Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(6), 723-729
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.86097

The Gracefulness and Sequences of $P_n(m)$

Chunfeng Liu[1,2]

[1]Department of Mathematics Science, Liaoning University of Technology, Jinzhou Liaoning
[2]Jinzhou Education Bureau, Jinzhou Liaoning
Email: liuchunfeng968@163.com

Received: Nov. 7th, 2018; accepted: Nov. 23rd, 2018; published: Nov. 30th, 2018

Abstract

The labelling of a graph G is injection g of the labels of vertices to a set of integers, and the labels of each edge $e = uv$ are induced by the $g(u)$ and $g(v)$. In the paper, the k-gracefulness and sequence of graphs are given, and we also prove $P_n(m)$ graph is k-graceful, sequential, and harmonious.

Keywords

Graceful Graph, Sequential Graph, Vertex Labelling

链路$P_n(m)$优美性和序列性

刘春峰[1,2]

[1]辽宁工业大学数理系，辽宁 锦州
[2]锦州市教育局，辽宁 锦州
Email: liuchunfeng968@163.com

收稿日期：2018年11月7日；录用日期：2018年11月23日；发布日期：2018年11月30日

摘 要

图G的标号是指G的顶点集到一个整数集的映射g，且对$e = uv \in E(G)$由$g(u)$和$g(v)$诱导出边e的标号。本文给出了链路$P_n(m)$的k-优美性和序列性。即证明了图$P_n(m)$是k-优美图和序列图，从而也是调和图。进而推广了原有的一些结果。

关键词

优美图，序列图，顶点标号

文章引用：刘春峰. 链路 $P_n(m)$优美性和序列性[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 723-729. DOI: 10.12677/pm.2018.86097

1. 引言及主要结果

图的标号理论在编码、雷达、通信网络、射电天文学等方面均有广泛的应用。本文主要研究由路 P_n 构造的图 $\boldsymbol{P_n(m)}$的 k-优美标号和序列标号。文中 $G=(V,E)$ 表示一个顶点集为 V，边集为 E 且没有孤立点的简单图。文中未提及的术语见[1]。

定义 1： 称图 $G=(A,B)$ 是 k-优美(k-graceful)图，如果对任何正整数 k，

$$f:V(G)\to\{0,1,2,\cdots,|E|+k-1\}$$

使的由

$$f'(uv)=|f(u)-f(v)|$$

所导出的函数对所有的边 $e=uv\in E(G)$，其映射

$$E(G)\to\{k,k+1,\cdots,k+|E|-1\}$$

是一个双射。称 f 为 G 的一个 k-优美标号。显然 k-优美图，当 $k=1$ 时，就是通常所说的优美图。

定义 2： 称图 $G=(A,B)$ 是序列图(*sequential graph*)，如果存在一个单射，

$$\theta:V(G)\to\{0,1,2,\cdots,|E|-1\}$$

(如果 G 是树，则也包含$|E|$)使的由

$$\theta'(uv)=\theta(u)+\theta(v)$$

所导出的函数对所有的边 $e=uv\in E(G)$，其映射

$$E(G)\to\{c,c+1,\cdots,c+|E|-1\}$$

是一个双射(其中 c 为某一非负整数)。称 θ 为 G 的一个序列标号。

在定义 2 中的单射 θ，若使函数 $\theta''(uv)=\theta(u)+\theta(v)(\bmod|E|)$(对 $uv\in E(G)$ 为边集 $E(G)\to\{0,1,2,\cdots,|E|-1\}$ 的双射，则称 θ 为 G 的一个调和标号。称 G 为调和图。

由定义 2 可以看出，若把图的序列标号对边数$|E|$取摸，就得到了该图的调和标号，即序列标号只是调和标号的特殊情。

定义 3： 对于自然数 $n\ge3$，设 $P_n=x_1x_2\cdots x_n$ 为 n 个点的路，在 P_n 上 x_i 与 x_{i+2} 之间增加 $m_i\ge1$ 条长为二的路 $x_iy_{i,j}x_{i+2}$，$i=1,2,\cdots,n-2$，$j=1,2,\cdots,m_i$，所得的图称为链路。记作 $P_n(m_1,m_2,\cdots,m_{n-2})$。链路满足

$$V(P_n(m_1,m_2,\cdots,m_{n-2}))=V(P_n)\cup\{y_{i,j}\mid 1\le i\le n-2,1\le j\le m_i\},$$

$$E(P_n(m_1,m_2,\cdots,m_{n-2}))=E(P_n)\cup\{x_iy_{i,j},y_{i,j}x_{i+2}\mid 1\le i\le n-2,1\le j\le m_i\}.$$

