_i} 是紧致集且因为 $f:X\to X$ 同胚，所以有 $f:X\to X$ 为连续映射，从而 $f^j\left(B_{x_i}\right)$ 是紧致集，且 $\bigcup_{i=1}^{k}\left(\bigcup_{j=0}^{n_{x_i}}f^j\left(B_{x_i}\right)\right)$ 是紧致集，即 Q_2 是紧致集。断言，$f(Q_2)\subset Q_2$。证明如下，要证明 $f(Q_2)\subset Q_2$，只需要证明 $\bigcup_{i=1}^{k}f^{n_{x_i}+1}\left(B_{x_i}\right)\subset Q_2$。对 $\forall x\in\bigcup_{i=1}^{k}f^{n_{x_i}+1}\left(B_{x_i}\right)$，存在 i_0，使得 $x\in f^{n_{x_{i_0}}}\left(B_{x_{i_0}}\right)$，从而存在 $z\in B_{x_{i_0}}$，使得

$f^{n_{x_{i_0}}+1}(z)=x$。记 $s=f^{n_{x_{i_0}}}(z)$，所以有 $f(s)=x$，且 $s=f^{n_{x_{i_0}}}(z)\in f^{n_{x_0}}\left(B_{x_{i_0}}\right)\subset Q_1$。又因为 $Q_1\subset\bigcup_{i=1}^{k}C_{x_i}\subset\bigcup_{i=1}^{k}B_{x_i}$，所以存在 i_1，使得 $s\in B_{x_{i_1}}$，从而 $f(s)\in f\left(B_{x_{i_1}}\right)$，于是有

$$x=f(s)\in f\left(B_{x_{i_1}}\right)\subset\bigcup_{j=0}^{n_{x_i}}f^j\left(B_{x_{i_1}}\right)\subset Q_2,$$

即有 $f(Q_2)\subset Q_2$。

引理 3.2：设 $f:X\to X$ 同胚，其中 X 为局部紧致度量空间。假设 $K\subset X$ 为吸引子，如果能够找到 K 的一个紧致邻域 Q，使得对任意开邻域 $U\supset K$，存在正整数 N，对 $\forall n\geq N$，有 $f^n(Q)\subset U$，那么 K 是渐进稳定的。

证明：由于 $K\subset X$ 为吸引子，要证明 K 是渐进稳定的，只需要证明 K 是稳定的即可，如果 K 不是稳定的，则存在 K 的一个开邻域 U，对 K 的任意开邻域 V，存在 $x\in V$ 以及 $n_k\geq 0$，使得 $f^{n_k}(x)\notin U$。设 Q 是 K 的紧致邻域，则存在 Q 中的一个序列 $\{x_k\}$，使得：

- 存在 n_k，有 $f^{n_k}(x_k)\notin U$；
- $\lim x_k=x\in K$。

则可知，对所有 k，有 $n_k<N$。因此，存在 m，令 $n_k=m$，则 $m<N$。又因为 K 强不变，所以有 $f^m(x_k)\to f^m(x)\in K$，于是从 $f^m(x_k)\to f^m(x)\in K\subset U$ 可知，U 是 $f^m(x)$ 的一个开邻域，由邻域的充分必要条件可知，存在 $f^m(x)$ 的一个 ε-邻域 $B\left(f^m(x),\varepsilon\right)$，又因为 $\lim_{k\to\infty}f^m(x_k)=f^m(x)$，所以同样取上述的 ε，存在 N，当 $n>N$ 时，有 $d\left(f^m(x_k),f^m(x)\right)<\varepsilon$，所以有 $f^m(x)\in U$。因此对所有足够大的 k，有 $f^m(x_k)\in U$，这与假设矛盾。因此 K 是稳定的，从而得到 K 是渐进稳定集。

推论 3.3：设 $f:X\to X$ 同胚，X 为局部紧致的度量空间，假设 $K\subset X$ 为全局渐进稳定集，则存在一个紧致邻域 $Q\supset K$，使得对每一个开邻域 $U\supset K$，存在一个正整数 N，对 $\forall n\geq N$ 使得 $f^n(Q)\subset U$。

