Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(5), 212-218
Published Online September 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55030

Uniqueness of Meromorphic Function and Its Differential Polynomial Sharing Small Functions

Chengwei Yang, Dan Liu

Institute of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
Email: yangchw213@stu.scau.edu.cn, liudan@scau.edu.cn

Received: Aug. 30th, 2015; accepted: Sep. 18th, 2015; published: Sep. 21st, 2015

Abstract

In this paper, we study the uniqueness of meromorphic function and its differential polynomial sharing two small functions, and prove the follow theory. Let $f(z)$ be a nonconstant meromorphic function satisfying $N(r,f)\le\frac{1}{5n+20}T(r,f)$, let n be an integer and let $a(z)$ and $b(z)$ be two distinct small functions related to $f(z)$. Let $F(z)=f^{(n)}(z)+a_1(z)f^{(n-1)}(z)+\cdots+a_n(z)f(z)$, where $a_1(z),a_2(z),\cdots,a_n(z)$ are small functions related to $f(z)$. If $f(z)$ and $F(z)$ share $a(z)$ and $b(z)$ CM almost, then $f(z)\equiv F(z)$. Thus, this result improves some existing results.

Keywords

Meromorphic Function, Sharing Function, Differential Polynomial, Uniqueness

亚纯函数与微分多项式分担小函数的唯一性

杨城威，刘　丹

华南农业大学应用数学研究所，广东　广州
Email: yangchw213@stu.scau.edu.cn, liudan@scau.edu.cn

文章引用：杨城威，刘丹．亚纯函数与微分多项式分担小函数的唯一性[J]．理论数学, 2015, 5(5): 212-218.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55030

收稿日期：2015年8月30日；录用日期：2015年9月18日；发布日期：2015年9月21日

摘　要

本文研究了亚纯函数及其微分多项式分担两个小函数的唯一性定理，证明了：设 $f(z)$ 是开平面上满足 $N(r,f)\le\frac{1}{5n+20}T(r,f)$ 的非常数亚纯函数，n 是正整数，$a(z)$ 和 $b(z)$ 为 $f(z)$ 的两个相互判别的小函数，$F(z)=f^{(n)}(z)+a_1(z)f^{(n-1)}(z)+\cdots+a_n(z)f(z)$，其中 $a_1(z),a_2(z),\cdots,a_n(z)$ 是 $f(z)$ 的小函数。若 $f(z)$ 和 $F(z)$ 几乎CM分担 $a(z)$ 和 $b(z)$，则 $f(z)\equiv F(z)$。这个结果改进了已有的一些结果。

关键词

亚纯函数，分担函数，微分多项式，唯一性

1. 引言与主要结果

设 $f(z)$ 是开平面上的非常数亚纯函数，本文将使用值分布论中的标准记号(可参考[1] [2])：

$$T(r,f),m(r,f),N(r,f),\bar{N}(r,f),S(r,f),\cdots$$

设 $a(z)$ 是开平面上的一个亚纯函数，称 $a(z)$ 是 $f(z)$ 的小函数，若 $a(z)$ 满足：

$$T(r,a)=S(r,f)$$

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个非常数亚纯函数，$a(z)$ 为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的公共小函数。称 $f(z)$ 和 $g(z)$ CM 分担 $a(z)$，如果 $f(z)-a(z)$ 与 $g(z)-a(z)$ 有相同的零点并且其重数也相同。

令 $n(r,a)$ 表示 $f(z)-a(z)$ 与 $g(z)-a(z)$ 在圆盘 $\{z:|z|\le r\}$ 内公共零点的个数(计重数)，$N(r,a)$ 表示相应的密指量，记：

$$N_{12}(r,a)=N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(r,\frac{1}{g-a}\right)-2N(r,a)。$$

称 $f(z)$ 和 $g(z)$ 几乎 CM 分担 $a(z)$，若 $N_{12}(r,a)\le S(r,f)+S(r,g)$。显然，若 $f(z)$ 和 $g(z)$ CM 分担 $a(z)$，则 $f(z)$ 和 $g(z)$ 一定是几乎 CM 分担 $a(z)$。