若 $m_i=m\ge1$，$1\le i\le n-2$，记 $P_n(m_1,m_2,\cdots,m_{n-2})$ 为 $P_n(m)$。如图 1，图 2 所示。

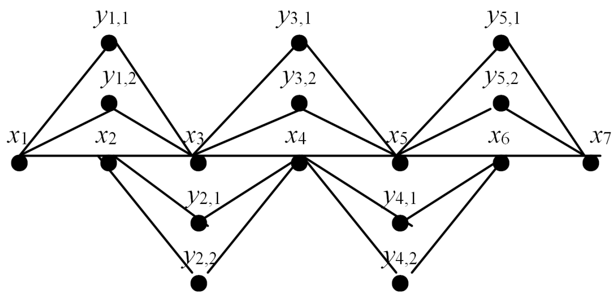

Figure 1. $P_7(2)$
图 1. 图 $P_7(2)$

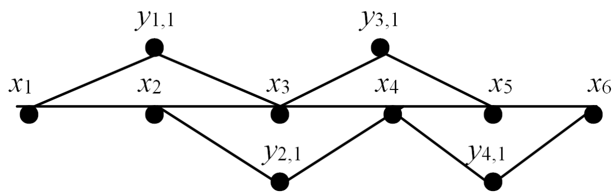

Figure 2. $P_6(1)$
图 2. 图 $P_6(1)$

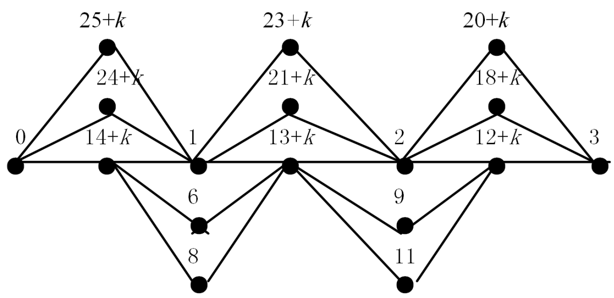

Figure 3. $P_7(2)$ and k-graceful labelling
图 3. 图 $P_7(2)$及其 k-优美标号

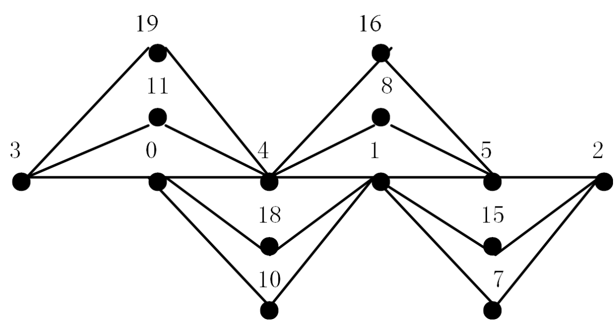

Figure 4. $P_6(2)$ and sequential labelling
图 4. 图 $P_6(2)$及其序列标号

本文给出了图 $P_n(m)$的 k-优美标号和序列标号。得到了如下定理。

定理 1： 对于自然数 $n \ge 3$， $m \ge 1$， $P_n(m)$是 k-优美图。

定理 2： 对于自然数 $n \ge 4$， $m \ge 1$， $P_n(m)$是序列图。

推论 1： ([2]中定理 1)对于自然数 $n \ge 3$， $P_n(2)$是优美图。

推论 2： 对于自然数 $n \ge 4$， $m \ge 1$， $P_n(m)$是调和图。

文中图 3 是图 $P_7(2)$的 k-优美标号，图 4 是图 $P_6(2)$的序列标号

可以进一步讨论图 $P_n(m_1,m_2,\cdots,m_{n-2})$ 优美性和序列性，我们有：

问提 1：对于自然数 $n\ge 3$， $m_i\ge 1$， $1\le i\le n-2$， $P_n(m_1,m_2,\cdots,m_{n-2})$ 是否是 k-优美图？

