Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(1), 22-28
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.81004

On Research for Some Properties of General Keune Symbol

Lei Wang, Ziqiang Fan

School of Mathematics and Big Data, Anhui University of Science and Technology, Huainan Anhui
Email: 1714939500@qq.com, zqfan71@163.com

Received: Dec. 18th, 2017; accepted: Jan. 1st, 2018; published: Jan. 8th, 2018

Abstract

Keune defined ternary symbol $\langle a,b,c\rangle$ (named by Keune symbol) of commutative ring in 1981, Fan etc generated it to a general ring with identity, and some relations of this symbol are discussed in 2013. In this Paper, we discuss some its properties, these properties are very important to give the presentation of K_2 of stable range one ring.

Keywords

Steinberg Group, K_2 Group, Keune Symbol

关于广义Keune符号的若干性质的研究

王　磊，范自强

安徽理工大学数学与大数据学院，安徽　淮南
Email: 1714939500@qq.com, zqfan71@163.com

收稿日期：2018年12月18日；录用日期：2018年1月1日；发布日期：2018年1月8日

摘　要

1981年，Keune给出了交换环的三元符号$\langle a,b,c\rangle$ (我们称之为Keune符号)。2013年，范自强等将Keune符号推广到一般环(含单位元)，并讨论了该符号的一些关系。本文将讨论广义Keune符号的若干性质，这些性质对研究稳定秩1环的K_2群是非常重要的。

文章引用: 王磊, 范自强. 关于广义 Keune 符号的若干性质的研究[J]. 理论数学, 2018, 8(1): 22-28.
DOI: 10.12677/pm.2018.81004

关键词

Steinberg群，K_2群，Keune符号

1. 引言

设 R 是含有单位元 1 的环。环 R 的 Steinberg 群 $St_n(R)$，其中 $n\geq 3$，由如下的生成元和关系所决定：

生成元：$x_{ij}(r)$，其中 $r\in R$ 且 $1\leq i\neq j\leq n$；

关系：

1) $x_{ij}(r)x_{ij}(s)=x_{ij}(r+s)$；

2) $\left[x_{ij}(r),x_{kl}(s)\right]=\begin{cases}1, & i\neq l, j\neq k,\\ x_{il}(rs), & i\neq l, j=k,\end{cases}$

其中 $[u,v]=uvu^{-1}v^{-1}$ 是换位子。

由于 $e_{ij}(r)$ 是环 R 的初等群 $E_n(R)$ 的生成元，并且满足上述关系，在[1]中，J.Milnor 定义了同态 $\varphi: St_n(R)\to E_n(R), x_{ij}(r)\mapsto e_{ij}(r)$，其中 $n\geq 3$。

在[4]中，范自强等基于[2] [3]，将 Keune 符号推广到非交换环的情形。而本文将研究广义 Keune 符号的若干性质，这些性质对研究稳定秩 1 环的 K_2 群是非常重要的[5]。

2. 群 K(R)的若干关系

以下本文中的 R 均为含单位元 1 的环，$U(R)$是 R 的单位群，i 和 j 为互异的正整数。设 $u\in R$ 且 $u\in U(R)$，令

$$w_{ij}(u)=x_{ij}(u)x_{ji}\left(-u^{-1}\right)x_{ij}(u)$$

设 $a,b,c\in R$ 且 $u=a+c-abc\in U(R), v=a+c-cba$， 令

$$W_{ij}(a,b,c)=x_{ij}(-a)x_{ji}(b)x_{ij}(-c)x_{ji}\left(u^{-1}(1-ab)\right)x_{ij}\left(-v(1-bc)\right)$$

令 $W_n(R)$ 是由 $W_{ij}(a,b,c)$ 生成的 $St_n(R)$ 的子群，其中 $a,b,c\in R$ 且 $a+c-abc\in U(R)$。