1976 年，Ruble L. A.和 Yang C. C. [3]证明了：若整函数 $f(z)$ 及其一阶导数 $f'(z)$ CM 分担两个不同的有穷复数 a 和 b，则 $f(z)\equiv f'(z)$。自此以来，对于这一结果的改进和研究一直在继续。1983 年，Gundersen G. G. [4]证明了将整函数换为亚纯函数，上述结果仍然成立；1994 年，顾永兴[5]将一阶导数 $f'(z)$ 换为更为一般的 $f(z)$ 的线性微分多项式 $F(z)=f^{(n)}(z)+a_1(z)f^{(n-1)}(z)+\cdots+a_n(z)f^{(n)}(z)$，在满足 $a+b\ne0$ 或 $a_n(z)\not\equiv-1$ 的条件下，有 $f(z)\equiv F(z)$ 成立，并猜测条件 $a+b\ne0$ 或 $a_n(z)\not\equiv-1$ 是可以去掉的；1995 年，方明亮[6]去掉了条件 $a+b\ne0$ 或 $a_n(z)\not\equiv-1$，证明了更一般的结果：对于满足 $N(r,f)=S(r,f)$ 的亚纯函数 $f(z)$ 及其线性微分多项式 $F(z)$，若 $f(z)$ 和 $F(z)$ 几乎 CM 分担两个不同的有穷复数 a 和 b，则 $f(z)\equiv F(z)$；2002 年，王建平[7]将方明亮结果中分担两个常数的情形推广到了分担两个小函数的情形；2006 年，陈春芳[8]在王建平结果的基础上，将 $N(r,f)=S(r,f)$ 这一限制推广为 $N(r,f)\le\frac{1}{8n+17}T(r,f)$。

本文进一步改进了上述结果，证明了如下定理：

定理 1：设 $f(z)$ 是开平面上满足 $N(r,f)\le \frac{1}{5n+20}T(r,f)$ 的非常数亚纯函数，n 是正整数，$a(z)$ 和 $b(z)$ 是 $f(z)$ 的两个相互判别的小函数，$F(z)$ 如定理 B。若 $f(z)$ 和 $F(z)$ 几乎 CM 分担 $a(z)$ 和 $b(z)$，则 $f(z)\equiv F(z)$。

2. 主要引理

为了证明定理，需要如下结果。

引理 1 [2]：设 $f(z)$ 为开平面上非常数亚纯函数，$a_j\ (j=1,2,\cdots,q)$ 为 $q(\ge 3)$ 个判别的复数(其中之一可以是 ∞)，则：

$$(q-2)T(r,f)\le \sum_{j=1}^{q}\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+S(r,f)$$

引理 2 [8]：设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是开平面上满足：

$$\bar{N}(r,f)\le \lambda T(r,f),\quad \bar{N}(r,g)\le \lambda T(r,g)$$

的两个亚纯函数，若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 几乎 CM 分担 0,1，并且存在 $a\in\{0,1\}$ 使得：

$$N(r,a)-\bar{N}(r,a)>\lambda T(r,f)+\lambda T(r,g)+S(r,f)+S(r,g)$$

其中 $0<\lambda<1$，则 $f(z)\equiv g(z)$。

引理 3 [8]：设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是开平面上满足：

$$\bar{N}(r,f)\le \lambda T(r,f),\quad \bar{N}(r,g)\le \lambda T(r,g)$$

的两个亚纯函数，若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 几乎 CM 分担 0，1，且 $f(z)$ 不是 $g(z)$ 的线性变换，则对于任意 $a\in\{0,1\}$ 有：

$$N(r,a)\le \overline{N_0}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\overline{N_0}\left(r,\frac{1}{g'}\right)+3\lambda T(r,f)+3\lambda T(r,g)+S(r,f)+S(r,g)$$

