Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 151-160
Published Online September 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.45023

$[p,q]$-Order of Solutions of Linear Differential Equations in the Unit Disc

Pan Gong, Lipeng Xiao

Institute of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang
Email: gongpan12@163.com

Received: Jul. 10th, 2014; revised: Aug. 6th, 2014; accepted: Aug. 15th, 2014

Abstract

In this paper, we investigate the $[p,q]$-order of solution of second-order linear differential equation $f''+A_1(z)f'+A_0(z)f=F(z)$, where $A_0(z)$, $A_1(z)$ and $F(z)$ are analytic functions in the unit disc. We obtain several theorems about the growth and oscillation of solutions of differential equations.

Keywords

Differential Equations, $[p,q]$-Order, Unit Disc

单位圆内线性微分方程解的$[p,q]$级

龚　攀，肖丽鹏

江西师范大学数学与信息科学学院，南昌
Email: gongpan12@163.com

收稿日期：2014年7月10日；修回日期：2014年8月6日；录用日期：2014年8月15日

摘　要

主要研究单位圆内二阶线性微分方程$f''+A_1(z)f'+A_0(z)f=F(z)$解的$[p,q]$级，其中$A_0(z)$，$A_1(z)$和

$F(z)$**是单位圆内解析函数。我们将得到一些微分方程解的复振荡结论。**

关键词

微分方程，$[p,q]$级，单位圆

1. 引言

假定读者熟悉亚纯函数的 Nevanlinna 理论在复平面和单位圆$\Delta=\{z:|z|<1\}$(见文[1]-[5])中的应用，并用$\rho(f)$表示单位圆上函数$f(z)$的增长级。最近，很多学者用 Nevanlinna 理论研究了单位圆内线性微分方程解的增长性，并且得到了很多结论(见文[6]-[12])。在文献[13] [14]中，Juneja，Kapoor 和 Bajpai 研究了整函数$[p,q]$级的性质并且得到了相关的结论，应用$[p,q]$级概念来研究微分方程解的性质见参考文献[15] [16]等。

我们给出一些关于单位圆内解析函数和亚纯函数的迭代级和$[p,q]$级的相关定义。对于$r\in[0,1)$，定义$\exp_1 r=\mathrm{e}^r$和$\exp_{p+1}r=\exp(\exp_p r)$，$p\in N$。同理，定义$\log_1 r=\log r$和$\log_{p+1}r=\log(\log_p r)$，$p\in N$。进一步，我们记$\exp_0 r=r$，$\log_0 r=r$，$\exp_{-1}r=\log_1 r$，$\log_{-1}r=\exp_1 r$。

定义 A[8]：定义单位圆Δ内亚纯函数f的迭代p级为

$$\rho_p(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\frac{\log_p^+T(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}}\quad(p\geq1),$$

其中$T(r,f)$为f的特征函数。

对于单位圆内Δ内解析函数f，我们也定义为

$$\rho_{M,p}(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\frac{\log_{p+1}^+M(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}}\quad(p\geq1),$$

其中$M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$。

注 1.1：根据 M. Tsuji 文献[5]，如果f是单位圆内Δ内解析函数，则

$$\rho_1(f)\leq\rho_{M,1}(f)\leq\rho_1(f)+1.$$

根据文献[3]命题 2.2.2，我们有

$$\rho_{M,p}(f)=\rho_p(f)\quad(p\geq2).$$

定义 B[9] [17]：定义单位圆Δ内亚纯函数f的迭代p级零点收敛指数为

$$\lambda_p(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\frac{\log_p^+N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log\frac{1}{1-r}},$$

其中$N\left(r,\frac{1}{f}\right)$是亚纯函数$f$在$\{z\in C:|z|<r\}$的零点个数。类似的，定义$f$不同迭代$p$级零点收敛指数为

$$\overline{\lambda}_p(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\frac{\log_p^+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log\frac{1}{1-r}},$$

其中$N\left(r,\frac{1}{f}\right)$是亚纯函数 f 在$\{z\in C:|z|<r\}$不同零点个数。

定义 C[16]：假设 $p\ge q\ge 1$是整数， f 是单位圆Δ内亚纯函数，定义 f 的$[p,q]$级为

$$\rho_{[p,q]}(f)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\log_p^+ T(r,f)}{\log_q\frac{1}{1-r}}.$$

对于单位圆Δ内解析函数 f ，我们也定义

$$\rho_{M,[p,q]}(f)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\log_{p+1}^+ M(r,f)}{\log_q\frac{1}{1-r}}.$$