设 $a,b,c\in R$ 且 $u=a+c-abc\in U(R), v=a+c-cba$， 令

$$\langle a,b,c\rangle_1=W_{12}(a,b,c)w_{12}(v)$$

称 $\langle a,b,c\rangle_1$ 为 Keune 符号。令 $K(R)$是由 Keune 符号 $\langle a,b,c\rangle_1$ 生成的 $St_n(R)$ 的子群。在[4]中给出了如下定理：

定理 2.1：设 R 是环，在 $K(R)$中符号 $\langle a,b,c\rangle_1$ 满足以下关系：

1) $\langle a,b,c\rangle_1=\langle c,b,a\rangle_1^{-1}$；

2) $\langle a,b,d\rangle_1=\left\langle ub,du^{-1},(1-ab)\right\rangle_1$；

3) $\langle a,b+c-bac,d\rangle_1=\langle a,b,(1-ac)d\rangle_1\cdot\langle a,c,d(1-ba)\rangle_1$；

4) $\langle a,b,c\rangle_1=\langle a\gamma^{-1},\gamma b,c\gamma^{-1}\rangle_1$，其中 $\gamma\in U(R)$；

5) $x\langle a,b,c\rangle_1 x^{-1}=\langle \pi a,b\pi^{-1},\pi c\rangle_1$，其中 $x\in K(R)$ 且 $\pi=\varphi(x)$。

3. 广义 Keune 符号的若干性质

定义 3.1： 设 R 是环，K_R 是由如下生成元和关系所决定的群：
生成元：$\langle a,b,c\rangle$，其中 $a,b,c\in R$ 且 $a+c-abc\in U(R)$；

关系：K1) $\langle a,b,c\rangle^{-1}=\langle c,b,a\rangle$；

K2) $\langle a,b,d\rangle=\langle ub,du^{-1},(1-ab)\rangle$；

K3) $\langle a,b+c-bac,d\rangle=\langle a,b,(1-ac)d\rangle\cdot\langle a,c,d(1-ba)\rangle$；

K4) $\langle a,b,c\rangle=\langle a\gamma^{-1},\gamma b,c\gamma^{-1}\rangle$，其中 $\gamma\in U(R)$；

K5) $\langle A,B,C\rangle\langle a,b,c\rangle\langle A,B,C\rangle^{-1}={}^{x}\langle a,b,c\rangle$，

其中 $x=(A+C-ABC)(A+C-CBA)^{-1}$，${}^{x}\langle a,b,c\rangle=\langle xa,bx^{-1},xc\rangle$。称 $\langle a,b,c\rangle$ 为广义 Keune 符号。

显然存在同态 $\psi:K_R\to K(R)$，$\tau:K_R\to E_n(R)$，$\langle a,b,c\rangle\mapsto\langle a,b,c\rangle_1$。令 $\tau=\varphi\psi$，即同态 $\tau:K_R\to E_n(R)$。

定义 3.2： 若 $a,b\in R$，且 $1-ab,u,v\in U(R)$，$\beta=1-ba$。定义

$\langle a,b\rangle=\langle a-1,-1,b-1\rangle$，$\{u,v\}=\langle u(v-1),u^{-1}\rangle$，我们称 $\langle a,b\rangle$ 为 Dennis-Stein 符号，$\{u,v\}$ 为 Steinberg 符号。

令 D_R 是由所有 $\langle a,b\rangle$ 生成的 K_R 的子群，S_R 是由所有 $\{u,v\}$ 生成的 K_R 的子群。若 $u\in U(R)$，记

$$^{u}a=uau^{-1},\quad {}^{u}\{v,w\}=\{uvu^{-1},uwu^{-1}\},\quad {}^{u}\langle a,b\rangle=\langle uau^{-1},ubu^{-1}\rangle$$

由[4]，我们有

命题 3.3： 下列结论在 D_R 中成立：

D1) $\langle a,b\rangle^{-1}=\langle b,a\rangle$；

D2) $\langle b+c-bac,a\rangle={}^{1-ba}\langle c,a\rangle\cdot\langle b,a\rangle$；

