Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(5), 207-211
Published Online September 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55029

Convergence on Preconditioned Block AOR Iterative Method of *H*-Matrix

Chunyun Zhao

Zhangye Middle School, Zhangye Gansu
Email: zyzxzcy@126.com

Received: Aug. 30th, 2015; accepted: Sep. 18th, 2015; published: Sep. 21st, 2015

Abstract

We consider block AOR preconditioned iterative method for solving the linear system $Ax = b$, using the preconditioning technology. When the coefficient matrix A is an H-matrix, the convergence results of the presented method are given.

Keywords

***H*-Matrix, Block AOR Iterative Method, The Preconditioned Matrix, The Convergence**

一种*H*-矩阵的块预条件AOR迭代法的收敛性

赵春云

张掖中学，甘肃 张掖
Email: zyzxzcy@126.com

收稿日期：2015年8月30日；录用日期：2015年9月18日；发布日期：2015年9月21日

摘　要

本文利用块预条件技术考虑了解线性方程组 $Ax = b$ 的块预条件AOR迭代法。当方程组的系数矩阵 A 是 H-矩阵时，得出了该方法的收敛性结果。

文章引用: 赵春云. 一种 *H*-矩阵的块预条件 AOR 迭代法的收敛性[J]. 理论数学, 2015, 5(5): 207-211.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55029

关键词

***H*-矩阵，块AOR迭代法，预条件矩阵，收敛性**

1. 引言

考虑线性方程组：

$$Ax = b \tag{1}$$

其中 A 是 n 阶方阵，x 与 b 是 n 维向量。对(1)基本的迭代解法是：

$$Mx^{k+1} = Nx^{k+1} + b,\ \ k = 0,1,\cdots \tag{2}$$

其中 $A = M - N$ 且 M 是非奇异矩阵，这样(2)也可被写成：

$$x^{k+1} = Tx^k + c,\quad k = 0,1,\cdots,$$

其中 $T = M^{-1}N$，$c = M^{-1}b$。

对矩阵 A 做如下分块：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix} \tag{3}$$

这儿，每个对角块 $A_{ii} \in C^{n_i \times n_i}$，$i = 1,\cdots,m$，非奇，并且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$。如果 A 是非奇的，我们称 A 是非奇块矩阵。

通常，把矩阵 A 分裂成：

$$A = D - L - U$$

其中 D，$-L$ 和 $-U$ 分别是(3)中 A 的块对角，严格块下三角和严格块上三角部分，这样，矩阵 A 的块 AOR 迭代矩阵为：

$$l_{rw} = (D - rL)^{-1}\big((1-w)D + (w-r)L + wU\big)$$

其中 w 和 r 是两个实参数，并且 $w \neq 0$。特别地，当 r 和 w 取一些特殊值时，我们得到块 SOR，块 Gauss-Seidel 和块 Jacobi 迭代法。

为了更好的解(1)，引入了非奇块预条件矩阵 P，即考虑：

$$PAx = Pb \tag{4}$$

那么(4)的块 AOR 迭代格式为：

$$M_p x^{k+1} = N_p x^k + Pb,\quad k = 0,1,\cdots \tag{5}$$

其中 $PA = M_p - N_p$，M_p 是非奇异矩阵。这样(5)也可以表示为：

$$x^{k+1} = Tx^k + c,\quad k = 0,1,\cdots,$$

这儿，$T = M_p^{-1}N_p$，$c = M_p^{-1}Pb$。相似地，我们有块预条件 SOR 迭代法，块预条件 Gauss-Seidel 迭代法和块预条件 Jacobi 迭代法。

如果 A 是一个 M-矩阵，Alanelli 等在[1]中取 $P = Q + S$，其中 Q 是由 $L_{11}^{-1}, I_{22}, \cdots, I_{mm}$ 所构成的块对角矩阵(L_{11} 是 A_{11} 做 LU 三角分解的下三角矩阵)：

$$S=\begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1m} \\ -A_{21}L_{11}^{-1} & 0_{22} & \cdots & 0_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_{m1}L_{11}^{-1} & 0_{m2} & \cdots & 0_{mm} \end{pmatrix}$$

从文献[1]可以看出若块预条件矩阵 P 选择得合适，必将会提高迭代方法的收敛速度。本文在已经有的预条件矩阵的基础上引入参数，对(1)中系数矩阵 A 是 H -矩阵的情形进行了考虑，引入了新的块预条件矩阵，理论上分析了块预条件迭代法的收敛性。