注 1.2[16]：对于任意的 $p\ge q\ge 1$，我们有$0\le\rho_{[p,q]}(f)\le\infty$ $\left(0\le\rho_{M,[p,q]}(f)\le\infty\right)$。根据定义 C，我们有$\rho_{[1,1]}(f)=\rho(f)$ $\left(\rho_{M,[1,1]}(f)=\rho_M(f)\right)$和$\rho_{[2,1]}(f)=\rho_2(f)$ $\left(\rho_{M,[2,1]}(f)=\rho_{M,2}(f)\right)$。

关于$\rho_{[p,q]}(f)$和$\rho_{M,[p,q]}(f)$之间的关系，我们有以下结论：

命题 1.1[16]：假设 $p\ge q\ge 1$是整数， f 是单位圆Δ内具有$[p,q]$级的解析函数

(1) 如果 $p=q$，则

$$\rho_{[p,q]}(f)\le\rho_{M,[p,q]}(f)\le\rho_{[p,q]}(f)+1.$$

(2) 如果 $p>q$，则

$$\rho_{[p,q]}(f)=\rho_{M,[p,q]}(f).$$

定义 D[16]：假设 $p\ge q\ge 1$是整数， f 是单位圆Δ内亚纯函数，定义 f 的$[p,q]$级零点收敛指数为

$$\lambda_{[p,q]}(f)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\log_p^+ N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q\frac{1}{1-r}}.$$

类似的，定义 f 的$[p,q]$级不同零点收敛指数为

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f)=\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\log_p^+ \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log_q\frac{1}{1-r}}.$$

关于二阶微分方程

$$f''+A_1(z)f'+A_0(z)f=F(z) \tag{1.1}$$

B. Belaïdi 和 Latreuch 在文献[18] [19]中研究了方程解的微分多项式的增长性和迭代级，为了陈述他们的结果，我们需要以下记号。

$$\alpha_0=d_0-d_2A_0,\quad \beta_0=d_2A_0A_1-(d_2A_0)'-d_1A_0+d_0', \tag{1.2}$$

$$\alpha_1=d_1-d_2A_1,\quad \beta_1=d_2A_1^2-(d_2A_1)'-d_1A_1-d_2A_0+d_0+d_1', \tag{1.3}$$

$$h=\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1, \tag{1.4}$$

其中d_0，d_1，d_2是Δ内解析的函数。

$$C_j(z)=C_{j-1}(z)-\frac{D'_{j-1}}{D_{j-1}},\quad j=1,2,3,\cdots,\tag{1.5}$$

$$D_j(z)=C'_{j-1}(z)-C_{j-1}(z)\frac{D'_{j-1}}{D_{j-1}}+D_{j-1},\quad j=1,2,3,\cdots,\tag{1.6}$$

和

$$F_j(z)=F'_{j-1}(z)-F_{j-1}(z)\frac{D'_{j-1}}{D_{j-1}},\quad j=1,2,3,\cdots,\tag{1.7}$$

其中$C_0(z)=A_1(z)$，$D_0(z)=A_0(z)$和$F_0(z)=F(z)$。

定理 A[18]**：**假设A_1，$A_0\not\equiv 0$，F是Δ内增长级有限的解析函数，d_0，d_1，d_2也是Δ内增长级有限的解析函数，其中d_0，d_1，d_2至少有一个不等于零，而且有$h\not\equiv 0$，h的定义见(1.4)。如果$f(z)$是方程(1.1)的有穷级解并且满足

$$\max\{\rho(A_j)\ (j=0,1),\ \rho(d_j)\ (j=0,1,2),\ \rho(F)\}<\rho(f),$$

则微分多项式$g_f=d_2f''+d_1f'+d_0f$满足

$$\rho(g_f)=\rho(f).$$

定理 B[19]**：**假设A_1，$A_0\not\equiv 0$，$F\not\equiv 0$是Δ内迭代p级有限的亚纯函数，并且$D_j(z)\not\equiv 0$和$F_j(z)\not\equiv 0$ $(j=1,2,3,\cdots)$。如果f是方程(1.1)在Δ内的亚纯解满足$\rho_p(f)=\infty$和$\rho_{p+1}(f)=\rho$，则f满足

$$\overline{\lambda}_p\left(f^{(j)}\right)=\lambda_p\left(f^{(j)}\right)=\rho_p(f)=\infty\quad (j=0,1,2,3,\cdots)$$

和

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(j)}\right)=\lambda_{p+1}\left(f^{(j)}\right)=\rho_{p+1}(f)=\rho\quad (j=0,1,2,3,\cdots).$$

本文将考虑二阶非齐次线性微分方程(1.1)解的$[p,q]$级问题，其中$A_0(z)$，$A_1(z)$，$F(z)\not\equiv 0$是单位圆$\Delta=\{z:|z|<1\}$内的解析函数，我们得到以下结果。