D3) $\langle a,bc\rangle\langle b,ca\rangle\langle c,ab\rangle=1$；

D4) $\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle\langle a,b\rangle^{-1}={}^{\pi}\langle c,d\rangle$，其中 $\pi=(1-ab)(1-ba)^{-1}$。

命题 3.4： 下列结论在 D_R 中成立：

S1) $\{u,1-u\}=1$；

S2) $\{u,-u\}=1$；

S3) $\{u,vw\}=\{u,v\}\cdot{}^{v}\{u,w\}$；

S4) $\{uv,w\}={}^{u}\{v,w\}\{u,w\}$。

由上述命题很容易得到如下两个命题：

命题 3.5： 下列结论在 D_R 中成立：

D5) $\langle a+c,b\rangle=\langle c\alpha^{-1},{}^{\alpha}b\rangle\langle a,b\rangle$，$\langle a,b+c\rangle=\langle a,b\rangle\langle {}^{\beta}a,c\beta^{-1}\rangle$，其中 $\alpha=1-ab$，$\beta=1-ba$；

D6) $\langle a,0\rangle=\langle 0,b\rangle=1$。

命题 3.6： 下列结论在 D_R 中成立：

S5) $\{u,v\}\{v,u\}=1$；

S6) $\{u,1\}=\{1,u\}=1$；

S7) $\{u,vw\}\{v,wu\}\{w,uv\}=1$；

S8) $\{v,u\}={}^{u}\{u^{-1},v\}=\{u^{-1},{}^{u}v\}$；

S9) $\{u,v\}\{u',v'\}\{u,v\}^{-1}={}^{[u,v]}\{u',v'\}$。

命题 3.7： 下列结论在 D_R 中成立：

1) ${}^{u}\{v,v\}=\{v,v\}$，其中 $u,v\in U(R)$；

2) $\{uv,uv\}=\{u,u\}\{v,v\}$，其中 $u,v\in U(R)$；

3) ${}^{u}\{v,w\}=\{v,w\}\{x^{-1},u\}$，其中 $x=[v,w]$，$u\in U(R)$；

4) ${}^{u}\langle a,b\rangle=\langle a,b\rangle\{\pi^{-1},u\}$，其中 $\pi=(1-ab)(1-ba)^{-1}$，$u\in U(R)$；

5) ${}^{u}\rho=\rho\{x^{-1},u\}$，其中 $x=\tau(\rho)$，$\rho\in D_R$，$u\in U(R)$；

6) $\{\alpha,\alpha\}=\{\beta,\beta\}$，其中 $a\in R$ 或者 $b\in R$，$\alpha=1-ab$，$\beta=1-ba$；

7) $\langle a,b\rangle=\{\alpha,\beta^{-1}\}\langle -b\alpha^{-1},a\rangle=\langle b,-a\beta^{-1}\rangle\{\alpha^{-1},\beta\}$，其中 $\alpha=1-ab$，$\beta=1-ba$。

证明： 1) 由 D4 知，$\{v,v\}$ 属于 D_R 的中心，根据 S3，S4 得

$$ {}^{u}\{v,v\}=\{uvu^{-1},uvu^{-1}\}=\{uv,vu^{-1}\}\{u^{-1},uvv\}=\{uvv,u^{-1}\}\{v,v\}\cdot\{u^{-1},uvv\}=\{v,v\} $$

2) 由 S3，S4 得 $\{uv,uv\}=\{uv,u\}\cdot{}^{u}\{uv,v\}={}^{u}\{v,u\}\{u,u\}\{v,v\}\cdot{}^{u}\{u,v\}=\{u,u\}\{v,v\}$

3) 令 $x=[v,w]$，则 $wv=x^{-1}vw$，$\{u^{-1},uwv\}={}^{u^{-1}}\{uwv,u\}=\{wvu,u\}$，于是

$$ {}^{x^{-1}vwu}\{u,u^{-2}\}=\{u,u^{-2}\}=\{u,u^{-1}\}\{u,u^{-1}\}=\{u,u\}\{u,u^{-1}\}=1 $$

