Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(6), 471-473
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.66064

Hans汉斯

The More Discussion on Ramsey Number Theory

Junchao Mao, Jianting Gao, Hongfang Lin

Navy Submarine Academy, Qingdao Shandong
Email: maojunchao2727@sina.com.cn

Received: Nov. 1st, 2016; accepted: Nov. 15th, 2016; published: Nov. 23rd, 2016

Abstract

By using probabilistic methods, constructing suitable probability space and using the knowledge of graph theory and probability properties, some theorems about Ramsey numbers were proved.

Keywords

Probabilistic Method, Ramsey Number, Graph Theory

Ramsey数理论的进一步讨论

毛俊超，高建亭，林洪芳

海军潜艇学院，山东 青岛
Email: maojunchao2727@sina.com.cn

收稿日期：2016年11月1日；录用日期：2016年11月15日；发布日期：2016年11月23日

摘　要

本文采用概率的方法，通过构造适当的概率空间，利用图论知识和概率性质，证明了有关Ramsey数的一些定理。

文章引用：毛俊超，高建亭，林洪芳. Ramsey 数理论的进一步讨论[J]. 理论数学, 2016, 6(6): 471-473.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.66064

关键词

概率方法，Ramsey数，图论

1. 引言

Ramsey 数是组合数学中一个很重要的组合数，有关 Ramsey 数的研究成果比较多[1] [2] [3]，但用概率的方法研究 Ramsey 数的结果并不多，虽然用概率的方法研究其他组合问题也有一些结果[4] [5]，本文主要研究用概率方法证明有关 Ramsey 数的定理，展示该方法的有效性和实用性。首先给出有关预备知识[6]。

定义 1：对任给的正整数，对 k 和 l，称满足如下性质的最小正整数 n，记为 $R(k,l)$，为 Ramsey 数，对任意 n 个顶点的单图 G 中，或者含 K_k 子图(即 k 个顶点的团)，或者包含一个有 l 个顶点的独立集。为了推广 Ramsey 数的定义，还可以等价定义 Ramsey 数如下。

定义 2：对任给的正整数，对 k 和 l，记 $R(k,l)$ 是满足如下性质的最小的正整数 n，对 k_n 的任意个 2-边着色的边分划(E_1, E_2)中，或者 $k_n[E_1]$ 含有 K_k 子图，它的所有边都有颜色 1，或者 $k_n[E_2]$ 含有 K_l 子图，它的所有边都有颜色 2。

1947 年，Erdös 采用概率论的知识对 Ramsey 数进行研究，得到了下面的结果。

定理 1 [2]**：**对任意的正整数 k， $R(k,k) > 2^{\frac{k}{2}}$。

在 Erdös 之前，都是用图论的知识研究 Ramsey 数，Erdös 开创了一种新的研究方法，即概率方法。他通过建立一个适当的概率空间，使得所研究的对象的特征包含在所建立的概率空间中，然后充分利用概率知识，证明所需要的结果。要证明 k， $R(k,k) > 2^{\frac{k}{2}}$，结合 Ramsey 数的定义 2，建立的概率空间是 2-边着色图的空间，即 n 个顶点的完全图 k_n 的所有随机 2-边着色的集合。定义“给子集 A 着是单色”是事件 R_A，其中 A 是顶点集 V 的子集。容易求出 $P(R_A) = \frac{2}{2^{\binom{k}{2}}}$，于是 $P\left(\bigcup_{A\subset V,|A|=k} R_A\right) \le \binom{n}{k}\frac{2}{2^{\binom{k}{2}}}$。若 $n = 2^{\frac{k}{2}}$，则 $\binom{n}{k}\frac{2}{2^{\binom{k}{2}}} \le \frac{n^k}{k!}\frac{2}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{2^{\frac{k}{2}}+1}{k!} < 1$，利用概率的性质，即 $P > 0$， $P\left(\bigcap_{A\subset V,|A|=k} \overline{R_A}\right) = P\left(\overline{\bigcup_{A\subset V,|A|=k} R_A}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{A\subset V,|A|=k} R_A\right) > 1 - \binom{n}{k}\frac{2}{2^{\binom{k}{2}}} > 0$，即：在该着色中没有单色完全子图 K_k，所以 $R(k,k) > 2^{\frac{k}{2}}$。