证明：由 K 为全局渐进稳定集，则 K 为全局吸引子，由全局吸引子的定义，$\exists U_0\supset K$，使得对 $\forall x\in U_0$，有 $\omega(x)\neq\phi$ 且 $\omega(x)\subset K$。对 $\forall x\in K$，由 X 为局部紧致的度量空间，因此由其定义可知，存在 R_x 为 x 的紧致邻域，所以 R_x 为紧集，又 R_x 是一个邻域，由邻域的定义，存在开集 S_x，使得 $x\in S_x\subset R_x$，所以有 $\bigcup_{x\in K}S_x\supset K$，从而存在 $x_1,x_2,\cdots,x_t$，使得 $\bigcup_{i=1}^{t}S_{x_i}\supset K$，于是有 $\bigcup_{i=1}^{t}R_{x_i}\supset\bigcup_{i=1}^{t}S_{x_i}\supset K$。因为 R_{x_i} 是紧致集，所以 $\bigcup_{i=1}^{t}R_{x_i}$ 也紧致。因此令 $Q=\bigcup_{i=1}^{t}R_{x_i}$。设 U 为 K 的任意开邻域，使得 $K\subset U\subset Q$，且由稳定性的定义可知：存在 K 的开邻域 V，使得 $K\subset V\subset U$，对 $\forall x\in V$ 以及 $n\in N$ 有 $f^n(x)\in U$。对

$$\forall x\in Q,\exists n(x)\in N,s.t.f^{n(x)}(x)\in V$$

(因为 $\omega(x)\subset K$)。由 $f^{n(x)}$ 的连续性，因此存在 x 的开邻域 W_x，使得 $f^{n(x)}(W_x)\subset V$。则 $\{W_x\}_{x\in Q}$ 为 Q 的一个开覆盖，因为 $\bigcup_{x\in Q}W_x\supset Q$，所以存在 $x_1,x_2,\cdots,x_l\in Q$，使得 $\bigcup_{i=1}^{l}W_{x_i}\supset Q$，取 $N=\max\{n(x_1),\cdots,n(x_l)\}$，则对 $\forall x\in Q$，由 $f^{n(x)}(W_x)\subset V$ 可知，当 $n(x_i)\leq N$，有 $f^{n(x_i)}(x)\in V$，则 $f^{n(x_i)}(x)$ 的轨道包含于 U，因此对所有 $n\geq N$，有 $f^n(x)\in U$。对 $\forall y\in f^n(Q)$，存在 $x\in Q$，使得 $f^n(x)=y$，因为 $x\in Q$，则当 $n\geq N$ 时，有 $f^n(x)\in U$，从而得到 $f^n(Q)\subset U$。

引理 3.4：集合 X 为局部紧致的度量空间。设 $f:X\to X$ 为同胚映射，且设 $K\subset X$ 为全局吸引子。取 $\forall x\in X$，要么 $x\in\tilde{K}$，要么 $\alpha(x)=\phi$ (*i.e.* x 的负轨道远离任何紧致集)

证明：设 $x\in X$，假设 $\alpha(x)\neq\phi$，取 $y\in\alpha(x)$，由 K 是全局吸引子，则 $\omega(y)\neq\phi$，$\omega(y)\subset K$ 且 $\omega(y)\subset\alpha(x)$(因为 $\alpha(x)$ 强不变，则 $f^n(y)\in\alpha(x)$。令 $B=\{f^n(y);n\geq 0\}$，则 $\omega(y)\subset\bar{B}\subset\alpha(x)$，所以 $\omega(y)\subset\alpha(x)$)

$$\therefore\ \alpha(x)\cap K\neq\phi，因此 x\in\tilde{K}。$$

命题 3.5： 设 $f:X\to X$ 同胚，其中 X 为局部紧致度量空间，假设 $K\subset X$ 为吸引子且如果存在 K 的紧致邻域 Q，使得

1) $f(Q)\subset Q$。
2) $\bigcap_{n\geq 0}f^n(Q)\subset K$。

那么 K 是渐进稳定集。

证明：因为 $f(Q)\subset Q$，所以对 $n\geq 0$，有 $f^n(Q)\subset Q$。所以紧致集 $\{f^n(Q),n\geq 0\}$ 形成一个递减序列。再者，因为 $\bigcap_{n\geq 0}f^n(Q)\subset K$，因此 $\exists N$，当 $n\geq N$ 时，有 $f^n(Q)\subset K$，因此令 U 为 K 的任何邻域，$\exists N$，当 $n\geq N$ 时，$f^n(Q)\subset U$，再由引理 3.2 可知 K 是渐进稳定集。

推论 3.6： 设 $f:X\to X$ 同胚，其中 X 为局部紧致度量空间，假设 $K\subset X$ 为吸引子且如果存在 K 的紧致邻域 Q，使得 $f(Q)\subset Q$。

那么 $\bigcap_{n\geq 0}f^n(Q)=K$ 是渐进稳定集。

证明：由 $\bigcap_{n\geq 0}f^n(Q)=K$ 蕴含 $\bigcap_{n\geq 0}f^n(Q)\subset K$，则由命题 3.5 可知 $\bigcap_{n\geq 0}f^n(Q)=K$ 是渐进稳定集。

