Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(6), 474-479
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.66065

Hans汉斯

The Associative Form and Restrictiveness of Modular Lie Superalgebra $\widehat{W}(n,m)$

Qi Cui, Lihua Zhang

School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning
Email: 18342961567@163.com

Received: Nov. 2nd, 2016; accepted: Nov. 19th, 2016; published: Nov. 22nd, 2016

Abstract

In this paper, the nonsingular associative form of finite-dimensional simple modular Lie superalgebra $\widehat{W}(n,m)$ is given and proved, and the restrictiveness of $\widehat{W}(n,m)$ is discussed.

Keywords

Simple Modular Lie Superalgebra, Associative Form, Restricted Lie Superalgebra

模李超代数$\widehat{W}(n,m)$的结合型和限制性

崔 琪，张丽华

沈阳师范大学数学与系统科学学院，辽宁 沈阳
Email: 18342961567@163.com

收稿日期：2016年11月2日；录用日期：2016年11月19日；发布日期：2016年11月22日

摘 要

本文给出并证明了有限维单模李超代数$\widehat{W}(n,m)$具有非退化的结合型并且讨论了李超代数$\widehat{W}(n,m)$的限制性。

关键词

单模李超代数，结合型，限制李超代数

文章引用：崔琪，张丽华．模李超代数$\widehat{W}(n,m)$的结合型和限制性[J]．理论数学, 2016, 6(6): 474-479.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.66065

1. 引言

目前，有限维单模李超代数的分类问题还没有解决，所以文献[1]构造了新的有限维单模李超代数$\widehat{W}(n,m)$，并确定了它的单性，文献[2]确定了$\widehat{W}(n,m)$的导子超代数。

为了将$\widehat{W}(n,m)$与已有的有限维单模李超代数进行比较，文本讨论了$\widehat{W}(n,m)$的结合型和限制性。

2. $\widehat{W}(n,m)$回顾

下面将文献[1]构造的有限维单模李超代数$\widehat{W}(n,m)$作简要回顾。用 N 表示正整数集，F 是特征数为 $p>2$ 的域，设 $n\in\mathrm{N}$，$\wedge(n)$ 为域 F 上具有 n 个未定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的外代数。

定义：$B_0:=\varnothing$，$B_k:=\{\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle \mid 1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n\}, k=1,\cdots,n$。

令 $B(n)=\bigcup_{i=0}^{n}B_k$。

对 $u=\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle\in B(n)$，令 $|u|=k,\{u\}=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\},x^u=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$，且约定 $|\varnothing|=0,x^{\varnothing}=1$，则 $\{x^u \mid u\in B(n)\}$ 构成 $\wedge(n)$ 的一组 F-基底。

令 $m\in\mathrm{N},r=n+m$，$T(m):=F[y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_r]$ 为满足 $y_i^p=1$，$i=n+1,\cdots,r$ 的截头多项式代数。$II:=\{0,1,\cdots,p-1\}$ 表示整数模 p 的剩余类环，$H=II^m$，设 $\mu=(\mu_{n+1},\cdots,\mu_r)\in H$，定义：$y^{\mu}=\prod_{i=n+1}^{r}y_i^{\mu_i}$，于是 $T(m)=\left\{\sum_{\mu\in H}a_{\mu}y^{\mu} \,\middle|\, a_{\mu}\in F\right\}$，$\{y^{\mu}\mid \mu\in H\}$ 为 $T(m)$ 的 F-基底。

设 $U=\wedge(n)\otimes T(m)$，$Z_2=\{\overline{0},\overline{1}\}$ 为模 2 的剩余类环，令：

$$U_{\overline{0}}=\wedge(n)_{\overline{0}}\otimes T(m),\ U_{\overline{1}}=\wedge(n)_{\overline{1}}\otimes T(m)$$