其中 $0<\lambda<1$。

引理 4：设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是开平面上满足：

$$\bar{N}(r,f)\le \frac{1}{5n+20}T(r,f),\quad \bar{N}(r,g)\le \frac{1}{5n+20}T(r,g)$$

的两个亚纯函数，若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 几乎 CM 分担 0，1，且：

$$\varlimsup_{\substack{r\to\infty\\ r\in I}}\frac{N(r,0)+N(r,1)}{T(r,f)+T(r,g)}<\frac{10n+32}{15n+60}$$

其中 I 是一个无穷测度的 r 值集，则 $f(z)$ 是 $g(z)$ 的一个分式线性变换。

证明：若 $f(z)$ 不是 $g(z)$ 的一个分式线性变换，则由引理 3，令 $\lambda=\frac{1}{5n+20}$，得：

$$N(r,0)\le \overline{N_0}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\overline{N_0}\left(r,\frac{1}{g'}\right)+\frac{3}{5n+20}T(r,f)+\frac{3}{5n+20}T(r,g)+S(r,f)+S(r,g)$$

$$N(r,1)\le \overline{N_0}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\overline{N_0}\left(r,\frac{1}{g'}\right)+\frac{3}{5n+20}T(r,f)+\frac{3}{5n+20}T(r,g)+S(r,f)+S(r,g)。$$

另一方面，由引理 1 及 $f(z)$ 和 $g(z)$ 几乎 CM 分担 0,1 有：

$$T(r,f)\le \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\overline{N}(r,f)-N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,f)$$

$$\le \overline{N}(r,0)+\overline{N}(r,1)+\frac{1}{5n+20}T(r,f)-\overline{N_0}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,f)+S(r,g)$$

$$T(r,g)\le \overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+\overline{N}(r,g)-N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,g)$$

$$\le \overline{N}(r,0)+\overline{N}(r,1)+\frac{1}{5n+20}T(r,g)-\overline{N_0}\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,f)+S(r,g)$$

由以上四式得：

$$2\{T(r,f)+T(r,g)\}$$

$$\le 3\{\overline{N}(r,0)+\overline{N}(r,1)\}+\overline{N}(r,0)+\overline{N}(r,1)-2\left\{\overline{N_0}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\overline{N_0}\left(r,\frac{1}{g'}\right)\right\}$$

$$+\frac{2}{5n+20}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)+S(r,g)$$

$$\le 3\{\overline{N}(r,0)+\overline{N}(r,1)\}+\frac{8}{5n+20}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)+S(r,g)$$

即有：

$$\varliminf_{\substack{r\to\infty\\ r\in I}}\frac{N(r,0)+N(r,1)}{T(r,f)+T(r,g)}\ge \varliminf_{\substack{r\to\infty\\ r\in I}}\frac{\overline{N}(r,0)+\overline{N}(r,1)}{T(r,f)+T(r,g)}\ge\frac{10n+32}{15n+60}$$

矛盾，故 $f(z)$ 是 $g(z)$ 的一个分式线性变换。

引理 5 [7]：设 $f(z)$ 是开平面上满足 $N(r,f)=S(r,f)$ 的非常数亚纯函数，n 是正整数，$F(z)=f^{(n)}(z)+a_1(z)f^{(n-1)}(z)+\cdots+a_n(z)f^{(n)}(z)$，$a(z)$ 和 $b(z)$ 是 $f(z)$ 的两个相互判别的小函数。若 $f(z)$ 和 $F(z)$ 几乎 CM 分担 $a(z)$ 和 $b(z)$，则 $f(z)\equiv F(z)$。

3. 定理的证明

令：

$$g(z)=\frac{f(z)-a(z)}{b(z)-a(z)},\quad G(z)=\frac{F(z)-a(z)}{b(z)-a(z)} \tag{1}$$