4. 主要定理证明

定理 4.1： 设 $f:X\to X$ 为同胚映射，其中 X 为局部紧致的度量空间。若对 $\forall x\in X$，$\omega(x)\neq\phi$，$K\subset X$ 为紧致强不变集，且存在一个紧致邻域 Q，使得 $Q\setminus K$ 包含不完整负轨道，则 K 是渐进稳定集。

首先证明 K 是稳定的。如果 K 是不稳定的，则存在 K 的一个开邻域 U，使得 $K\subset U$ 且对任意的开邻域 $V\supset K$，存在 $x\in V$ 以及 $n\in N$，使得 $f^n(x)\notin U$。

因为 Q 是 K 的一个紧致邻域，则存在 Q 的一个序列 $\{x_k\}_k$，使得：

- $\exists n_k\geq 0$，$f^{n_k}(x_k)\notin U$；
- $\lim x_k=x\in K$。

则序列 $\{x_k\}_k$ 包含一个子序列，仍记为 $\{x_k\}_k$，$s.t.f^{n_k-1}(x_k)\to y_0$，其中 $y_0\in Q$ 且 $f(y_0)\notin U$，因为 K 强不变，因此有 $y_0\notin K$。同样，序列 $\{x_k\}_k$ 包含一个子序列，再一次记为 $\{x_k\}_k$，$s.t.f^{n_k-2}(x_k)\to y_1$，其中 $f(y_1)=y_0$ 且 $y_1\in Q\setminus K(n\geq 1)$，以同样的方式进行，可以构造一个无限序列($y_n$)，使得 $f(y_n)=y_{n-1}$ 且 $y_n\in Q\setminus K(n\geq 1)$，与假设矛盾。

因此，对 K 中的任意开邻域 U，存在 K 的开邻域 V，并且使得 $K\subset V\subset U$，对 $\forall x\in V$ 以及 $n\geq 0$，有 $f^n(x)\in U$。

为了完成证明，接着证明 K 为吸引子。因为有 $\omega(x)\neq\phi$，因此只需证明对 $\forall x\in V$，$\omega(x)\subset K$ 即可，若不是，即存在 $x\in V$，使得 $\omega(x)\not\subset K$。则存在 $x\in V\setminus K$ 且存在一个开集 W，使得 $K\subset W\subset V$，对无穷多的 n，有 $f^n(x)\notin W$。因此存在 $n_k\to\infty$ 使得 $f^{n_k}(x)\to y_0$，其中 $y_0\in Q|W$。因为 $y_0\in\omega(x)$ 且 $\omega(x)$ 强不变，所以有 $y_0\in f(\omega(x))$ 则存在一个点 $y_1\in\omega(x)$，使得 $f(y_1)=y_0$，同样 $y_1\in Q|K$。照这样进行，再一次得到矛盾。综上得到 K 是渐进稳定集。

定理 4.2： 设集合 X 为局部紧致的度量空间，$f:X\to X$ 同胚。若 X 的每一个有界闭集都是紧致的，且 $K\subset X$ 为吸引子，则 $\tilde{K}$ 是渐进稳定的，其中 $\tilde{K}$ 与 K 有相同的吸引域。更多的，K 是渐近稳定的当且仅当 $\tilde{K}=K$。

证明：由定义知 $\tilde{K}=\{x\in A(K):\alpha(x)\cap K\neq\phi\}$，可知 $\tilde{K}$ 强不变。现在证明 $\tilde{K}$ 是紧致的。

由引理3.1可知，存在 K 的一个紧致邻域 Q，使得 $f(Q)\subset Q$。断言 $f^{-1}(Q^c)\subset Q^c$，这是因为 $f(Q)\subset Q$，$Q\subset f^{-1}(Q)$，因此 $Q^c\supset\left[f^{-1}(Q)\right]^c$，要证 $f^{-1}(Q^c)\subset Q^c$，只需证明 $f^{-1}(Q^c)\subset\left[f^{-1}(Q)\right]^c$。