于是 U 是由 $\wedge(n)$ 的 Z_2-阶化诱导出的结合超代数。

若 $f\in\wedge(n),g\in T(m)$，将 $f\otimes g$ 简记为 fg，于是 $\{x^u y^{\mu}\mid u\in B(n),\mu\in H\}$ 是 U 的一个 F-基底。令 $U_i=\mathrm{span}_F\{x^u y^{\mu}\mid |u|=i\},i=1,\cdots,n$，则 $U=\bigoplus_{i=0}^{n}U_i$ 是 Z-阶化的超代数，且 $U_0=T(m)$。

令 $I_1=\{1,\cdots,n\},I_2=\{n+1,\cdots,r\},I=I_1\cup I_2$。

对 $i\in Y$，令 $D_i=\partial/\partial x_i$ 为 $\wedge(n)$ 对 x_i 的偏导子，则 D_i 可以扩充为 U 的导子，使得对 $\mu=(\mu_{n+1},\cdots,\mu_r)\in H$，

$$D_i(x^u y^{\mu})=\begin{cases}\dfrac{\partial x^u}{\partial x_i}y^{\mu} & i\in I_1\\ \mu_i x^u y^{\mu} & i\in I_2\end{cases}。$$

设 $u=\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle\in B_k$，若 $i\in\{u\}$，则令 $u-\langle i\rangle\in B_{k-1}$，使得 $\{u-\langle i\rangle\}=\{u\}\setminus\{i\}$；

设 $u(i)=|\{l\in\{u\} \mid l<i\}|$，若 $i\notin\{u\}$，约定 $u(i)=0,x^{u-\langle i\rangle}=0$，那么对任意的 $i\in I_1$，有 $D_i(x^u)=(-1)^{u(i)}x^{u-\langle i\rangle}$，于是，若 $i\in I_1$，则 $D_i\in\mathrm{Der}_{\overline{1}}U$，而若 $i\in I_2$，则 $D_i\in\mathrm{Der}_{\overline{0}}U$。

设 $f\in h(U),D\in h(\mathrm{Der}U)$，定义 $(fD)(g)=fD(g),\forall g\in h(U)$，那么：

$$[fD_i,gD_j]=fD_i(g)D_j-(-1)^{|fD_i||gD_j|}gD_j(f)D_i$$

令 $\widehat{W}(n,m)=\left\{\sum_{i=1}^{r}f_iD_i \,\middle|\, f_i\in U,i\in I\right\}$，那么 $\widehat{W}(n,m)$ 为 U 的导子超代数 $\mathrm{Der}U$ 的子代数，$\{x^u y^{\mu}D_j \mid u\in B(n),\mu\in H,j\in I\}$ 为 $\widehat{W}(n,m)$ 一组 F-基底。下面简记 $\widehat{W}(n,m)$ 为 $\widehat{W}$。

令 $\widehat{W}_i=\mathrm{span}_F\left\{x^u y^\mu D_j \middle| |u|+\delta(j,I_2)=i+1, u\in B(n), \mu\in H, j\in I\right\}$，其中：

$$\delta(j,I_2)=\begin{cases}1 & j\in I_2\\ 0 & j\notin I_2\end{cases},$$

那么 $\widehat{W}=\bigoplus_{i=-1}^{n}\widehat{W}_i$ 是 Z -阶化李超代数。

3. 结合型

引理 3.1 [3]：设 $L=\bigoplus_{i=-r}^{s}L_i$ 是有限维单 Z -阶化李超代数，置 $L^-:=\bigoplus_{i=-r}^{-1}L_i$ 。假设 $\lambda:L\times L\to F$ 是一个超对称双线性型，并且满足下列条件：

(a) λ 是 L^--不变的，即 $\lambda([x,y],z)=\lambda(x,[y,z]), \forall x,z\in L, y\in L^-$；

(b) $\lambda|_{L_i\times L_s}=0$，对 $i>-r$；

(c) $\lambda|_{L_{-r}\times L_s}$ 是 L_0-不变的，即 $\lambda([x,y],z)=\lambda(x,[y,z]), \forall x\in L_{-r}, y\in L_0, z\in L_s$。

