Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 167-171
Published Online September 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.45025

The Influence of Π-Supplemented Subgroups on Finite Groups

Baojun Li, Aming Liu

College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu
Email: baojunli@cuit.edu.cn

Received: Jul. 8th, 2014; revised: Aug. 6th, 2014; accepted: Aug. 15th, 2014

Abstract

Let H be a subgroup G. If every chief factor L/K of G, $\left|G/K : N_{G/K}\left(HK/K \cap L/K\right)\right|$ is a $\pi\left(HK/K \cap L/K\right)$-number, then H is called satisfying Π-property in G. If there exists a subgroup T of G such that $G = HT$ and $H \cap T \le I \le H$, where I satisfies Π-property in G, then H is called Π-supplemented in G. By the property of Π-supplemented, some new criterion of *p*-nilpotency of finite groups is obtained.

Keywords

Finite Groups, *p*-Nilpotent, Π-Supplemented

Π-可补充子群对有限群结构的影响

李保军，刘阿明

成都信息工程学院应用数学学院，成都
Email: baojunli@cuit.edu.cn

收稿日期：2014年7月8日；修回日期：2014年8月6日；录用日期：2014年8月15日

摘　要

H 是群 G 的子群，如果对群 G 的任意主因子 L/K，$\left|G/K : N_{G/K}\left(HK/K \cap L/K\right)\right|$ 是 $\pi\left(HK/K \cap L/K\right)$-数，

则称 H 在 G 中满足Π-性质；如果存在 G 的子群 T 使得 $G=HT$，并且 $H\cap T\le I\le H$，其中 I 在 G 中满足Π-性质，则称 H 在 G 中是Π-可补充的。利用子群的Π-可补充性，得到了有限群*p*-幂零性的一个新的判定方法。

关键词

有限群，*p*-幂零，Π-可补

1. 引言

本文所讨论的群皆为有限群。文中所用的符号和概念都是标准的，对未交代的符号和概念，读者可参阅文献[1]和[2]。本文中，我们用 G 表示一个群；π 表示素数的一个集合，π' 为 π 在所有素数集合中的补集(当 π 仅包含一个素数 p 时，我们记作 p')；$O_p(G)$ 为 G 的最大正规 p-子群，相应地，$O_{p'}(G)$ 为 G 的最大正规 p'-子群。

众所周知，早在 1939 年，O. Ore 就在 Duke Math 上发表文章[3]，给出子群置换的概念，如果 $HT=TH$ 那么群 G 的子群 H 和 T 称为可置换的；如果 H 和 G 的任意子群可置换，那么 H 称为 G 的拟正规子群或置换子群[4]。作为这一工作的推广，W. E. Deskins 和 O. Kegel 分别在文章[5]和[6]引入了 s-拟正规子群(即和所有 Sylow 子群可置换的子群)，并得到了一些和子群置换类似的性质和结论。此后，子群各类广义置换性质被不断提出和研究，其中包括王燕鸣在文章[7]提出的 c-正规子群；M. Asaad 在文章[8]中提出的 $\mathfrak{Z}$-置换子群；郭文彬等[9]提出的 X-置换子群；苏向盈[10]和 T. Foguel [11]研究的半正规子群，胡滨等[12]讨论的 c-半置换子群；李保军、张志让[13]研究的 s-条件置换子群以及 A.Ahnmad 等[14]中引入的 U_c-正规子群等。近年来，Skiba [15]利用特定阶的准素子群的弱 s-置换性刻画群结构是子群广义置换研究方面的一个出色工作。

对子群置换性质的研究，一个自然的问题是，对于各类广义子群置换子群，它们是否有共同的性质？基于这一问题的思考，李保军[16]引入了子群 Π-性质和 Π-可补充性质的概念：

定义 1.1 [16]：H 是群 G 的子群，如果对群 G 的任意主因子 L/K，$\left|G/K:N_{G/K}(HK/K\cap L/K)\right|$ 是 $\pi(HK/K\cap L/K)$ 数，则称 H 在 G 中满足 Π-性质；如果存在 G 的子群 T 使得 $G=HT$，并且 $H\cap T\le I\le H$，其中 I 在 G 中满足 Π-性质，则称 H 在 G 中是 Π-可补充的.