虽然这个结果较为简单，但是证明结果用到了一种新的方法，即概率方法。即通过构造概率空间，利用概率的性质，证明一种染色的存在。而概率论的知识和方法是丰富的，倘若充分利用这些性质和方法，定能得到很多的结果。下面就采用这种概率方法来证明一些有关 Ramsey 数的定理。

2. 主要结果

定理 2 [7]**：**对任意的整数 n， $R(k,k) > n - \binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$。

证明：仍然构造 2-边着色图的空间，即 n 个顶点的完全图 k_n 的所有随机 2-边着色(不妨用黄和红两种颜色)的集合。考虑 k_n 的一个随机 2-边着色，黄、红颜色出现的机会相等．定义随机变量 X=单色完全子图 K_k 的数目，令 $X_R = \begin{cases} 1, & K_n\text{中由}R\text{导出子图}K_k\text{是单色的}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$，其中 R 是任意 k 个顶点的集合。则 $X = \sum_{R\subset V,|K|=k} X_R$． 由线性性质求期望得：

$E(X)=E\left(\sum_{R\subset V,|K|=k}X_R\right)=\sum_{R\subset V,|K|=k}E(X_R)=\binom{n}{k}\frac{2}{2^{\binom{k}{2}}}=\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$，即存在一个 2-边着色，使得 $X\le n-\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$。现在固定着色，移走 K_n 的每个单色 k-集合的一个顶点，则至多有 $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$ 个顶点被移走，所有剩下的 s 个顶点满足，$s\ge n-\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$，然后在这些顶点上着色，没有单色 k-集合，所以，对任意的整数 n，$R(k,k)>n-\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$。

用这种方法我们还可以证明下面的结果。

定理 3 [7]：对所有整数 n 和 $p\in[0,1]$，$R(k,l)>n-\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}}-\binom{n}{l}(1-p)^{\binom{l}{2}}$。

证明：仍然构造 2-边着色图的空间，现在用黄和红两种颜色给 k_n 进行边着色，假设着黄色的概率是 p，则着红色的概率是 $1-p$。设随机变量 X={着黄色的完全子图 k_k 的数目与着红色的完全子图 k_l 的数目的和}。利用期望的线性性质计算得：$E(X)=\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}}+\binom{n}{l}(1-p)^{\binom{l}{2}}$。存在一个 2-边着色，使得具有 s-集合(或者是黄色 k-集合，或者是红色 l-集合)，$s\le E(X)$。现在移走 k_n 的 s-集合中一个顶点，则至多有 $\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}}+\binom{n}{l}(1-p)^{\binom{l}{2}}$ 个顶点被移走，然后给剩下的至少 $n-\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}}-\binom{n}{l}(1-p)^{\binom{l}{2}}$ 个顶点着色，则既没有红色 k-集合，也没有蓝色 l-集合，即 $R(k,l)>n-\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}}-\binom{n}{l}(1-p)^{\binom{l}{2}}$。

3. 结语

研究 Ramsey 数等组合分析问题，用到概率论的方法和技巧是一项很有意义的工作，这是一种将组合学和概率论两个学科的知识结合起来研究问题的方法，该方法可以证明原有的一些结果，还能得到一些新的结果，是一种具有有效性和实用性的方法。

参考文献 (References)

[1] Szele, T. (1943) Kombinatorikai vizsgálalatok az irányitott teljes gráffal kapcsolatban. *Matematiko in Fiziko Lapok*, **50**, 223-256.

[2] Erdös, P. (1947) Some Remarks on the Theory of Graph. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **53**, 292-294. https:/doi.org/10.1090/S0002-9904-1947-08785-1

[3] Erdös, P. and Spencer, J. (1974) Probabilistic Methods in Combinatorics. Academic, New York.

[4] 毛俊超, 冯立华. 指数分布在第二类 Stirling 数中的应用[J]. 华东交通大学学报, 2005, 22(5): 151-154.

[5] 毛俊超, 祝丹忱, 赵熙强. Stirling 数的概率表示的新应用[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版), 2006, 36(3S): 222-224.

[6] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan, New York. https:/doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2

[7] Spencer, J. (1977) Asymptotic Lower Bounds for Ramsey Functions. *Discrete Mathematics*, **20**, 69-76. https:/doi.org/10.1016/0012-365X(77)90044-9