2. 预条件迭代法

我们考虑预条件矩阵 $P_\alpha^\beta=Q_\alpha+S_\beta$，其中

$$Q_\alpha=\begin{pmatrix} \alpha_1A_{11}^{-1} & & & \\ & \alpha_2A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_mA_{mm}^{-1} \end{pmatrix},\quad S_\beta=\begin{pmatrix} O_{11} & & & -\beta_1A_{11}^{-1}A_{1s} & & \\ & O_{22} & & & -\beta_2A_{22}^{-1}A_{2t} & \\ & & \ddots & & & \\ & -\beta_rA_{rr}^{-1}A_{rl} & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & -\beta_mA_{mm}^{-1}A_{mn} & & & O_{mm} \end{pmatrix}$$

令 $P_\alpha^\beta A=\left(Q_\alpha+S_\beta\right)\left(D-L-U\right)=\tilde{D}-\tilde{L}-\tilde{U}$，则

$$P_\alpha^\beta A=\begin{pmatrix} \alpha_1A_{11}^{-1}A_{11}-\beta_1A_{11}^{-1}A_{1s}A_{s1} & \cdots & \alpha_1A_{11}^{-1}A_{1m}-\beta_1A_{11}^{-1}A_{1s}A_{sm} \\ \alpha_2A_{22}^{-1}A_{21}-\beta_2A_{22}^{-1}A_{2t}A_{t1} & \cdots & \alpha_2A_{22}^{-1}A_{2m}-\beta_2A_{22}^{-1}A_{2t}A_{tm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_rA_{rr}^{-1}A_{r1}-\beta_rA_{rr}^{-1}A_{rl}A_{l1} & \cdots & \alpha_rA_{rr}^{-1}A_{rm}-\beta_rA_{rr}^{-1}A_{rl}A_{lm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_mA_{mm}^{-1}A_{m1}-\beta_mA_{mm}^{-1}A_{mn}A_{n1} & \cdots & \alpha_mA_{mm}^{-1}A_{mm}-\beta_mA_{mm}^{-1}A_{mn}A_{nm} \end{pmatrix}$$

其中 $\tilde{D}$ 是由 $\alpha_1I_{11}-\beta_1A_{11}^{-1}A_{1s}A_{s1},\alpha_2I_{22}-\beta_2A_{22}^{-1}A_{2t}A_{t2},\cdots,\alpha_mI_{mm}-\beta_mA_{mm}^{-1}A_{mn}A_{nm}$ 所构成的块对角矩阵，

$$\tilde{L}=\begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & \cdots & O_{1m} \\ -\alpha_2A_{22}^{-1}A_{21}+\beta_2A_{22}^{-1}A_{2t}A_{t1} & O_{22} & \cdots & O_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_rA_{rr}^{-1}A_{r1}+\beta_rA_{rr}^{-1}A_{rl}A_{l1} & -\alpha_rA_{rr}^{-1}A_{r2}+\beta_rA_{rr}^{-1}A_{rl}A_{l2} & \cdots & O_{rm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_mA_{mm}^{-1}A_{m1}+\beta_mA_{mm}^{-1}A_{mn}A_{n1} & -\alpha_mA_{mm}^{-1}A_{m2}+\beta_mA_{mm}^{-1}A_{mn}A_{n2} & \cdots & O_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{U}=\begin{pmatrix} O_{11} & -\alpha_1A_{11}^{-1}A_{12}+\beta_1A_{11}^{-1}A_{1s}A_{s2} & \cdots & -\alpha_1A_{11}^{-1}A_{1m}+\beta_1A_{11}^{-1}A_{1s}A_{sm} \\ O_{21} & O_{22} & \cdots & -\alpha_2A_{22}^{-1}A_{2m}+\beta_2A_{22}^{-1}A_{2t}A_{tm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{r1} & O_{r2} & \cdots & -\alpha_rA_{rr}^{-1}A_{rm}+\beta_rA_{rr}^{-1}A_{rl}A_{lm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m1} & O_{m2} & \cdots & O_{mm} \end{pmatrix}$$