问提 2：对于自然数 $n\ge 4$， $m_i\ge 1$， $1\le i\le n-2$， $P_n(m_1,m_2,\cdots,m_{n-2})$ 是否是序列图？

2. 定理的证明

$$\left|V(P_n(m))\right| = mn-2m+n\text{，}\quad \left|E(P_n(m))\right| = 2mn-4m+n-1\text{。}$$

2.1. 定理 1 的证明

分两重情况定义 $P_n(m)$的顶点标号 f 如下：

情况 1：n 为奇数

$$f(x_{2i-1}) = i-1,\ i=1,\cdots,(n+1)/2,$$

$$f(x_{2i}) = mn-3m+n-i+k-1,\ i=1,\cdots,(n-1)/2,$$

$$f(y_{2i-1,j}) = 2mn-2m+n-(2m-1)i-2j+k-1,\ i=1,\cdots,(n-1)/2,\ j=1,\cdots,m,$$

$$f(y_{2i,j}) = n-2m-2+(2m-1)i+2j,\ i=1,\cdots,(n-3)/2,\ j=1,\cdots,m.$$

下面验证 f 是 $P_n(m)$的 k-优美标号。

1) 不同的顶点其标号不同。

a) 显然有如下结论：

$$f(x_{2i-1})\ne f(x_{2j-1})\ (i\ne j,\ 1\le i,j\le (n+1)/2),$$

$$f(x_{2i})\ne f(x_{2j})\ (i\ne j, 1\le i,j\le (n-1)/2),$$

$$f(y_{2i-1,s})\ne f(y_{2j-1,t})\ (i=j\text{ 时，}s\ne t\text{；}\ s=t\text{ 时，}i\ne j,\ 1\le s,t\le m,\ 1\le i,j\le (n-1)/2),$$

$$f(y_{2i,s})\ne f(y_{2j,t})\ (i=j\text{ 时，}s\ne t\text{；}\ s=t\text{ 时，}i\ne j,\ 1\le s,t\le m,\ 1\le i,j\le (n-3)/2).$$

b) 设

$$\mathrm{A}_0=\{f(x_{2i-1})\,|\,1\le i\le (n+1)/2\},\ \mathrm{C}_0=\{f(y_{2i-1,j})\,|\,1\le i\le (n-1)/2, 1\le j\le m\},$$

$$\mathrm{A}_1=\{f(x_{2i})\,|\,1\le i\le (n-1)/2\},\ \mathrm{C}_1=\{f(y_{2i,j})\,|\,1\le i\le (n-3)/2, 1\le j\le m\}.$$

有

$$\mathrm{A}_0\cap\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_0\cap\mathrm{C}_0=\mathrm{A}_0\cap\mathrm{C}_1=\mathrm{A}_1\cap\mathrm{C}_0=\mathrm{A}_1\cap\mathrm{C}_1=\mathrm{C}_0\cap\mathrm{C}_1=\varnothing.$$

事实上

$$\min\mathrm{A}_0=f(x_1)=0,\ \max\mathrm{A}_0=f(x_n)=(n-1)/2,$$

$$\min\mathrm{A}_1=f(x_{n-1})=mn-3m+(n-1)/2+k,\ \max\mathrm{A}_1=f(x_2)=mn-3m+n-2+k,$$

$$\min\mathrm{C}_0=f(y_{n-2,m})=mn-3m+3(n-1)/2+k,\ \max\mathrm{C}_0=f(y_{1,1})=2mn-4m+n-2+k,$$

$$\min\mathrm{C}_1=f(y_{1,1})=n-1,\ \max\mathrm{C}_1=f(y_{n-3,m})=mn-3m+(n-1)/2.$$

于是有 $\min\mathrm{A}_0<\max\mathrm{A}_0<\min\mathrm{C}_1<\max\mathrm{C}_1<\min\mathrm{A}_1<\max\mathrm{A}_1<\min\mathrm{C}_0<\max\mathrm{C}_0$。