因此由 S7 得

$$ \begin{aligned} {}^{u}\{v,w\}&=\{uvu^{-1},uwu^{-1}\}=\{uv,wu^{-1}\}\{u^{-1},uwv\}=\{u,vwu^{-1}\}\{v,w\}\{wvu,u\}\\ &=\{v,w\}\cdot{}^{x^{-1}}\{u,vwu^{-1}\}\{wvu,u\}=\{v,w\}\cdot{}^{x^{-1}}\{u,vwuu^{-2}\}\{x^{-1}vwu,u\}\\ &=\{v,w\}\cdot{}^{x^{-1}}\{u,vwu\}\cdot{}^{x^{-1}vwu}\{u,u^{-2}\}\cdot{}^{x^{-1}}\{vwu,u\}\{x^{-1},u\}\\ &=\{v,w\}\{x^{-1},u\} \end{aligned} $$

4) 令 $\alpha=1-ab$，$\beta=1-ba$，则 $\beta=\pi^{-1}\alpha$，$\{u^{-1},u\beta u^{-1}\}={}^{u^{-1}}\{u\beta u^{-1},u\}=\{\beta,u\}$，因此由 D3 和 D4 得

$$ \begin{aligned} {}^{u}\langle a,b\rangle&=\langle uau^{-1},ubu^{-1}\rangle=\langle ua,bu^{-1}\rangle\langle bau^{-1},u\rangle\\ &=\langle uab,u^{-1}\rangle\langle a,b\rangle\langle u^{-1}(u\beta u^{-1}-1),(u^{-1})^{-1}\rangle\\ &=\langle u(\alpha-1),u^{-1}\rangle\langle a,b\rangle\{u^{-1},u\beta u^{-1}\}\\ &=\{u,\alpha\}\langle a,b\rangle\{\beta,u\}=\langle a,b\rangle\cdot{}^{\pi^{-1}}\{u,\alpha\}\{\pi^{-1}\alpha,u\}\\ &=\langle a,b\rangle\cdot{}^{\pi^{-1}}\{u,\alpha\}\cdot{}^{\pi^{-1}}\{\alpha,u\}\{\pi^{-1},u\}=\langle a,b\rangle\{\pi^{-1},u\} \end{aligned} $$

5) 由 S4，S9 得 $\{w,u\}\rho\{x^{-1},u\}=\rho\cdot{}^{x^{-1}}\{w,u\}\{x^{-1},u\}=\rho\{x^{-1}w,u\}$，归纳可证得。

6) 因为 $\{\beta,\beta\}$ 属于 D_R 的中心，$\alpha a=a\beta$，$b\alpha^{-1}=\beta^{-1}b$，由定义 3.2 和 D3 得

$$\begin{aligned}\{\alpha,\alpha\}&=\langle\alpha(\alpha-1),\alpha^{-1}\rangle=\langle\alpha ab,\alpha^{-1}\rangle=\langle\alpha a,b\alpha^{-1}\rangle\langle -b,-a\rangle\\&=\langle a\beta,\beta^{-1}b\rangle\langle -b,-a\rangle=\langle a,b\rangle\langle ba\beta,\beta^{-1}\rangle\langle -b,-a\rangle\\&=\langle a,b\rangle\langle\beta(\beta-1),\beta^{-1}\rangle\langle -b,-a\rangle\\&=\langle a,b\rangle\{\beta,\beta\}\langle -b,-a\rangle=\{\beta,\beta\}\end{aligned}$$

7) 在 D5 中，令 $c=-a$，则 $\langle 0,b\rangle=\langle -a\alpha^{-1},\alpha b\alpha^{-1}\rangle\langle a,b\rangle=1$，因此由 D1 有