如果 $\tilde{D}$ 非奇，那么 $\left(\tilde{D}-r\tilde{L}\right)^{-1}$ 是存在的，这样，我们就可以定义 $P_\alpha^\beta A$ 的块预条件 AOR 迭代法。即：

$$\tilde{l}_{rw}=\left(\tilde{D}-r\tilde{L}\right)^{-1}\left(\left(1-w\right)\tilde{D}+\left(w-r\right)\tilde{L}+w\tilde{U}\right)$$

让 $\langle A\rangle=\left(m_{ij}\right)$ 表示矩阵 A 的比较矩阵，这儿 $m_{ii}=\left|a_{ii}\right|$ $\left(i=j\right)$，$m_{ij}=-\left|a_{ij}\right|\left(i\neq j\right)$。

在上面的定义下，$P_\alpha^\beta A$的比较矩阵为$\langle P_\alpha^\beta A\rangle=\langle\tilde{D}\rangle-|\tilde{L}|-|\tilde{U}|$，即：

$$\langle P_\alpha^\beta A\rangle=\begin{pmatrix} \langle \alpha_1 I_{11}-\beta_1 A_{11}^{-1}A_{1s}A_{s1}\rangle & \cdots & -|\alpha_1 A_{11}^{-1}A_{1m}-\beta_1 A_{11}^{-1}A_{1s}A_{sm}| \\ -|\alpha_2 A_{22}^{-1}A_{21}-\beta_2 A_{22}^{-1}A_{2t}A_{t1}| & \cdots & -|\alpha_2 A_{22}^{-1}A_{2m}-\beta_2 A_{22}^{-1}A_{2t}A_{tm}| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -|\alpha_r A_{rr}^{-1}A_{r1}-\beta_r A_{rr}^{-1}A_{rl}A_{l1}| & \cdots & -|\alpha_r A_{rr}^{-1}A_{rm}-\beta_r A_{rr}^{-1}A_{rl}A_{lm}| \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -|\alpha_m A_{mm}^{-1}A_{m1}-\beta_m A_{mm}^{-1}A_{mn}A_{n1}| & \cdots & \langle \alpha_m I_{mm}-\beta_m A_{mm}^{-1}A_{mn}A_{nm}\rangle \end{pmatrix}$$

3. 预备知识

定义 1 [2]：$A=M-N$，M 非奇，被称为矩阵 A 的一个分裂。如果 $M^{-1}\geq 0$，$N\geq 0$，那么 $A=M-N$ 被称为正则分裂。如果 M 是非奇 M -矩阵，$N\geq 0$，那么 $A=M-N$ 被称为 M -分裂。

引理 1 [2]：A 是 H -矩阵的充要条件是存在 $r>0$ 使 $\langle A\rangle r>0$，其中 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^{\mathrm{T}}$。

引理 2 [3] [4]：如果 $A=M-N$ 是 A 的一个 M -分裂，那么 $\rho(M^{-1}N)<1$ 的充要条件是 A 是一个非奇 M -矩阵。

引理 3 [5]：设 A 和 B 是两个 n 阶方阵且 $0\leq B\leq A$，那么 $\rho(B)\leq\rho(A)$。

引理 4 [3] [6]：如果 A 是 H -矩阵，那么 $|A^{-1}|\leq\langle A\rangle^{-1}$。

引理 5 [7]：如果 A 和 B 是两个 n 阶矩阵，那么 $\langle A-B\rangle\geq\langle A\rangle-|B|$。

4. 主要结论及证明

定理 1：让 A 是一个非奇 H -矩阵，若有 α_i，β_i 都大于 0 且：

$$\alpha_i e_{n_i}>\beta_i|A_{ik}|\left(2\langle A_{kk}\rangle r_{n_k}-e_{n_k}\right)$$

那么 $P_\alpha^\beta A$ 也是一个非奇 H -矩阵。其中 $r=\left(r_{n_1}^{\mathrm{T}},r_{n_2}^{\mathrm{T}},\cdots,r_{n_m}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\langle A\rangle^{-1}e$ 且 $e=\left(e_{n_1}^{\mathrm{T}},e_{n_2}^{\mathrm{T}},\cdots,e_{n_m}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$ 和 $e_{n_i}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in R^{n_i}$，$i=1,2,\cdots,m$，且与矩阵 A 有相同的分块形式。