2) $\max\left\{f(v)\mid v\in V\left(P_n(m)\right)\right\}=\max \mathrm{C}_0=2mn-4m+n-2+k=k+\left|E\left(P_n(m)\right)\right|-1$。

3) 不同的边其标号不同。

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1&=\left\{\left|f\left(y_{2i-1,j}\right)-f\left(x_{2i-1}\right)\right|,\left|f\left(y_{2i-1,j}\right)-f\left(x_{2i+1}\right)\right|\middle|1\le i\le (n-1)/2,1\le j\le m\right\}\\&=\left\{2mn-4m+n-2+k,2mn-4m+n-3+k,\cdots,mn-3m+n-1+k\right\}\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_2&=\left\{\left|f\left(x_{2i}\right)-f\left(x_{2i-1}\right)\right|,\left|f\left(x_{2i}\right)-f\left(x_{2i+1}\right)\right|\middle|1\le i\le (n-1)/2\right\}\\&=\left\{mn-3m+n-2+k,mn-3m+n-3+k,\cdots,mn-3m+k\right\}\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_3&=\left\{\left|f\left(y_{2i,j}\right)-f\left(x_{2i}\right)\right|,\left|f\left(y_{2i,j}\right)-f\left(x_{2i+2}\right)\right|\middle|1\le i\le (n-3)/2,1\le j\le m\right\}\\&=\left\{mn-3m-1+k,mn-3m-2+k,\cdots,k\right\}\end{aligned}.$$

由(3)显然有 $\forall a,b\in \mathrm{I}_i$， $i=1,2,3$， 有 $a\ne b$。又因

$$\max \mathrm{I}_1=2mn-4m+n-2+k,\quad \min \mathrm{I}_1=mn-3m+n-1+k,$$

$$\max \mathrm{I}_2=mn-3m+n-2+k,\quad \min \mathrm{I}_2=mn-3m+k,$$

$$\max \mathrm{I}_3=mn-3m-1+k,\quad \min \mathrm{I}_3=k.$$

得 $\min \mathrm{I}_3<\max \mathrm{I}_3<\min \mathrm{I}_2<\max \mathrm{I}_2<\min \mathrm{I}_1<\max \mathrm{I}_1$，进而有， $\mathrm{I}_i\cap \mathrm{I}_j=\varnothing$， $i\ne j$， $1\le i,j\le 3$。于是 $\forall a,b\in \mathrm{I}_1\cup \mathrm{I}_2\cup \mathrm{I}_3$，有 $a\ne b$。

4) $\max\left\{f'(e)\mid e\in E\left(P_n(m)\right)\right\}=\max \mathrm{I}_1=2mn-4m+n-2+k=k+\left|E\left(P_n(m)\right)\right|-1$。

综合(1)~(4)，由优美图的定义知，f 是 $P_n(m)$的 k—优美标号。故得 $P_n(m)$是 k-优美图。

情况 2： n 为偶数

$$f\left(x_{2i-1}\right)=i-1,\quad i=1,\cdots,n/2,$$

$$f\left(x_{2i}\right)=mn-2m+n-i+k-1,\quad i=1,\cdots,n/2,$$

$$f\left(y_{2i-1,j}\right)=2mn-2m+n-(2m-1)i-2j+k-1,\quad i=1,\cdots,(n-2)/2,\quad j=1,\cdots,m,$$

$$f\left(y_{2i,j}\right)=n-2m-2+(2m-1)i+2j,\quad i=1,\cdots,(n-2)/2,\quad j=1,\cdots,m.$$

类似于情况 1 的证明，易验证在情况 2 中 f 是 $P_n(m)$的 k-优美标号。

定理 1 证毕。

2.2. 定理 2 的证明

分两重情况定义 $P_n(m)$的顶点标号如下：

情况 1： $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$

情况 1.1： n 为奇数

$$\theta\left(x_{2i-1}\right)=(n-1)/2+i,\quad i=1,\cdots,(n+1)/2,$$

$$\theta\left(x_{2i}\right)=i-1,\quad i=1,\cdots,(n-1)/2,$$

$$\theta\left(y_{2i-1,j}\right)=2mn-4m+3n-4-3i-2j(n-2),\quad i=1,\cdots,(n-1)/2,\quad j=1,\cdots,m,$$

$$\theta\left(y_{2i,j}\right)=2mn-4m+5(n-1)/2-3i-2j(n-2),\quad i=1,\cdots,(n-3)/2,\quad j=1,\cdots,m.$$