对 $\forall y\in f^{-1}(Q^c)$，则 $\exists x\in Q^c$，$s.t. f^{-1}(x)=y$，又因为 $x\in Q^c$，所以 $x\notin Q$，则 $f^{-1}(x)\notin f^{-1}(Q)$，因此 $f^{-1}(x)\in\left[f^{-1}(Q)\right]^c$，因此有 $f^{-1}(Q^c)\subset Q^c$，从而得证。且则 $\tilde{K}\subset Q$（这是因为 $\forall x\in Q^c$，所以有 $f^{-n}(x)\in Q^c$。令 $B=\{f^{-n}(x);n\geq 0\}$，所以 $\alpha(x)\subset\overline{B}\subset\overline{Q^c}\subset\left[\operatorname{int}(Q)\right]^c=\left[\operatorname{int}(Q)\right]^c$，固有 $\alpha(x)\subset\left[\operatorname{int}(Q)\right]^c$，所以 $\alpha(x)\cap K=\phi$，因此有 $x\notin\tilde{K}$，则 $x\in\tilde{K}^c$，于是 $Q^c\subset\tilde{K}^c$，则有 $\tilde{K}\subset Q$）。因此 $\tilde{K}$ 有界。接着证明 $\tilde{K}^c$ 是开集。

设 $p\in\tilde{K}^c$，由引理3.4，存在 $n\geq 0$，使得 $f^{-n}(p)\in Q^c$，设 V 为 p 的一个邻域，由 f^{-n} 的连续性知有 $f^{-n}(V)\subset Q^c$。因为对 $\forall x\in V$，有 $f^{-n}(x)\in f^{-n}(V)\subset Q^c$，令 $B=\{f^{-n}(x);n\geq 0\}$，则 $\alpha(x)\subset\overline{B}\subset\overline{Q^c}$，所以 $\forall x\in V$ 有 $\alpha(x)\subset\overline{Q^c}$。所以有 $V\subset\tilde{K}^c$（若不然，则存在 $x\in V$ 且 $x\notin\tilde{K}^c$，即有 $x\in\tilde{K}$，因为 $\tilde{K}$ 强不变，所以对任意 $n\geq 0$，有 $f^{-n}(x)\in\tilde{K}\subset Q$，矛盾。）。于是得证 $\tilde{K}^c$，则 $\tilde{K}$ 是闭集。再由定理的条件知，$\tilde{K}$ 是紧致集。由 K 和 $\tilde{K}$ 定义可知，对 $\forall x\in K$，因为 $f(K)=K$，则 $\exists y\in K, s.t. f(y)=x$，因此 $y=f^{-1}(x)$，所以 $f^{-n}(x)=f^{-n+1}(y)\in K$，令 $B=\{f^{-n}(x);n\geq 0\}$，则 $\alpha(x)\subset\overline{B}\subset K$，所以有 $\alpha(x)\cap K\neq\phi$，于是有 $x\in\tilde{K}$，因此，$K\subset\tilde{K}$。所以 $\tilde{K}$ 为吸引子。

下面证明 $\tilde{K}$ 是渐近稳定的。因为已经证明 $\tilde{K}$ 为吸引子，要证明 $\tilde{K}$ 是渐近稳定的，只需要证明 $\tilde{K}$ 是稳定的即可。假设不是，则存在 $\tilde{K}$ 的一个开邻域 U，使得对 $\tilde{K}$ 的任意开邻域 V，$\exists x\in V$ 以及 $n_x\geq 0$，$s.t. f^{n_x}(x)\notin U$。

设 Q 为 $\tilde{K}$ 的一个紧致且正不变邻域，则存在 Q 的一个序列 $\{x_k\}_k$ 使得

- 存在 $n_k\geq 0$，使得 $f^{n_k}(x_k)\notin U$；
- $\lim x_k=x\in\tilde{K}$。

以上成立是因为，取 $V_1\subset U, V_1\supset\tilde{K}$，$\exists x_1\in V_1, n_1>0, s.t. f^{n_1}(x_1)\notin U$，令 $r_1=d(x_1,\tilde{K})$ 为 V_1 的半径，在这里我们由定理条件知道 $\overline{V_1}$ 是紧集；

取 $V_2=\bigcup_{x\in\tilde{K}}B\left(x,\frac{r_1}{2}\right)$，$\exists x_2\in V_2, n_2>0, s.t. f^{n_2}(x_2)\notin U$，令 $r_2=d(x_2,\tilde{K})$ 为 V_2 的半径，在这里我们知道 $\overline{V_2}$ 是紧集；

$$V_3=\bigcup_{x\in\tilde{K}}B\left(x,\frac{r_2}{2}\right),\quad \exists x_3\in V_3, n_3>0, s.t. f^{n_3}(x_3)\notin U;$$

$$\vdots$$

因此存在一个子序列 $\{x_k\}_k$，$\exists n_k>0, s.t. f^{n_k}(x_k)\notin U$。

第二条，如果 $x\notin\tilde{K}$，首先我们由第一条的分析可知 $d(x_k,\tilde{K})\to 0$，因为 $x\notin\tilde{K}$，所以有 $r=d(x,\tilde{K})>0$，又因为 $\lim x_k=x$，由极限的定义可知，取 $\varepsilon=\frac{r}{2}$，$\exists N$，当 $k>N$，$s.t. d(x_k,x)<\varepsilon$，对 $\forall y\in\tilde{K}$，由三角不等式，

$$d(x_k,y)+d(x_k,x)>d(x,y)$$

$$\therefore d(x_k,y)>d(x,y)-d(x_k,x)\geq\frac{r}{2}$$

$$\therefore d(x_k,\tilde{K})\geq\frac{r}{2}\text{ 与 } d(x_k,\tilde{K})\to 0\text{ 矛盾。}$$

