Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(3), 223-226
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63035

The Zeros of Some Differential Polynomials

Jing Yang, Wenbo Wang

Faculty of Science, China University of Petroleum (East China), Qingdao Shandong
Email: 1310231370@qq.com

Received: May 6th, 2016; accepted: May 18th, 2016; published: May 26th, 2016

Abstract

In this paper, we use the Nevanlinna theory and discuss the zeros of $ff''+a(f')^2+b$. This result generalizes the related results of Hayman, Mues and Tohge *et al.*

Keywords

Entire Function, Differential Polynomial, Zero, Value Distribution

一类微分多项式的零点分布的研究

杨　静，王文博

中国石油大学(华东)理学院，山东 青岛
Email: 1310231370@qq.com

收稿日期：2016年5月6日；录用日期：2016年5月18日；发布日期：2016年5月26日

摘　要

本文采用亚纯函数值分布理论作为工具，讨论了微分多项式 $ff''+a(f')^2+b$ 的零点分布情况，该结论推广了Hayman，Mues和Tohge等人的相关结果。

文章引用：杨静，王文博．一类微分多项式的零点分布的研究[J]．理论数学, 2016, 6(3): 223-226.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63035

关键词

整函数，微分多项式，零点，值分布

1. 研究背景

本文所提及的亚纯函数是指在整个复平面上的亚纯函数。设 f 是复平面上 1 个非常数的亚纯函数，并假设读者熟悉 Nevanlinna 理论的基本概念和结果及其标准记号[1]-[3]，例如 $T(r,f)$，$m(r,f)$，$N(r,f)$，$\bar{N}(r,f)$，$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$，$\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ 等等。同时我们用 $\bar{C}=C\cup\infty$ 表示扩充复平面。W.K. Hayman 在[4] [5]中提出了研究关于整函数 f 的齐次微分多项式 $ff''-2(f')^2$ 的零点分布的必要性。自此之后关于一个给定的整函数或亚纯函数的微分多项式的零点分布这一问题成为国际上研究的热点。

1978 年 E. Mues 在[6]中证明了如果 $a\in C-\{1\}$，f 为不满足 $f(z)=\exp(\alpha z+\beta)$ 这一形式的超越亚纯函数，其中 $\alpha,\beta\in C$。则微分多项式 $ff''-a(f')^2$ 至少存在一个零点。

近期 M. Ozawa 在[7]，G. Lehner 在[8]和 Tohge 在[9]中均提出了关于齐次微分多项式的一些相似结论。

我们将采用不同于别人的方法，讨论具有新的形式的微分多项式 $ff'+a(f')^2+b$ 的零点分布情况得到了以下结论。

定理 1 令 f 为超越整函数，a,b 为非零常数。如果微分多项式 $ff''+a(f')^2\neq 0$，$ff''+a(f')^2+b$ 有有限零点，则 f 满足

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)+S(r,f)$$

并且 $\delta(0,f)=0$，其中亏量 $\delta(a,f)$ 定义为

$$\delta(a,f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}$$

推论 1 令 f 为超越整函数，a,b 为非零常数。如果微分多项式 $ff''+a(f')^2\neq 0$，若 $\delta(0,f)>0$，则 $ff''+a(f')^2+b$ 必有无穷多个零点。

2. 定理的证明

为了证明定理 1，我们将考虑下面的方程

$$ff''+a(f')^2+b=R\mathrm{e}^{\alpha} \tag{1}$$

其中 R 为非零多项式，α 为整函数。

显然由(1)知 $T(r,e^{\alpha})\leq 4T(r,f)+S(r,f)$，并且根据 $T(r,\alpha)+T(r,\alpha')=S(r,\mathrm{e}^{\alpha})$ 可知 $T(r,\alpha)+T(r,\alpha')=S(r,f)$。