下面验证 θ 是 $P_n(m)$的序列标号。

1) 不同的顶点其标号不同。

a) 设

$$\mathrm{B}=\left\{\theta\left(x_{2i}\right)|1\le i\le (n-1)/2\right\}\cup\left\{\theta\left(x_{2i-1}\right)|1\le i\le (n+1)/2\right\},$$

$$\mathrm{C}_j=\left\{\theta\left(y_{2i-1,j}\right)|1\le i\le (n-1)/2\right\},\quad j=1,\cdots,m,$$

$$\mathrm{D}_j=\left\{\theta\left(y_{2i,j}\right)|1\le i\le (n-3)/2\right\},\quad j=1,\cdots,m.$$

由 θ 的定义有

$$\min\mathrm{B}=0,\quad \max\mathrm{B}=n,$$

$$\min\mathrm{C}_j=2mn-4m+(3n-5)/2-2j(n-2),\quad j=1,\cdots,m,$$

$$\max\mathrm{C}_j=2mn-4m+3n-7-2j(n-2),\quad j=1,\cdots,m,$$

$$\min\mathrm{D}_j=2mn-4m+n+2,\quad j=1,\cdots,m,$$

$$\max\mathrm{D}_j=2mn-4m+5(n-1)/2-3-2j(n-2),\quad j=1,\cdots,m,$$

得 $\begin{array}{l}\min\mathrm{B}<\max\mathrm{B}<\min\mathrm{D}_m<\max\mathrm{D}_m<\min\mathrm{C}_m<\max\mathrm{C}_m<\min\mathrm{D}_{m-1}<\max\mathrm{D}_{m-1}\\ <\cdots<\min\mathrm{D}_1<\max\mathrm{D}_1<\min\mathrm{C}_1<\max\mathrm{C}_1\end{array}$。于是有 $\mathrm{B}\cap\mathrm{C}_j=\mathrm{B}\cap\mathrm{D}_j=\mathrm{C}_j\cap\mathrm{D}_j=\varnothing$，$j=1,\cdots,m$。得 $\forall u,v\in V\left(P_n(m)\right)$，若 $u\ne v$，有 $\theta(u)\ne\theta(v)$。

2) $\max\left\{\theta(v)|v\in V\left(P_n(m)\right)\right\}=2mn-4m+n-3<2mn-4m+n-1=\left|E\left(P_n(m)\right)\right|$。

3) 不同的边其标号不同。

$$\mathrm{J}_0=\left\{\theta(x_i)+\theta(x_{i+1})|1\le i\le n-1\right\}=\left\{(n+1)/2,(n+1)/2+1,\cdots,(n+1)/2+n-2\right\},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{1,j}&=\left\{\theta\left(y_{2i-1,j}\right)+\theta\left(x_{2i+1}\right),\theta\left(y_{2i-1,j}\right)+\theta\left(x_{2i-1}\right)|1\le i\le (n-1)/2\right\}\\&=\{2mn-4m+(7n-11)/2-2j(n-2),2mn-4m+(7n-11)/2-1-2j(n-2),,\\&\quad\cdots,2mn-4m+(5n-7)/2-2j(n-2)\},\quad j=1,\cdots,m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{2,j}&=\left\{\theta\left(y_{2i,j}\right)+\theta\left(x_{2i+2}\right),\theta\left(y_{2i,j}\right)+\theta\left(x_{2i}\right)|1\le i\le (n-3)/2\right\}\\&=\left\{2mn-4m+(5n-9)/2-2j(n-2),\cdots,2mn-4m+(3n-1)/2-2j(n-2)\right\},\quad j=1,\cdots,m\end{aligned},$$