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle&=\langle -a\alpha^{-1},\alpha b\alpha^{-1}\rangle^{-1}=\langle -\alpha b\alpha^{-1},a\alpha^{-1}\rangle=\langle -\alpha b\alpha^{-1}a,\alpha^{-1}\rangle\langle -b\alpha^{-1},a\rangle\\&=\langle -\alpha ba\beta^{-1},\alpha^{-1}\rangle\langle b\alpha^{-1},a\rangle=\langle -\alpha(\beta-1)\beta^{-1},\alpha^{-1}\rangle\langle -b\alpha^{-1},a\rangle\\&=\langle\alpha(\beta^{-1}-1),\alpha^{-1}\rangle\langle -b\alpha^{-1},a\rangle=\{\alpha,\beta^{-1}\}\langle -b\alpha^{-1},a\rangle\end{aligned}$$

同理，在 D5 中，令 $c=-b$，得 $\langle a,0\rangle=\langle a,b\rangle\langle\beta a\beta^{-1},-b\beta^{-1}\rangle=1$，根据 D1 可证得

$$\langle a,b\rangle=\langle b,-a\beta^{-1}\rangle\{\alpha^{-1},\beta\}。$$

为了证明下述命题，我们在 K_R 中加上一条关系：

K6) 若 $x\in U(R)$，则 $\langle xa,bx^{-1},xc\rangle=\langle a,b,c\rangle\{vu^{-1},x\}$。

在另一篇文章中，我们需要下述命题：

命题 3.8：1) $\langle a,b,d'\rangle\{v',u'^{-1}\}=\langle p,-(1-ab)v\rangle\cdot{}^{uu'^{-1}}\langle a,b,d\rangle\cdot\{uu'^{-1}v,u^{-1}\}$，其中 $a,b,d,p,d'\in R$，$a,u,v,u',v'\in U(R)$；

2) $\langle a,b,d\rangle=\langle a-p,bx^{-1},x(d+p-dbp)\rangle\{xv,y^{-1}u^{-1}\}\cdot{}^{y^{-1}u^{-1}}\langle p,b\rangle\{y^{-1}u^{-1},y\}\{u^{-1},v\}$，其中 $a,b,d,p,d'\in R$，$u=a+d-abd$，$v=a+d-dba$，$x=1-pb$，$y=1-bp$。

证明：1) 令 $u'=a+(1-ab)d'\in U(R)$，$v=a+d(1-ba)$，$v'=a+d'(1-ba)$，则

$$p=(1-bd')u'^{-1}-(1-bd)u^{-1}=v'^{-1}((1-d'b)u-v(1-bd))u^{-1}=v'^{-1}(d-d')u^{-1}=v^{-1}(d-d')u'^{-1}$$

且

$$\begin{aligned}&1-p(-(1-ab)v)=1+p(1-ab)v=1+v'^{-1}(d-d')u^{-1}(1-ab)v\\&=1+v'^{-1}(d-d')(1-ba)=1+v'^{-1}((v-a)-(v'-a))=v'^{-1}v\in U(R)\end{aligned}$$，同理得 $1-(-(1-ab)v)p=uu'^{-1}$

由于

$$\begin{aligned}\langle p,-(1-ab)v\rangle&=\langle p(1-ab),-v\rangle\langle -vp,1-ab\rangle\\&=\langle(1-v'^{-1}v)(-v)^{-1},-v\rangle\langle -vp,1-ab\rangle\\&=\{v'^{-1}v,-v\}\langle -vp,1-ab\rangle\\&={}^{v'^{-1}}\{v,-v\}\{v'^{-1},-v\}\langle -vp,1-ab\rangle\\&=\{v'^{-1},-v\}\langle -vp,1-ab\rangle\end{aligned}$$

另注意到

$$\begin{aligned}&-vp-1-ab+(vp+1)ab\\&=-1-vp(1-ab)=-vp-1+vpab=-1-vp(1-ab)\\&=-1-(d-d')u'^{-1}(1-ab)=-(v'+(d-d')(1-ba))v'^{-1}=-vv'^{-1}\end{aligned}$$