因为 $x_k\in Q$ 且 Q 正不变，有 $f^{n_k}(x_k)\to y\in Q\setminus U$（如果需要取 $\{x_k\}_k$ 的子序列)。这里显然有 $y\in Q$，

我们证明 $y \notin U$，假设 $y \in U$，则由 y 是 U 的内点，则存在一个 ε-邻域，同样取这 ε，$\exists N$，当 $n_k > N$ 时，$d\left(f^{n_k}\left(x_k\right), y\right) < \varepsilon$，即 $f^{n_k}\left(x_k\right) \subset B\left(y, \varepsilon\right) \subset U$，与 $f^{n_k}\left(x_k\right) \notin U$ 矛盾。

由引理 3.4，存在 $j > 0$ 且存在 y 的一个邻域 V，使得 $f^{-j}\left(y\right) \in Q^c$ 且由 f^{-j} 连续性有 $f^{-j}\left(V\right) \subset Q^c$。

断言序列 $n_k \to \infty$。假设 $\left(n_k\right)$ 有界，取子序列 $\left\{x_{k_i}\right\}_i$，$s.t. x_{k_i} \to x$ 且对一些常数 n 有 $f^n\left(x_k\right) \to y$，因此 $y = f^n\left(x\right)$，这与 $\tilde{K}$ 强不变矛盾。因为 $y \in V$，取 $\varepsilon > 0$，使得 $B\left(y, \varepsilon\right) \subset V$，存在 N，使得当 $n_k > N$ 时，$d\left(f^{n_k}\left(x_k\right), y\right) < \varepsilon$，蕴含 $f^{n_k}\left(x_k\right) \in V$，所以设 $k_0 \in N$，$\forall k > k_0$，存在 N，当 $n_k > N$ 时有 $f^{n_k}\left(x_k\right) \in V$。则 $f^{n_{k-j}}\left(x_k\right) \in Q^c$，且因为序列 $\left(n_k\right)$ 无界，存在一些 k，使得 $n_{k-j} > 0$ 与 Q 正不变矛盾，因此 $\tilde{K}$ 是渐近稳定的。

显然当 $\tilde{K} = K$，则 K 是渐近稳定的。下证反向。

假设 $\tilde{K} \neq K$，则由 $K \subset \tilde{K}$，存在 $x \in \tilde{K} \setminus K$，则 $\alpha\left(x\right) \cap K \neq \phi$，所以对 $\forall \varepsilon$，设

$$B_\varepsilon = \left\{y \in X, d\left(y, K\right) < \varepsilon\right\}，\ \exists y \in \alpha\left(x\right) \cap K, \therefore B\left(y, \varepsilon\right) \subset B_\varepsilon，$$

又因为 $y \in \alpha\left(x\right)$，$\therefore \exists n_k \to \infty, s.t. f^{-n_k}\left(x\right) \to y$，所以，$\exists N$，当 $n_k > N$ 时，$d\left(f^{-n_k}\left(x\right), y\right) < \varepsilon$，即 $B_\varepsilon = \left\{y \in X; d\left(y, K\right) < \varepsilon\right\}$ 包含一些 x 的原像，这与 K 的稳定性矛盾。证完。

参考文献

[1] Block, L.S. and Coppel, W.A. (1979) Dynamics in one Dimension. *Magnetic Domain Walls in Bubble Materials*, **82**, 123-143.

[2] Cai, C., Goebel, R. and Teel, A.R. (2008) Smooth Lyapunov Functions for Hybrid Systems Part II: (Pre)Asymptotically Stable Compact Sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **53**, 734-748. https://doi.org/10.1109/TAC.2008.919257

[3] Gasull, A., Groisman, J. and Mañosas, F. (2016) Linearization of Planar Homeomorphisms with a Compact Attractor. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **48**, 493-506. https://doi.org/10.12775/TMNA.2016.055

[4] 廖公夫, 王立冬, 范钦杰. 映射迭代与混沌动力系统[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[5] 熊金成. 点集拓扑讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.