有

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_1&=\mathrm{J}_{2,m}\cup\mathrm{J}_{1,m}\\&=\left\{(3n-1)/2,(3n-1)/2+1,\cdots,(5n-9)/2\right\}\\&\quad\cup\left\{(5n-7)/2,(5n-7)/2+1,\cdots,(7n-11)/2\right\}\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_2&=\mathrm{J}_{2,m-1}\cup\mathrm{J}_{1,m-1}\\&=\left\{(7n-9)/2,(7n-9)/2+1,\cdots,(9n-17)/2\right\}\\&\quad\cup\left\{(9n-15)/2,(9n-15)/2+1,\cdots,(11n-19)/2\right\}\end{aligned},$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_m&=\mathrm{J}_{2,1}\cup\mathrm{J}_{1,1}\\&=\left\{2mn-4m-(n-7)/2,2mn-4m-(n-7)/2+1,\cdots,2mn-4m+(n-1)/2\right\}\\&\quad\cup\left\{2mn-4m+(n+1)/2,2mn-4m+(n+1)/2+1,\cdots,2mn-4m+3(n-1)/2\right\}\end{aligned}。$$

于是有 $J_i \cap J_j = \varnothing$，$i \neq j$，$0 \le i, j \le m$，故得 $\forall e, f \in E(P_n(m))$，若 $e \neq f$，有 $\theta(e) \neq \theta(f)$。

4)
$$\begin{aligned} J &= J_0 \cup J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_m \\ &= \{(n+1)/2, (n+1)/2+1, \cdots, 2mn-4m+3(n-1)/2\} \\ &= \{(n+1)/2, (n+1)/2+1, \cdots, (n+1)/2+|E(P_n(m))|\} \end{aligned}$$
。

综合(1)~(4)，由序列图的定义知，θ 是 $P_n(m)$的序列标号。故得 $P_n(m)$是序列图。

情况 1.2： n 为偶数

$$\theta(x_{2i-1}) = n/2 + i,\ \ i = 1, \cdots, n/2,$$

$$\theta(x_{2i}) = i - 1,\ \ i = 1, \cdots, n/2,$$

$$\theta(y_{2i-1,j}) = 2mn - 4m + 3n - 4 - 3i - 2j(n-2),\ \ i = 1, \cdots, (n-2)/2,\ \ j = 1, \cdots, m,$$

$$\theta(y_{2i,j}) = 2mn - 4m + (5n-2)/2 - 3i - 2j(n-2),\ \ i = 1, \cdots, (n-2)/2,\ \ j = 1, \cdots, m.$$

类似于情况 1.1 的证明，易验证在情况 1.2 中 θ 是 $P_n(m)$的序列标号。

在情况 2 中，可与情况 1 同理验证 θ 是 $P_n(m)$的序列标号。故只给出下列标号，不加验证。

情况 2： $n \equiv 0, 2 \pmod 3$

情况 2.1： n 为奇数

$$\theta(x_{2i-1}) = (n-3)/2 + i,\ \ i = 1, \cdots, (n+1)/2,$$

$$\theta(x_{2i}) = i - 1,\ \ i = 1, \cdots, (n-1)/2,$$

$$\theta(y_{2i-1,j}) = 2mn - 4m + 3n - 4 - 3i - 2j(n-2),\ \ i = 1, \cdots, (n-1)/2,\ \ j = 1, \cdots, m,$$

$$\theta(y_{2i,j}) = 2mn - 4m + (5n-7)/2 - 3i - 2j(n-2),\ \ i = 1, \cdots, (n-3)/2,\ \ j = 1, \cdots, m.$$

情况 2.2： n 为偶数

$$\theta(x_{2i-1}) = (n-2)/2 + i,\ \ i = 1, \cdots, n/2,$$

$$\theta(x_{2i}) = i - 1,\ \ i = 1, \cdots, n/2,$$

$$\theta(y_{2i-1,j}) = 2mn - 4m + 3n - 4 - 3i - 2j(n-2),\ \ i = 1, \cdots, (n-2)/2,\ \ j = 1, \cdots, m,$$

$$\theta(y_{2i,j}) = 2mn - 4m + (5n-4)/2 - 3i - 2j(n-2),\ \ i = 1, \cdots, (n-2)/2,\ \ j = 1, \cdots, m.$$

定理 2 证毕。

参考文献

[1] 马克杰. 优美图[M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.

[2] 路线, 李秀芬. 关于链路 P_n^{2*}的优美性[J]. 上饶师专学报, 1994, 6(14): 26-30.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org