由 $f(z)$ 和 $F(z)$ 几乎 CM 分担 $a(z)$，$b(z)$ 可知，$g(z)$ 和 $G(z)$ 几乎 CM 分担 0,1，且：

$$T(r,g)=T(r,f)+S(r,f) \tag{2}$$

$$T(r,G)=T(r,F)+S(r,f) \tag{3}$$

则对 $g(z)$ 和 $G(z)$ 有：

$$N(r,0)+N(r,1)\le N\left(r,\frac{1}{G-g}\right)+S(r,f)\le N\left(r,\frac{1}{F-f}\right)+S(r,f)$$

$$\le T(r,F-f)+S(r,f)\le T(r,f)+n\overline{N}(r,f)+S(r,f)$$

$$\le\frac{6n+20}{5n+20}T(r,f)+S(r,f)$$

即有：

$$N(r,0)+N(r,1)\le\frac{6n+20}{5n+20}T(r,f)+S(r,f) \tag{4}$$

由(2) (4)和 Nevanlinna 第一基本定理有：

$$\begin{aligned}2T(r,f)=2T(r,g)+S(r,f)&\le T\left(r,\frac{1}{g}\right)+T\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+S(r,f)\\&\le N\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+m\left(r,\frac{1}{g}\right)+m\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+S(r,f)\\&\le N(r,0)+N(r,1)+m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+m\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+S(r,f)\\&\le\frac{6n+20}{5n+20}T(r,f)+m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+m\left(r,\frac{1}{f-b}\right)+S(r,f)\end{aligned}$$

另一方面，令：

$$\phi_1(z)=a^{(n)}(z)+a_1(z)a^{(n-1)}(z)+\cdots+a_{n-1}(z)a'(z)+a_n(z)a(z)$$

$$\phi_2(z)=b^{(n)}(z)+a_1(z)b^{(n-1)}(z)+\cdots+a_{n-1}(z)b'(z)+a_n(z)b(z)$$

下面分两种情形讨论。

情形 1：$F(z)-\phi_1(z)\equiv F(z)-\phi_2(z)$，则：

$$\begin{aligned}&m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+m\left(r,\frac{1}{f-b}\right)\le m\left(r,\frac{1}{f-a}+\frac{1}{f-b}\right)+S(r,f)\\&\le m\left(r,\frac{F-\phi_1}{f-a}+\frac{F-\phi_1}{f-b}\right)+m\left(r,\frac{1}{F-\phi_1}\right)+S(r,f)\\&\le T(r,F-\phi_1)+S(r,f)\le T(r,F)+S(r,f).\end{aligned}$$

情形 2：$F(z)-\phi_1(z)\not\equiv F(z)-\phi_2(z)$，则：

$$\begin{aligned}&m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+m\left(r,\frac{1}{f-b}\right)\\&\le m\left(r,\frac{F-\phi_1}{f-a}\right)+m\left(r,\frac{1}{F-\phi_1}\right)+m\left(r,\frac{F-\phi_2}{f-b}\right)+m\left(r,\frac{1}{F-\phi_2}\right)+S(r,f)\\&\le m\left(r,\frac{1}{F-\phi_1}\right)+m\left(r,\frac{1}{F-\phi_2}\right)+S(r,f)\le m\left(r,\frac{1}{F-\phi_1}+\frac{1}{F-\phi_2}\right)+S(r,f)\\&\le m\left(r,\frac{W(F,\phi_1,\phi_2)}{F-\phi_1}+\frac{W(F,\phi_1,\phi_2)}{F-\phi_2}\right)+m\left(r,\frac{1}{W(F,\phi_1,\phi_2)}\right)+S(r,f)\\&\le T(r,W(F,\phi_1,\phi_2))+S(r,f)\le T(r,c_1F''+c_2F'+c_3F)+S(r,f)\\&\le T(r,F)+2\overline{N}(r,f)+S(r,f)\le T(r,F)+\frac{2}{5n+20}T(r,f)+S(r,f)\end{aligned}$$

其中$W(F,\phi_1,\phi_2)$为F，ϕ_1，ϕ_2的 Wronsky 行列式，$c_j\,(j=1,2,3)$为$f(z)$的小函数。

综上两种情形有：

$$m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+m\left(r,\frac{1}{f-b}\right)\le T(r,F)+\frac{2}{5n+20}T(r,f)+S(r,f)$$