那么 λ 是 L 上的结合型。

本文定义 $c_{\omega r}:\widehat{W}\to F$，使得 $c_{\omega r}\left(\sum_{u,\mu,i}\alpha_{(u,\mu,i)}x^u y^\mu D_i\right)=\alpha_{(\omega,0,r)}$，其中 $\alpha_{(u,\mu,i)}\in F$，$\omega=\langle 1,2,\cdots,n\rangle$，显然 $c_{\omega r}$ 是线性的。

定理 3.2 [4]：$\widehat{W}(n,m)$ 具有非退化的结合型。

证明：因为 $\widehat{W}=\bigoplus_{i=-1}^{n}\widehat{W}_i$，其中 $\widehat{W}_i=\mathrm{span}_F\left\{x^u y^\mu D_j \middle| |u|+\delta(j,I_2)=i+1, u\in B(n), \mu\in H, j\in I\right\}$，

所以：$\widehat{W}_{-1}=\mathrm{span}_F\left\{y^\lambda D_j \middle| \lambda\in H, j\in I_1\right\}$，$\widehat{W}_n=\mathrm{span}_F\left\{x^u y^\lambda D_j \middle| \lambda\in H, j\in I_2\right\}$

$$\widehat{W}_0=span_F\left\{x_i y^\lambda D_{j_1}, y^\lambda D_{j_2} \middle| i\in\{1,2,\cdots,n\}, \lambda\in H, j_1\in I_1, j_2\in I_2\right\}$$

定义函数 $\lambda:\widehat{W}\times\widehat{W}\to F, \lambda(f,g)=c_{\omega r}([f,g])$，显然 λ 是双线性和超对称的。又因为 $\lambda(x^\omega D_1, x_1 D_r)=c_{\omega r}([x^\omega D_1, x_1 D_r])=c_{\omega r}(x^\omega D_r)=1$，所以 $\lambda\neq 0$。下面验证 λ 满足引理 3.1 中的三个条件：

先验证(a)，任取 $\widehat{W}$ 中的基向量 $f=x^u y^\mu D_i$、$h=x^v y^\theta D_k$，$\widehat{W}_{-1}$ 中的基向量 $g=y^\beta D_j$，其中 $i\in I, j\in I_1, k\in I$ 且 $\lambda,\beta,\theta\in H$。

若 $i\in I_1$，$|D_k|=\theta_1$，$\theta_1=\bar{0}$ 或 $\bar{1}$，有：

$$\begin{aligned}
&\lambda([f,g],h)-\lambda(f,[g,h])\\
&=\lambda\left(\left[x^u y^\mu D_i, y^\beta D_j\right], x^v y^\theta D_k\right)-\lambda\left(x^u y^\mu D_i, \left[y^\beta D_j, x^v y^\theta D_k\right]\right)\\
&=\lambda\left(\left(x^u y^\mu D_i\left(y^\beta\right)D_j-(-1)^{|f||g|}y^\beta D_j\left(x^u y^\mu\right)D_i\right), x^v y^\theta D_k\right)\\
&\quad-\lambda\left(x^u y^\mu D_i, \left(y^\beta D_j\left(x^v y^\theta\right)D_k-(-1)^{|g||h|}x^v y^\theta D_k\left(y^\beta\right)D_j\right)\right)\\
&=(-1)^{|u|+u(j)}c_{\omega r}\left((-1)^{v(i)}x^{u-\langle j\rangle}x^{v-\langle i\rangle}y^{\mu+\beta+\theta}D_k-(-1)^{|u|\cdot(|v|+\theta_1)}x^v y^\theta D_k\left(x^{u-\langle j\rangle}y^\beta y^\mu\right)D_i\right)\\
&\quad-(-1)^{v(j)}c_{\omega r}\left((-1)^{(v-\langle j\rangle)(i)}x^u x^{v-\langle j\rangle-\langle i\rangle}y^{\mu+\beta+\theta}D_k-(-1)^{(|v|-1+\theta_1)\cdot(|u|+\bar{1})}x^{v-\langle j\rangle}y^\beta y^\theta D_k\left(x^u y^\mu\right)D_i\right)\\
&\quad-(-1)^{(|v|+\theta_1)\cdot\bar{1}}c_{\omega r}\left((-1)^{v(i)}x^u x^{v-\langle i\rangle}y^\mu y^\theta D_k\left(y^\beta\right)D_j-(-1)^{u(j)+(|u|+\bar{1})\cdot(|v|+\bar{1})}x^v y^\theta D_k\left(y^\beta\right)x^{u-\langle j\rangle}y^\mu D_i\right)\\
&=(-1)^{|u|+u(j)+v(i)}c_{\omega r}\left(x^{u-\langle j\rangle}x^{v-\langle i\rangle}D_r\right)-(-1)^{v(j)+(v-\langle j\rangle)(i)}c_{\omega r}\left(x^u x^{v-\langle j\rangle-\langle i\rangle}D_r\right)
\end{aligned}$$