因此

$$\langle -vp, 1-ab\rangle = \langle -vp-1, -1, -ab\rangle = \langle vv'^{-1}, abv'v^{-1}, -vp\rangle$$

于是只需证明

$$\{-v, v'^{-1}\}\langle a,b,d'\rangle\{v', u'^{-1}\} = \langle vv'^{-1}, abv'v^{-1}, -vp\rangle \cdot {}^{uu'^{-1}}\langle a,b,d\rangle\{uu'^{-1}v, u^{-1}\}$$

由于 $\{-v, v'^{-1}\}\langle a,b,d'\rangle = \langle a,b,d'\rangle \cdot {}^{v'u'^{-1}}\{-v, v'^{-1}\}$，且

$${}^{v'u'^{-1}}\{-v, v'^{-1}\}\{v', u'^{-1}\} = {}^{v'u'^{-1}}\{-v, v'^{-1}\} \cdot {}^{v'}\{u'^{-1}, v'^{-1}\} = {}^{v'}\left({}^{u'^{-1}}\{-v, v'^{-1}\}\{u'^{-1}, v'^{-1}\}\right)$$

$$= {}^{v'}\{-u'^{-1}v, v'^{-1}\} = \{v', -u'^{-1}v\}$$

因此只需证明

$$\langle a,b,d'\rangle\{v', -u'^{-1}v\} = \langle vv'^{-1}, abv'v^{-1}, -vp\rangle \cdot {}^{uu'^{-1}}\langle a,b,d\rangle\{uu'^{-1}v, u^{-1}\}$$

由 K6，有 ${}^{uu'^{-1}}\langle a,b,d\rangle = \langle a,b,d\rangle\{vu^{-1}, uu'^{-1}\}$，注意到 $vv'^{-1} - vp + vpabv'v^{-1}vv'^{-1} = 1$，

$$\langle vv'^{-1}, abv'v^{-1}, -vp\rangle\langle a,b,d\rangle = \langle vv'^{-1}a, bv'v^{-1}, -vpu + vv'^{-1}d\rangle$$

$$= \langle vv'^{-1}a, bv'v^{-1}, vv'^{-1}d'\rangle = {}^{vv'^{-1}}\langle a,b,d'\rangle$$

$$= \langle a,b,d'\rangle\{v'u'^{-1}, vv'^{-1}\}$$

所以最终只需证明

$$\{v', -u'^{-1}v\} = \{v'u'^{-1}, vv'^{-1}\}\{vu^{-1}, uu'^{-1}\}\{uu'^{-1}v, u^{-1}\} = \{v'u'^{-1}, vv'^{-1}\}\{v, u'^{-1}\}$$

根据 S3 和 S7，其中

$$\{v'u'^{-1}, vv'^{-1}\} = \{v', u'^{-1}vv'^{-1}\}\{u'^{-1}, v\} = \{v', -u'^{-1}v\} \cdot {}^{-u'^{-1}v}\{v', -v'^{-1}\}\{u'^{-1}, v\}$$

$$= \{v', -u'^{-1}v\} \cdot {}^{-u'^{-1}v}\left({}^{-v'^{-1}}\{-v', v'\}\right)\{u'^{-1}, v\} = \{v', -u'^{-1}v\}\{u'^{-1}, v\}$$

2) 因为 $a-p+x(d+p-dbp)-(a-p)bx^{-1}x(d+p-dbp) = uy$，

$1-(a-p)bx^{-1} = (x-(a-p)b)x^{-1} = (1-ab)x^{-1}$，且 $yb = bx$， $py^{-1} = x^{-1}p$，