证明：由于 A 是一个非奇 H -矩阵，那么 $r>0$。

令 $\left(P_\alpha^\beta A\right)_{ij}=\alpha_i A_{ii}^{-1}A_{ij}-\beta_i A_{ii}^{-1}A_{ik}A_{kj}$，$i,j=1,2,\cdots,m,k\neq i$ 那么：

$$\begin{aligned}
&\left(\langle P_\alpha{}^\beta A\rangle r\right)_{n_i}\\
&=\langle \alpha_i A_{ii}^{-1}A_{ii}-\beta_i A_{ii}^{-1}A_{ik}A_{ki}\rangle r_{n_i}-\sum_{j\neq i,\mathrm{k}}^{m}|\alpha_i A_{ii}^{-1}A_{ij}-\beta_i A_{ii}^{-1}A_{ik}A_{kj}|r_{n_j}-|\alpha_i A_{ii}^{-1}A_{ik}-\beta_i A_{ii}^{-1}A_{ik}A_{kk}|r_{n_k}\\
&\geq\langle \alpha_i A_{ii}^{-1}A_{ii}\rangle r_{n_i}-|\beta_i A_{ii}^{-1}A_{ik}A_{ki}|r_{n_i}-\sum_{j\neq i,k}^{m}|\alpha_i A_{ii}^{-1}A_{ij}|r_{n_j}-\sum_{j\neq i,k}^{m}|\beta_i A_{ii}^{-1}A_{ik}A_{kj}|r_{n_j}-|\alpha_i A_{ii}^{-1}A_{ik}|r_{n_k}-|\beta_i A_{ii}^{-1}A_{ik}A_{kk}|r_{n_j}\\
&\geq\alpha_i r_{n_i}-\beta_i|A_{ii}^{-1}||A_{ik}||A_{ki}|r_{n_i}-\alpha_i\sum_{j\neq i,k}^{m}|A_{ii}^{-1}||A_{ij}|r_{n_j}-\beta_i\sum_{j\neq i,k}^{m}|A_{ii}^{-1}||A_{ik}||A_{kj}|r_{n_j}-\alpha_i|A_{ii}^{-1}||A_{ik}|r_{n_k}-\beta_i|A_{ii}^{-1}||A_{ik}||A_{kk}|r_{n_k}\\
&\geq\alpha_i r_{n_i}-\beta_i\langle A_{ii}\rangle^{-1}|A_{ik}||A_{ki}|r_{n_i}-\alpha_i\langle A_{ii}\rangle^{-1}\sum_{j\neq i,k}^{m}|A_{ij}|r_{n_j}-\beta_i\langle A_{ii}\rangle^{-1}\sum_{j\neq i,k}^{m}|A_{ik}||A_{kj}|r_{n_j}\\
&\quad-\alpha_i\langle A_{ii}^{-1}\rangle|A_{ik}|r_{n_k}-\beta_i\langle A_{ii}\rangle^{-1}|A_{ik}|\langle A_{kk}\rangle r_{n_k}\\
&=\alpha_i\langle A_{ii}\rangle^{-1}e_{n_i}+\beta_i\langle A_{ii}\rangle^{-1}|A_{ik}|\left[-|A_{ki}|r_{n_i}-\sum_{j\neq i,k}^{m}|A_{kj}|r_{n_j}+\langle A_{kk}\rangle r_{n_k}-2\langle A_{kk}\rangle r_{n_k}\right]\\
&=\alpha_i\langle A_{ii}\rangle^{-1}e_{n_i}+\beta_i\langle A_{ii}\rangle^{-1}|A_{ik}|\left(e_{n_k}-2\langle A_{kk}\rangle r_{n_k}\right)=\langle A_{ii}\rangle^{-1}\left[\alpha_i e_{n_i}-\beta_i|A_{ik}|\left(2\langle A_{kk}\rangle r_{n_k}-e_{n_k}\right)\right]>0
\end{aligned}$$

因此，$\left\langle P_\alpha^\beta A\right\rangle$是一个非奇$H$-矩阵，所以$P_\alpha^\beta A$是一个非奇$H$-矩阵。

定理2：如果A是一个非奇H-矩阵，$0\le r\le\omega\le 1$，$\omega\ne 0$，并且$\alpha_i e_{n_i} > \beta_i\left|A_{ik}\right|\left(2\left\langle A_{kk}\right\rangle r_{n_k}-e_{n_k}\right)$。那么$\rho\left(\tilde{l}_{r\omega}\right)<1$。