文[16]的工作表明，子群 Π-性质为众多已有广义置换性质的一个本质特征。利用子群的 Π-性质和 Π-可补充性质，我们已得到了群结构的一些好的描述(参见[16] [17])，本文我们将进一步研究 Π-可补充子群与群的幂零性的联系。

2. 一些基本性质和引理

Π-可补充子群的概念是建立在子群 Π-性质上的，而我们知道 Π-性质是子群的一类重要性质，众多被广泛研究的广义置换子群都具有 Π-性质。

命题 2.1：(**[15]**，命题 2.2)设 G 是群，$H\le G$，如果满足下列条件之一，那么 H 在 G 中就具有 Π-性质：

(1) H 在 G 中是正规的；

(2) H 在 G 中是拟正规的；

(3) H 在 G 中是 s-拟正规的；

(4) H 在 G 中是与 G 的所有 Sylow 子群 X-可置换的，其中 X 是 G 的一个可解正规子群。

回忆，设 L/K 是群 G 的一个主因子，H 是 G 的一个子群，若 $L\subseteq HK$，则称 H 覆盖 L/K；若 $L\cap H\subseteq K$，则称 H 避开 L/K；如果 H 覆盖或者避开群 G 的任意一个主因子，则称 H 是群 G 的一个 CAP-子群。群 G 的一个正规子群 N 称为超可解超中心的，如果 N 的所有 G-主因子循环。群 G 的所有这样的正规子群 N 的积称为 G 的超可解超中心，记作 $Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G/H_G)$。

命题 2.2：([15]，命题 2.3)设 G 是群，$H\le G$，当满足下列条件之一时，则 H 在 G 中具有 Π-性质：

(1) H 是 G 的一个 CAP-子群

(2) $H/H_G\subseteq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G/H_G)$

我们需要以下引理来证明我们文章的主要结果。

引理 2.1：([17]，引理 2.1)设 G 是群，$H\le G$，$T\lhd G$，则有下面结论：

(1) 如果 H 在 G 中具有 Π-性质，那么 HN/N 在 G/N 具有 Π-性质；

(2) 如果 H 在 G 中具有 Π-性质，那么 H 在 G 中是 Π-可补充的；

(3) H 在 G 中是 Π-可补充的，如果 $N\subseteq H$ 或者 $(|H|,|N|)=1$，那么 HN/N 在 G/N 是 Π-可补充的；

(4) H 在 G 中是 Π-可补充的，则 H^x 在 G 中是 Π-可补充的，对任意 $x\in G$。

引理 2.2：([17]，引理 2.3)设 H 为 G 的 p-子群，N 为 G 的极小正规子群。又设 H 在 G 中是 Π-可补充的。如果 H 正规与 G 的某个 Slow p-子群 G_p，则 $H\cap N=N$ 或 1。

引理 2.3: 设 N 为 G 的正规 p-子群且 $|N|\le p^n$。如果 $\left(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)\right)=1$，则 $N\le Z_\infty(G)$。

证明：设 $L\le N$ 为 G 的一个极小正规子群。则 N/L 为 G/L 的正规 p-子群且 $|N/L|\le p^n$。显然 $\left(|N/L|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)\right)=1$ 仍成立。因此，由归纳，$N/L\le Z_\infty(G/L)$。于是我们只需证明 $L\le Z_\infty(G)$。设 $|L|=p^m, m\le n$。由 N/C 定理(参见[2]，第 I 章，定理 5.7)，$G/C_G(L)$ 同构与 $\mathrm{Aut}(L)$ 的一个子群。但由于 $|\mathrm{Aut}(L)|\,\Big|\,p^{\frac{n(n-1)}{2}}(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)$ 且 $\left(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)\right)=1$，因此 $G/C_G(L)$ 为 p-群。由[1, 1.7.11]知，$G/C_G(L)=1$，即 $L\le Z(G)\le Z_\infty(G)$。引理成立。