其中，$i,j\in\{u\}\cap\{v\}$，$\{u-\langle j\rangle\}\cup\{v-\langle i\rangle\}=\{1,2,\cdots,n\}$，且$\{u-\langle j\rangle\}\cap\{v-\langle i\rangle\}=\varnothing$。

若$i<j$，有：$x^{u-\langle j\rangle}x^{v-\langle i\rangle}=(-1)^{|u|-u(j)+v(j)}x^{u}x^{v-\langle j\rangle-\langle i\rangle}$

若$i>j$，有：$x^{u-\langle j\rangle}x^{v-\langle i\rangle}=-(-1)^{|u|-u(j)+v(j)}x^{u}x^{v-\langle j\rangle-\langle i\rangle}$

因此当$i\in I_1$时$\lambda([f,g],h)-\lambda(f,[g,h])=0$

若$i\in I_2$，有

$$
\begin{aligned}
&\lambda([f,g],h)-\lambda(f,[g,h])\\
&=c_{\omega r}\left((-1)^{v(j)}\beta_i x^{u}x^{v-\langle j\rangle}y^{\mu+\beta+\theta}D_k-(-1)^{(|u|+\bar{1})\cdot(|v|+\theta_1)}\beta_i x^{v}y^{\theta}D_k\left(x^{u}y^{\mu}y^{\beta}\right)D_j\right)\\
&\quad-(-1)^{|u|+u(j)}c_{\omega r}\left(\theta_i x^{u-\langle j\rangle}x^{v}y^{\mu+\beta+\theta}D_k-(-1)^{(|u|-1)\cdot(|v|+\theta_1)}x^{v}y^{\theta}D_k\left(x^{u-\langle j\rangle}y^{\mu}y^{\beta}\right)D_i\right)\\
&\quad-c_{\omega r}\left((-1)^{v(j)}(\beta_i+\theta_i)x^{u}x^{v-\langle j\rangle}y^{\mu+\beta+\theta}D_k-(-1)^{v(j)+(|v|-1+\theta_1)\cdot|u|}x^{v-\langle j\rangle}y^{\beta+\theta}D_k\left(x^{u}y^{\mu}\right)D_i\right)\\
&+(-1)^{|v|+\theta_1}c_{\omega r}\left(x^{u}y^{\mu}D_i\left(x^{v}y^{\theta}D_k\left(y^{\beta}\right)\right)D_j-(-1)^{u(j)+|u|\cdot(|v|+\bar{1})}x^{v}y^{\theta}D_k\left(y^{\beta}\right)x^{u-\langle j\rangle}y^{\mu}D_i\right)
\end{aligned}
$$