证明：由定理1知$\left\langle P_\alpha^\beta A\right\rangle$是一个非奇$H$-矩阵，且$\left\langle P_\alpha^\beta A\right\rangle=\left\langle\tilde{D}\right\rangle-\left|\tilde{L}\right|-\left|\tilde{U}\right|$。

那么$\left\langle P_\alpha^\beta A\right\rangle$的AOR迭代矩阵为：

$$\ddot{l}_{r\omega}=\left(\left\langle\tilde{D}\right\rangle-r\left|\tilde{L}\right|\right)^{-1}\left((1-\omega)\left\langle\tilde{D}\right\rangle+(\omega-r)\left|\tilde{L}\right|+\omega\left|\tilde{U}\right|\right)$$

由引理2知$\rho\left(\ddot{l}_{r\omega}\right)<1$。因为：

$$\begin{aligned}\left|\tilde{l}_{r\omega}\right|&=\left|\left(\tilde{D}-r\tilde{L}\right)^{-1}\left((1-\omega)\tilde{D}+(\omega-r)\tilde{L}+\omega\tilde{U}\right)\right|\\&=\left|\left(\tilde{D}-r\tilde{L}\right)^{-1}\tilde{D}\left(\tilde{D}\right)^{-1}\left((1-\omega)\tilde{D}+(\omega-r)\tilde{L}+\omega\tilde{U}\right)\right|\\&=\left|\left(I-r\tilde{D}^{-1}\tilde{L}\right)^{-1}\left((1-\omega)I+(\omega-r)\tilde{D}^{-1}\tilde{L}+\omega\tilde{D}^{-1}\tilde{U}\right)\right|\\&\le\left|\left(I-r\tilde{D}^{-1}\tilde{L}\right)^{-1}\right|\left((1-\omega)I+(\omega-r)\left|\tilde{D}^{-1}\tilde{L}\right|+\omega\left|\tilde{D}^{-1}\tilde{U}\right|\right)\\&\le\left(I-r\left\langle\tilde{D}\right\rangle^{-1}\left|\tilde{L}\right|^{-1}\right)\left((1-\omega)I+(\omega-r)\left\langle\tilde{D}\right\rangle^{-1}\left|\tilde{L}\right|+\omega\left\langle\tilde{D}\right\rangle^{-1}\left|\tilde{U}\right|\right)\\&\le\left(I-r\left\langle\tilde{D}\right\rangle^{-1}\left|\tilde{L}\right|^{-1}\right)\left\langle\tilde{D}\right\rangle^{-1}\left\langle\tilde{D}\right\rangle\left((1-\omega)I+(\omega-r)\left\langle\tilde{D}\right\rangle^{-1}\left|\tilde{L}\right|+\omega\left\langle\tilde{D}\right\rangle^{-1}\left|\tilde{U}\right|\right)\\&=\left(\left\langle\tilde{D}\right\rangle-r\left|\tilde{L}\right|\right)^{-1}\left((1-\omega)\left\langle\tilde{D}\right\rangle+(\omega-r)\left|\tilde{L}\right|+\omega\left|\tilde{U}\right|\right)\\&=\ddot{l}_{r\omega}\end{aligned}$$

所以，由引理3，$\rho\left(\tilde{l}_{r\omega}\right)\le\rho\left(\left|\tilde{l}_{r\omega}\right|\right)\le\rho\left(\ddot{l}_{r\omega}\right)<1$。

参考文献 (References)

[1] Anelli, M. and Hadjidimos, A. (2004) Block Gauss elimination followed by a classical. Iterative method for the solution of linear systems. *Computational and Applied Mathematics*, **163**, 381-400. http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2003.08.045

[2] 王学忠，李晓梅 (2012) *H*-矩阵的预条件对角占优性. *理论数学*, **1**, 39-44.

[3] Li, W. and You, Z.Y. (1998) The multi-parameters overrelaxation method. *Journal of Computational Mathematics*, **16**, 231-238.

[4] Varga, R.S. (1981) Matrix iterative analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

[5] Berman, A. and Plemmons, R.J. (1994) Nonnegative matrices in the mathematical sciences. SIAM, Philadelphia. http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611971262

[6] Kolotilina, L.Yu. (1995) Two-sided bounds for the inverse of an *H*-matrix. *Linear Algebra and Its Applications*, **225**, 117-123. http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(93)00325-T

[7] 黄延祝，杨传胜 (2007) 特殊矩阵分析及应用. 科学出版社，北京.