对(1)两边取对数导数可以得到

$$\frac{ff'''+(2a+1)ff''}{ff''+a(f')^2+b}=\frac{R'}{R}+\alpha'$$

令 $\frac{R'}{R}+\alpha'=T$ 可将上式化为

$$-Tff''+ff'''-aT(f')^2+(2a+1)ff''=bT \tag{2}$$

情况 1 假设$T\equiv 0$。令$Re^{\alpha}=c$，其中c为非零常数。将$Re^{\alpha}=c$代入(1)可得

$$ff''+a(f')^2=c-b \tag{3}$$

因为$c\neq b$，由(3)和对数导数引理得$m(r,1/f)=S(r,f)$并且

$$T(r,f)=N_{1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f) \tag{4}$$

令

$$H=\frac{f'-\sqrt{\frac{c-b}{a}}}{f} \tag{5}$$

由(4)可得$T(r,H)=S(r,f)$。再由(3)和(5)可知

$$\left[(a+1)H^2+H'\right]f+(2a+1)\sqrt{\frac{c-b}{a}}H=0$$

也就是说

$$\left[(a+1)H^2+H'\right]\equiv 0，\ (2a+1)\sqrt{\frac{c-b}{a}}H\equiv 0$$

因此$a=-1/2, 2H+H^2\equiv 0$。我们令$H=\frac{2}{z+c_2}$，其中c_2为常数。将H代入(5)我们得到

$$f'=\frac{2f}{z+c_2}+\sqrt{\frac{c-b}{a}}$$

因此$f(z)=-\sqrt{\frac{c-b}{a}}(z+c_2)+c_3(z+c_2)^2$，其中$c_3$为常数。显然矛盾。

情况 2 假设$T\not\equiv 0$由(2)知$m(r,1/f)=S(r,f)$并且(4)成立。

在多数情况下，我们可以讨论以下形式的微分方程：

$$ff''-(f')^2=Ae^{cz} \tag{6}$$

其中a,c为非零常数。我们可以证明(6)没有超越整函数解。

事实上，由(6)我们可以得到

$$cff''-cff'''+ff^{(4)}-(f'')^2=0 \tag{7}$$

令z_0为f的单零点。由(4)和(7)我们知z_0为$(cf'-f'')f''$的一个零点。

首先我们假设$f''(z_0)=0$。令

$$h=\frac{f''}{f} \tag{8}$$

那么h为f的一个小函数。根据(7)和(8)，我们有

$$(-ch'+h'')f-2h'f'=0 \tag{9}$$

由(4)和(9)我们知道h为一个非零常数。再由(9)得

$$f'(z)=l_1\mathrm{e}^{\sqrt{h}z}+l_2\mathrm{e}^{-\sqrt{h}z} \tag{10}$$

其中l_1，l_2为常数。由(6)和(10)我们得到矛盾。

因此，我们假设$cf'(z_0)-f''(z_0)=0$令

$$g=\frac{cf'-f''}{f} \tag{11}$$

如果$cf'-f'''\equiv 0$那么$f=c_1e^{cz}+c_2$。其中c_1，c_2为常数与(6)矛盾。因此$g\not\equiv 0$并且g为f的小函数。由(11)可得

$$f''=cf'-gf \tag{12}$$

根据(6)和(12)我们发现$g'f^2+bc=0$，同样得出矛盾。

综上所述，我们得到如果微分多项式$ff''+a(f')^2\not\equiv 0$ $ff''+a(f')^2+b$有有限零点，则f满足

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)+S(r,f)$$

这样我们就完成了定理1的证明。

3. 结论

本文中，我们针对Hyman猜想做了进一步推广，并且运用新的方法探讨了新形式下的微分多项式的零点分布，取得了较为满意的结果。

随着研究的不断深入，一些问题解决的同时也随之出现了一些新问题，需要我们继续探讨。我们会在已经取得的结果之上更加深入细致的研究，以期待取得更大的成绩。

致　谢

最后，向我的导师吕巍然教授表示我衷心的感谢！吕老师孜孜不倦的治学态度，认真求实的工作作风对我产生了深刻的影响。他知识渊博，见解独特，对工作对学生认真负责，在此谨向吕巍然教授致以最诚挚的谢意和崇高的敬意！衷心感谢张敏老师对我的指导和帮助！

参考文献 (References)

[1] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer, Berlin.

[3] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory Meromorphic Functions. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-017-3626-8

[4] Hayman, W.K. (1959) Picard Values of Meromorphic Functions and Their Derivatives. *Annals of Mathematics*, **70**, 9-42. http://dx.doi.org/10.2307/1969890

[5] Hayman, W.K. (1967) Research Problems in Function Yheory. The Athlone Press University of London, London.

[6] Mues, E. (1979) Über ein Problem von Hayman. *Mathematische Zeitschrift*, **164**, 239-259. http://dx.doi.org/10.1007/BF01182271

[7] Ozawa, M. (1989) Zeros of Certain Differential Polynomials. Analytic Function Theory of One Complex Variable. *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, **212**, 199-225.

[8] Lehners, G. (1984) Ube Nullstellenfreie Homogene Differentialpolynome. Dissertaion, Fath-Bereich Mathematik der Universitat Hannover.

[9] Tohge, K. (1993) On the Zeros of a Homogeneous Differential Polynomial. *Kodai Mathematical Journal*, **16**, 398-415. http://dx.doi.org/10.2996/kmj/1138039848