若$k\in I_1$，因为$j\in I_1$，由$c_{\omega r}$定义，上式中除了第四项和第六项其余项均等于 0。对于这两项，我们只需讨论$\left(\{u-\langle k\rangle\}\cup\{v-\langle j\rangle\},\mu+\beta+\theta,i\right)=(\omega,0,r)$，且$\{u-\langle k\rangle\}\cap\{v-\langle j\rangle\}=\varnothing$的情况，其余情况这两项均等于 0。若$k<j$，由于$x^{v}x^{u-\langle j\rangle-\langle k\rangle}=(-1)^{|v|-v(j)+u(j)}x^{v-\langle j\rangle}x^{u-\langle k\rangle}$，所以第四项和第六项相加等于 0；若$k>j$，由于$x^{v}x^{u-\langle j\rangle-\langle k\rangle}=-(-1)^{|v|-v(j)+u(j)}x^{v-\langle j\rangle}x^{u-\langle k\rangle}$，所以第四项和第六项相加也等于 0。

若$k\in I_2$，因为$j\in I_1$，由$c_{\omega r}$定义，上式中第二项和第七项等于 0。对于其余项，我们只需讨论如下几种情况：

①若$\left(\{u\}\cup\{v-\langle j\rangle\},\mu+\beta+\theta,k\right)=(\omega,0,r)$且$\{u\}\cap\{v-\langle j\rangle\}=\varnothing$，则上式等于

$(-1)^{v(j)}\beta_i c_{\omega r}\left(x^{u}x^{v-\langle j\rangle}y^{0}D_r\right)-(-1)^{|u|+u(j)}\theta_i c_{\omega r}\left(x^{u-\langle j\rangle}x^{v}y^{0}D_r\right)-(-1)^{v(j)}(\beta_i+\theta_i)c_{\omega r}\left(x^{u}x^{v-\langle j\rangle}y^{0}D_r\right)$由于$x^{u-\langle j\rangle}x^{v}=-(-1)^{|u|-u(j)+v(j)}x^{u}x^{v-\langle j\rangle}$，则该式等于 0。

②$\left(\{u-\langle j\rangle\}\cup\{v\},\lambda+\beta+\theta,i\right)=(\omega,0,r)$且$\{u-\langle j\rangle\}\cap\{v\}=\varnothing$，则上式等于

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{|u|+u(j)+(|u|-1)\cdot|v|}(\beta_r+\lambda_r)c_{\omega r}\left(x^{v}x^{u-\langle j\rangle}y^{0}D_r\right)+(-1)^{v(j)+(|v|-1)\cdot|u|}\lambda_r c_{\omega r}\left(x^{v-\langle j\rangle}x^{u}y^{0}D_r\right)\\
&-(-1)^{u(j)+|v+\bar{1}|\cdot|u|+|v|}\beta_r c_{\omega r}\left(x^{v}x^{u-\langle j\rangle}y^{0}D_r\right)
\end{aligned}
$$

由于$x^{v-\langle j\rangle}x^{u}=-(-1)^{|v|-v(j)+u(j)}x^{v}x^{u-\langle j\rangle}$，则该式等于 0。

③若$\left(\{u\}\cup\{v\}-\langle j\rangle,\lambda+\beta+\theta,i,k\right)=(\omega,0,r,r)$，由①②可知上式等于 0 成立。

所以，λ是$\widehat{W}^{-}$-不变的。

再验证(c)，任取$\widehat{W}_{-1}$中的基向量$f=y^{\mu}D_i$，$\widehat{W}_0$中的基向量$g_1=x_{i_k}y^{\beta}D_{j_1}$，$g_2=y^{\beta}D_{j_2}$，$\widehat{W}_n$中的基向量$h=x^{\omega}y^{\theta}D_k$，其中$i\in I_1,\ j_1\in I_1,\ j_2\in I_2,\ k\in I_2$且$\lambda,\beta,\theta\in H$，$i_k\in\{u\}$，有