$(1-ab)(1-db) = 1-(a+d-abd)b = 1-ub$，于是有

$$\langle a-p, bx^{-1}, x(d+p-dbp)\rangle$$

$$= \langle uybx^{-1}, x(d+p-dbp)y^{-1}u^{-1}, (1-ab)x^{-1}\rangle$$

$$= \langle uyb, (d+p-dbp)y^{-1}u^{-1}, (1-ab)\rangle$$

$$= \langle uyb, dy^{-1}u^{-1}, (1-uybpy^{-1}u^{-1})(1-ab)\rangle\langle uyb, py^{-1}u^{-1}, (1-ab)(1-db)\rangle$$

$$= {}^{uyu^{-1}}\langle ub, du^{-1}, 1-ab\rangle\langle ubx, x^{-1}pu^{-1}, (1-ub)x^{-1}x\rangle$$

$$= {}^{uyu^{-1}}\langle a,b,d\rangle\langle ub, pu^{-1}, (1-ub)x^{-1}\rangle$$

$$= \langle a,b,d\rangle\{vu^{-1}, uyu^{-1}\}\langle ub, pu^{-1}\rangle$$

且

$$\begin{aligned}&\left\{xv,y^{-1}u^{-1}\right\}\cdot{}^{y^{-1}u^{-1}}\left\langle p,b\right\rangle\\&=\left\{xv,y^{-1}u^{-1}\right\}\left\langle p,b\right\rangle\left\{yx^{-1},y^{-1}u^{-1}\right\}\\&=\left\langle p,b\right\rangle\cdot{}^{yx^{-1}}\left\{xv,y^{-1}u^{-1}\right\}\left\{yx^{-1},y^{-1}u^{-1}\right\}\\&=\left\langle p,b\right\rangle\left\{yv,y^{-1}u^{-1}\right\}\end{aligned}$$

注意到

$$\left\langle ub,pu^{-1}\right\rangle\left\langle p,b\right\rangle=\left\langle u,bpu^{-1}\right\rangle=\left\langle\left(u^{-1}\right)^{-1},u^{-1}\left(1-uyu^{-1}\right)\right\rangle=\left\{uyu^{-1},u^{-1}\right\}$$

所以只需证明

$$\begin{aligned}1&=\left\{vu^{-1},uyu^{-1}\right\}\left\{uyu^{-1},u^{-1}\right\}\left\{yv,y^{-1}u^{-1}\right\}\left\{y^{-1}u^{-1},y\right\}\left\{u^{-1},v\right\}\\&=\left\{vu^{-1},uyu^{-1}\right\}\left\{uyu^{-1},u^{-1}\right\}\cdot{}^{y}\left\{v,y^{-1}u^{-1}\right\}\left\{y,y^{-1}u^{-1}\right\}\left\{y^{-1}u^{-1},y\right\}\left\{u^{-1},v\right\}\\&={}^{u}\left\{u^{-1}v,y\right\}\cdot{}^{u}\left\{y,u^{-1}\right\}\cdot{}^{y}\left\{v,y^{-1}u^{-1}\right\}\left\{u^{-1},v\right\}\\&={}^{u}\left\{u^{-1}v,y\right\}\cdot{}^{u}\left\{y,u^{-1}\right\}\left\{y,v\right\}\left\{v,u^{-1}\right\}\left\{u^{-1},v\right\}\\&={}^{u}\left\{u^{-1}v,y\right\}\left\{u,y\right\}\left\{y,v\right\}=\left\{v,y\right\}\left\{y,v\right\}\end{aligned}$$

参考文献 (References)

[1] Milnor, J. (1971) Introduction to Algebraic K-Theory. Princeton University Press, Princeton.

[2] Keune, F. (1972) The K_2 of 1-Fold Ring. Springer-Verlag, Berlin, 281-303.

[3] Keune, F. (1981) The Another Presentation for the K_2 of a Local Domain. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **22**, 131-141. https://doi.org/10.1016/0022-4049(81)90055-4

[4] Fan, Z.Q., Song, G.T. and Peng, Y.Z. (2013) Relations of Keune Symbols. *Comptes Rendus Mathematique*, **351**, 865-870. https://doi.org/10.1016/j.crma.2013.11.002

[5] Peng, Y.Z., Fan Z.Q. and Song G.T. (2011) On the K_2 of a Ring with Stable Range One. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **35**, 641-652.