引理 2.4：([17]，定理 1.3)设 G 为一个群 p 为素数且 $\left(|G|,(p-1)\right)=1$。又设 E 为 G 的一个正规子群满足 G/E 为 p-幂零群，P 为 E 的一个 Sylow p-子群。如果 P 的所有 p 阶和 4 阶(当 P 为非交换 2-群)子群在 G 中是 Π-可补充的，则 G 为 p-幂零群。

3. Π-可补充子群与群的 *p*-幂零性

定理 3.1：设 G 为一个群 p 为奇素数且 $\left(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)\right)=1$。又设 E 为 G 的一个正规子群满足 G/E 为 p-幂零群，P 为 E 的一个 Sylow p-子群。如果 P 的所有 p^n 阶子群在 G 中是 Π-可补充的，则 G 为 p-幂零群。

证明：设结论不成立并设 G 为极小阶反例，即所有满足定理条件且阶小于 $|G|$ 的群为 p-幂零群。我们通过以下步骤完成证明。

(1) $O_{p'}(G)=1$

显然 $G/O_{p'}(G)$ 有正规子群 $EO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 满足 $\left(G/O_{p'}(G)\right)/\left(EO_{p'}(G)/O_{p'}(G)\right)$，且 $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 为 $EO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 的一个 Sylow p-子群。由引理 2.1，$PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 的所有 p^n 阶子群在 $G/O_{p'}(G)$ 中是 Π-可补充的。另一方面，$\left(|G/O_{p'}(G)|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)\right)=1$ 显然成立。因此，由 G 的选择，$G/O_{p'}(G)$ 为为 p-幂零群，而由此又立即可得出 G 为 p 幂零群，矛盾于 G 的选择。(1)成立。

(2) G 可解且 $O_p(G)\ne 1$.

因为 $\left(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)\right)=1$ 且 p 为奇素数，知 $|G|$ 与 2 互素，即 G 为奇阶群。由 Feit-Thompson 奇阶群定理得 G 可解。进而由(1)得 $O_p(G)\ne 1$ (参见[2]，第 V 章，定理 1.5(4))。

(3) 设 N 为 G 的一个极小正规子群且 $N \le O_p(G)$。则 N 为 p 阶循环群且 $N \le Z(G)$。

因为 $N \le O_p(G)$，所以 N 为交换 p-群。若 $N \not\subseteq E$，则 NE/E 为 G/E 的主因子。但 G/E 为 p-幂零群，因此 $N \cong NE/E$ 为 p 阶循环群。设 $N \subseteq E$。如果 $|N| \le p^n$，则由引理 2.3 知 $N \le Z_\infty(G)$。由 N 为 G 的一个极小正规子群得 N 为 p 阶循环群且 $N \le Z(G)$。设 $|N| > p^n$，则 N 有真子群 H 使得 $|H| = p^n$，并且由 p 群性质(参见[2]，第 IV 章，定理 5.4)可设 H 为 G 的 Sylow p-子群 G_p 的正规子群。由定理条件，H 在 G 中是 Π-可补充的。因此存在 G 的子群 T，使得 $G = HT$ 且 $H \cap T \le I \le H$，其中 I 在 G 中有 Π-性质。由于 $HT \subseteq NT$，$NT = G$。显然 $N \cap T \lhd T$。另一方面，由于 N 为交换群，$N \cap T \lhd N$。因此 $N \cap T \lhd NT = G$。如果 $T \ne G$，则 $N \cap T \ne N$，从而 $N \cap T = 1$。于是 $|N| = |G:T| = |HT:T| \le |H| = p^n$，矛盾。因此 $T = G$ 且进而有 $H = H \cap T = I$ 在 G 中有 Π-性质。由引理 2.2，得 $N = H$，矛盾。(3)成立。