$$
\begin{aligned}
&\lambda([f,g_1],h)-\lambda(f,[g_1,h])\\
&=\lambda\left(\left[y^{\mu}D_i,x_{i_k}y^{\beta}D_{j_1}\right],x^{\omega}y^{\theta}D_k\right)-\lambda\left(y^{\mu}D_i,\left[x_{i_k}y^{\beta}D_{j_1},x^{\omega}y^{\theta}D_k\right]\right)\\
&=\lambda\left(\left(y^{\mu}D_i\left(x_{i_k}y^{\beta}\right)D_{j_1}-x_{i_k}y^{\beta}D_{j_1}\left(y^{\mu}\right)D_i\right),x^{\omega}y^{\theta}D_k\right)\\
&\quad-\lambda\left(y^{\mu}D_i,\left(x_{i_k}y^{\beta}D_{j_1}\left(x^{\omega}y^{\theta}\right)D_k-x^{\omega}y^{\theta}D_k\left(x_{i_k}y^{\beta}\right)D_{j_1}\right)\right)
\end{aligned}
$$

若$i\neq i_k,j_1\neq i_k$，则由$c_{\omega r}$定义，上式等于 0。

若 $i=i_k, j_1\neq i_k$，则上式等于

$\lambda\left(y^{\mu+\beta}D_{j_1}, x^{\omega}y^{\theta}D_k\right)=c_{\omega r}\left((-1)^{j_1-1}x^{\omega-\langle j_1\rangle}y^{\mu+\beta+\theta}D_k-(-1)^n(\lambda_k+\beta_k)x^{\omega}y^{\mu+\beta+\theta}D_{j_1}\right)$ 由 $c_{\omega r}$ 定义，该式等于 0。

若 $i\neq i_k, j_1=i_k$，则上式等于

$-\lambda\left(y^{\mu}D_i, x^{\omega}y^{\theta+\beta}D_k\right)=c_{\omega r}\left((-1)^{i}x^{\omega-\langle i\rangle}y^{\mu+\beta+\theta}D_k+(-1)^n\lambda_k x^{\omega}y^{\mu+\beta+\theta}D_i\right)$ 由 $c_{\omega r}$ 定义，该式等于 0。

若 $i=i_k, j_1=i_k$，则上式等于

$$\begin{aligned}
&\lambda\left(y^{\mu+\beta}D_{j_1}, x^{\omega}y^{\theta}D_k\right)-\lambda\left(y^{\mu}D_i, x^{\omega}y^{\theta+\beta}D_k\right)\\
&=c_{\omega r}\left((-1)^{j_1-1}x^{\omega-\langle j_1\rangle}y^{\mu+\beta+\theta}D_k-(-1)^n(\lambda_k+\beta_k)x^{\omega}y^{\mu+\beta+\theta}D_{j_1}\right)\\
&\quad-c_{\omega r}\left((-1)^{i-1}x^{\omega-\langle i\rangle}y^{\mu+\beta+\theta}D_k-(-1)^n\lambda_k x^{\omega}y^{\mu+\beta+\theta}D_i\right)
\end{aligned}$$