从而有：

$$\frac{4n+18}{5n+20}T(r,f)\le T(r,F)+S(r,f) \tag{5}$$

由(4) (5)有：

$$\varlimsup_{\substack{r\to\infty\\ r\in I}}\frac{N(r,0)+N(r,1)}{T(r,g)+T(r,G)}=\varlimsup_{\substack{r\to\infty\\ r\in I}}\frac{N(r,0)+N(r,1)}{T(r,f)+T(r,F)}=\frac{6n+20}{9n+38}<\frac{10n+32}{15n+60}$$

由引理 3 知 $G(z)$ 是 $g(z)$ 的一个分式线性变换，即：

$$G(z)=\frac{Ag(z)+B}{Cg(z)+D} \tag{6}$$

其中 A,B,C,D 为有穷复数，且 $AD-BC\ne 0$。

另一方面，由(2) (3)有：

$$N(r,g)=N(r,f)+S(r,f) \tag{7}$$

$$N(r,g)=N(r,F)+S(r,f)\le N(r,f)+n\bar{N}(r,f)+S(r,f) \tag{8}$$

如果 $C=0$，则 $G(z)=\frac{A}{D}g(z)+\frac{B}{D}$。从而 $N(r,G)=N(r,g)$。结合(7) (8)，即有：

$$\bar{N}(r,f)=S(r,f)$$

则由文献[6]中的注，类似可证 $N(r,f)=S(r,f)$。

如果 $C\ne 0$，设 z_0 为 $g(z)$ 的极点，则由(6)， $G(z_0)=\frac{A}{C}$。

另一方面，由(1)中 $G(z)$ 的构造，则 $G(z)$ 的极点来自 $a(z)$ 的极点，或者 $b(z)-a(z)$ 的零点和极点，或者 $F(z)$ 的极点。又由 $F(z)$ 的构造，其极点只能来自 $f(z)$ 的极点，或者 $a_1(z),a_2(z),\cdots,a_n(z)$ 的极点。若 z^* 是 $f(z)$ 的极点但不是 $a(z)$ 的极点，且既不是 $b(z)-a(z)$ 的零点和极点，也不是 $a_1(z),a_2(z),\cdots,a_n(z)$ 的极点，则 z^* 是 $g(z)$ 的极点。故 $G(z^*)=\frac{A}{C}$。从而 $G(z)$ 的极点只能来自 $a(z)$ 的极点或者 $b(z)-a(z)$ 的零点和极点，或者 $a_1(z),a_2(z),\cdots,a_n(z)$ 的极点，所以：

$$N(r,G)=S(r,f)$$

结合(8)即有 $N(r,f)=S(r,f)$。

综上可得 $N(r,f)=S(r,f)$，则由引理 5 即可得 $f(z)\equiv F(z)$。

证毕。

致　谢

作者衷心感谢方明亮教授的指导和帮助！

基金项目

本文由国家自然科学基金资助(基金号：11371149)。

参考文献 (References)

[1] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮 (2007) 正规族理论及其应用. 科学出版社, 北京.

[2] 仪洪勋, 杨重骏 (1995) 亚纯函数唯一性理论. 科学出版社, 北京.

[3] Rubel, L.A. and Yang, C.C. (1976) Values shared by an entire function and its derivative. Complex Analysis, Kentueky.

[4] Gundersen, G.G. (1983) Meromorphic functions that share two finite values with their derivative. *Pacific Journal of Mathematics*, **105**, 229-309.

[5] 顾永兴 (1994) 整函数与微分多项式的唯一性. *数学学报*, **6**, 791-798.

[6] 方明亮 (1995) 涉及微分多项式的亚纯函数的唯一性. *数学进展*, **3**, 244-248.

[7] 王建平 (2002) 亚纯函数及其微分多项式的唯一性. *数学研究与评论*, **2**, 253-260.

[8] 陈春芳 (2006) 亚纯函数及其微分多项式的唯一性. *南京大学学报*(*自然科学版*), **1**, 17-21.