(4) 最后的矛盾

由 p 为奇数且 $\left(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)\right)=1$，知 G 为奇数阶群。由 Feit-Thompson 奇阶群定理知 G 为可解群。由(1)及[2]，第 V 章，定理 1.6，$O_p(G) \ne 1$。令 N 为 G 的一个极小正规子群且 $N \le O_p(G)$。由(3)，$|N| = p$。因此由引理 2.1，E/N 的 Sylow p-子群 P/N 的所有 p^{n-1} 阶子群在 G/N 中 Π-可补充的。由于当 $n>1$ 时，$\left(|G/N|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)\right)=1$ 显然成立。因此由归纳，此时有 G/N 为 p-幂零群。又由(3)，$N \le Z(G)$，所以 G 为 p-幂零。若 $n=1$，则由引理 2.4 可得 G 为 p-幂零，与 G 的选择(非 p-幂零)矛盾。这一是最后一个矛盾，定理证明完成。

由命题 2.1；2.2 和引理 2.1 以及定理 3.1，我们可以得到以下推论：

推论 3.1：设 G 为一个群 p 为奇素数且 $\left(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)\right)=1$。又设 E 为 G 的一个正规子群满足 G/E 为 p-幂零群，P 为 E 的一个 Sylow p-子群。如果 P 的所有 p^n 满足以下条件之一，则 G 为 p-幂零群：

(1) 在 G 中是正规；

(2) 在 G 中拟正规；

(3) 在 G 中是 s-拟正规；

(4) 在 G 中是与 G 的所有 Sylow 子群 X-可置换的，其中 X 是 G 的一个可解正规子群；

(5) 是 G 的一个 CAP-子群；

(6) 含于 G 的超可解超中心中。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(批准号 11071229)。

参考文献 (References)

[1] Guo, W. (2000) The theory of classes of groups. Science Press/Kluwer, Beijing/New York.

[2] 徐明耀 (1999) 有限群导引. 科学出版社, 北京.

[3] Ore, O. (1939) Contributions in the theory of groups of finite order. *Duke Mathematical Journal*, **5**, 431-460.

[4] Doerk, K. and Hawkes, T. (1992) Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin/New York.

[5] Kegel, O. (1962) Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, **78**, 205-221.

[6] Deskins, W. (1963) On quasinormal subgroups of finite groups. *Mathematische Zeitschrift*, **82**, 125-132.

[7] Wang, Y. (1996) c-Normality of groups and its properties. *Journal of Algebra*, **180**, 954-965.

[8] Asaad, M. and Heliel, A.A. (2003) On S-permutable subgroups of finite groups. *Archiv der Mathematik*, **80**, 113-118.

[9] Guo, W., Shum, K., Skiba, A., Guo, W., Skiba, A. and Shum, K. (2007) X-quasinormal subgroups. *Siberian Mathematical Journal*, **48**, 593-605.

[10] Su, X. (1988) Seminormal subgroups of finite groups. *Journal of Mathematics* (*Chinese*), **8**, 7-9.

[11] Foguel, T. (1994) On seminormal subgroups. *Journal of Algebra*, **165**, 633-635.

[12] Hu, B. and Guo, W. (2007) *c*-Semipermutable subgroups of finite groups. *Siberian Mathematical Journal*, **48**, 180-188.

[13] Li, B.J. and Zhang, Z.R. (2009) The influence of *s*-conditionally permutable subgroups on finite groups. *Science in China Series A*: *Mathematics*, **52**, 301-310.

[14] Ahnmad, A. (2007) On *Uc*-normal subgroups of finite groups. *Algebra Colloquium*, **14**, 25-36.

[15] Skiba, A. (2007) On weakly *s*-permutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*, **315**, 192-209

[16] Li, B. (2011) On *Π*-property and *Π*-normality of subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*, **334**, 321-337.

[17] Li, B. (2011) Finite groups with *Π*-supplemented minimal Subgroups. *Communications in Algebra*, **41**, 2060-2070.