由 $c_{\omega r}$ 定义，该式等于 0。

另一方面，

$$\begin{aligned}
&\lambda\left([f,g_2],h\right)-\lambda\left(f,[g_2,h]\right)\\
&=\lambda\left(\left[y^{\mu}D_i, y^{\beta}D_{j_2}\right], x^{\omega}y^{\theta}D_k\right)-\lambda\left(y^{\mu}D_i, \left[y^{\beta}D_{j_2}, x^{\omega}y^{\theta}D_k\right]\right)\\
&=\lambda\left(\left(y^{\mu}D_i\left(y^{\beta}\right)D_{j_2}-(-1)^{|f||g_2|}y^{\beta}D_{j_2}\left(y^{\mu}\right)D_i\right), x^{\omega}y^{\theta}D_k\right)\\
&\quad-\lambda\left(y^{\mu}D_i, \left(y^{\beta}D_{j_2}\left(x^{\omega}y^{\theta}\right)D_k-(-1)^{|g_2||h|}x^{\omega}y^{\theta}D_k\left(y^{\beta}\right)D_{j_2}\right)\right)\\
&=-\lambda_{j_2}c_{\omega r}\left((-1)^{i-1}x^{\nu-\langle i\rangle}y^{\mu+\beta+\theta}D_k-(-1)^{|\nu|}\beta_k x^{\nu}y^{\mu+\beta+\theta}D_i\right)\\
&\quad-\theta_{j_2}c_{\omega r}\left((-1)^{i-1}x^{\nu-\langle i\rangle}y^{\mu+\beta+\theta}D_k-(-1)^{|\nu|}\lambda_k x^{\nu}y^{\mu+\beta+\theta}D_i\right)\\
&\quad+\beta_k c_{\omega r}\left((-1)^{i-1}x^{\nu-\langle i\rangle}y^{\mu+\beta+\theta}D_{j_2}-(-1)^{|\nu|}\lambda_{j_2}x^{\nu}y^{\mu+\beta+\theta}D_i\right)
\end{aligned}$$

由 $c_{\omega r}$ 定义，该式等于 0。

综上所述，$\lambda|_{L_{-r}\times L_s}$ 是 $\widehat{W}_0$-不变的。

最后验证(b)，任取 $\widehat{W}_n$ 中的基向量 $h=x^{\omega}y^{\theta}D_k$，$\widehat{W}_i$ 中的基向量 $f=x^{u}y^{\mu}D_j$，其中 $k\in I_2, j\in I$，有 $\lambda\left(x^{\omega}y^{\theta}D_k, x^{u}y^{\mu}D_j\right)=c_{\omega r}\left(\left[x^{\omega}y^{\theta}D_k, x^{u}y^{\mu}D_j\right]\right)=0$，所以对任意的 $i>-1$，$\lambda|_{\widehat{W}_i\times\widehat{W}_n}=0$ 成立。

综上，由引理 3.1 可知，λ 是 $\widehat{W}$ 上一个结合型显然，$\lambda\neq 0$。由 $\widehat{W}$ 的单性，知 λ 是非退化的。

4. 限制性

引理 4.1 [5]：设 $L=L_{\bar{0}}\oplus L_{\bar{1}}$ 是域 F 上的李超代数，$\left\{e_j\middle| j\in J\right\}$ 是 L 的一组 Z_2-齐次基底。如果存在 $\left\{y_j\middle| j\in J\right\}$，使得对任意的 $j\in J$，有 $\left(ade_j\right)^{p(e_j)}=ady_j$，其中 $p(e_j)=p$，若 $e_j\in L_{\bar{0}}$；$p(e_j)=2p$，若 $e_j\in L_{\bar{1}}$，则 L 是一个限制李超代数。

定理 4.2：有限维模李超代数 $\widehat{W}$ 是限制李超代数。

证明：设 $e_1,\cdots,e_k$ 与 $e_{k+1},\cdots,e_t$ 分别为 $\widehat{W}_{\bar{0}}$ 和 $\widehat{W}_{\bar{1}}$ 的一组基，下面证明 $\left(ad\,e_j\right)^{p(e_j)}(j=1,\cdots,t)$ 为内导子。下面分两种情况讨论：

(1) $e_j\in\widehat{W}_{\bar{0}}$，则 $ad\,e_j\in Der_{\bar{0}}\left(\widehat{W}\right)$。

对任意的 $x, y\in\widehat{W}$，因 $ad\,e_j$ 是偶导子，由 Leibniz 公式，有：

$$
\begin{aligned}
&\left(ade_j\right)^p[x,y] \\
&=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\left[\left(ade_j\right)^{p-j}(x),\left(ade_j\right)^{j}(y)\right] \\
&=\left[\left(ade_j\right)^p(x),y\right]+\binom{k}{1}\left[\left(ade_j\right)^{p-1}(x),\left(ade_j\right)(y)\right] \\
&\quad+\binom{k}{2}\left[\left(ade_j\right)^{p-2}(x),\left(ade_j\right)^2(y)\right]+\cdots+\binom{k}{k-2}\left[\left(ade_j\right)^2(x),\left(ade_j\right)^{p-2}(y)\right] \\
&\quad+\binom{k}{k-1}\left[\left(ade_j\right)(x),\left(ade_j\right)^{p-1}(y)\right]+\left[x,\left(ade_j\right)^p(y)\right]
\end{aligned}
$$

又 $p\left|C_p^i\right., i=1,\cdots,p-1$，而 $\widehat{W}$ 是特征为 p 的域上的李超代数，所以有：

$$\left(ade_j\right)^p[x,y]=\left[\left(ade_j\right)^p(x),y\right]+\left[x,\left(ade_j\right)^p(y)\right]$$

所以，$\left(ade_j\right)^p\in Der\left(\widehat{W}\right)$。

(2) $e_j\in\widehat{W}_{\bar{1}}$，则 $ade_j\in Der_{\bar{1}}\left(\widehat{W}\right)$。

对任意的 $x, y\in\widehat{W}$，因为：

$$
\begin{aligned}
&\left(ade_j\right)^2[x,y]=\left(ade_j\right)\left(\left(ade_j\right)[x,y]\right) \\
&=\left[\left(ade_j\right)^2(x),y\right]+(-1)^{d(e_j)d(ade_j(x))}\left[\left(ade_j\right)(x),\left(ade_j\right)(y)\right] \\
&\quad+(-1)^{d(e_j)d(x)}\left[\left(ade_j\right)(x),\left(ade_j\right)(y)\right]+(-1)^{d(e_j)d(x)}\cdot(-1)^{d(e_j)d(x)}\left[x,\left(ade_j\right)^2(y)\right] \\
&=\left[\left(ade_j\right)^2(x),y\right]+\left[x,\left(ade_j\right)^2(y)\right]
\end{aligned}
$$

所以 $\left(ade_j\right)^2\in Der\left(\widehat{W}\right)$。

由 $\left(ade_j\right)^2$ 是偶导子及 $\widehat{W}$ 是特征为 p 的域上的李超代数，仿照(1)，有

$$\left(ade_j\right)^{2p}[x,y]=\sum_{j=0}^{p}\left[\left(\left(ade_j\right)^2\right)^{p-j}(x),\left(\left(ade_j\right)^2\right)^{j}(y)\right]=\left[\left(ade_j\right)^{2p}(x),y\right]+\left[x,\left(ade_j\right)^{2p}(y)\right]$$

所以，$\left(ade_j\right)^{2p}\in Der\left(\widehat{W}\right)$

由于 $Der\left(\widehat{W}\right)=ad\widehat{W}$，所以 $\left(ade_j\right)^{p(e_j)}(j=1,2,\cdots,t)$ 都为内导子，因此有限维模李超代数 $\widehat{W}(n,m)$ 是限制李超代数。

参考文献 (References)

[1] 王璐，张丽华. 有限维模李超代数 $\widehat{W}(n,m)$ 的单性[J]. 理论数学, 2014, 4(6): 247-250.

[2] 张丽华，王璐. 有限维模李超代数 $\widehat{W}(n,m)$ 的导子超代数[J]. 理论数学, 2015(5): 95-99.

[3] 张永正，刘文德. 模李超代数[M]. 北京：科学出版社, 2004: 108-112.

[4] 徐晓宁，张朝凤，张永正. 模李超代数 Ω 的结合型与限制性[J]. 东北师大学报：自然科学版, 2009, 41(1): 1-5.

[5] 王颖，张永正. 限制李超代数的新定义[J]. 科学通报, 1999, 44(8): 807-813.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org