定理 1.1：假设$p\ge q\ge 1$是整数，$A_0(z)$，$A_1(z)$，$F(z)\not\equiv 0$是Δ内解析函数。d_0，d_1，d_2也是Δ内解析函数其中d_0，d_1，d_2至少有一个不等于零，而且有$h\not\equiv 0$，h的定义见(1.4)。如果$f(z)\not\equiv 0$是方程(1.1)的解并且满足

$$\max\{\rho_{[p,q]}(A_j)\ (j=0,1),\ \rho_{[p,q]}(d_j)\ (j=0,1,2),\ \rho_{[p,q]}(F)\}<\rho_{[p,q]}(f)=\infty,\tag{1.8}$$

和

$$\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho<\infty.$$

则微分多项式$g_f=d_2f''+d_1f'+d_0f$满足

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f)=\lambda_{[p,q]}(f)=\rho_{[p,q]}(f)=\rho_{[p,q]}(g_f)=\infty$$

和

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f)=\lambda_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p+1,q]}(g_f)=\rho.$$

定理 1.2：假设 $p\ge q\ge 1$是整数，$A_1(z)$，$A_0(z)\not\equiv 0$，$F(z)\not\equiv 0$是Δ内$[p,q]$级有限的亚纯函数并且$D_j(z)\not\equiv 0$和$F_j(z)\not\equiv 0$ $(j=1,2,3,\cdots)$。$D_j(z)$，$F_j(z)$的定义见(1.6)，(1.7)。如果 f 是方程(1.1)在Δ内的亚纯解并且满足$\rho_{[p,q]}(f)=\infty$，$\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho<\infty$。则有

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}\left(f^{(j)}\right)=\lambda_{[p,q]}\left(f^{(j)}\right)=\rho_{[p,q]}\left(f^{(j)}\right)=\infty \quad (j=0,1,2,3,\cdots)$$

和

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f^{(j)}\right)=\lambda_{[p+1,q]}\left(f^{(j)}\right)=\rho_{[p+1,q]}\left(f^{(j)}\right)=\rho \quad (j=0,1,2,3,\cdots)$$

2. 主要引理

引理 2.1[15]：设 $p\ge q\ge 1$是整数，f 和 g 是Δ内具有$[p,q]$级的亚纯函数。则有

$$\rho_{[p,q]}(f+g)\le \max\left\{\rho_{[p,q]}(f),\rho_{[p,q]}(g)\right\}$$

和

$$\rho_{[p,q]}(fg)\le \max\left\{\rho_{[p,q]}(f),\rho_{[p,q]}(g)\right\}$$

如果$\rho_{[p,q]}(f)>\rho_{[p,q]}(g)$，则有

$$\rho_{[p,q]}(f+g)=\rho_{[p,q]}(fg)=\rho_{[p,q]}(f)$$

引理 2.2[15]：设 $p\ge q\ge 1$是整数，f 是Δ内具有$[p,q]$级的亚纯函数。则有

$$\rho_{[p,q]}(f')=\rho_{[p,q]}(f).$$

引理 2.3[16]：设 $p\ge q\ge 1$是整数，A_j $(j=0,\cdots,k-1)$，$F\not\equiv 0$ 是Δ内解析函数，$f(z)$是微分方程(2.1)的解

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)f'+A_0(z)f=F \tag{2.1}$$

满足$\max\left\{\rho_{[p,q]}(A_j)\ (j=0,\cdots,k-1),\ \rho_{[p,q]}(F)\right\}<\rho_{[p,q]}(f)=\rho\le\infty$。则有

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f)=\lambda_{[p,q]}(f)=\rho_{[p,q]}(f)$$

和

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f)=\lambda_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p+1,q]}(f)$$

引理 2.4[20]：设$g:(0,1)\to R$，$h:(0,1)\to R$是单调递增的函数并且$g(r)\le h(r)$成立，除去一个例外集$E_1\subset[0,1)$满足$\int_{E_1}\frac{\mathrm{d}r}{1-r}<\infty$。则存在一个常数$d\in(0,1)$，如果$s(r)=1-d(1-r)$，则有$g(r)\le h(s(r))$对所有的$r\in[0,1)$成立。

引理 2.5[21]：设 $p\ge q\ge 1$是整数，f 是Δ内的亚纯函数并且有$\rho_{[p,q]}(f)=\rho<\infty$。设$k\ge 1$是整数。则对任意的$\varepsilon>0$有

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=O\left(\exp_{p-1}\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right),$$

成立，除去一个例外集$E_2\subset[0,1)$满足$\int_{E_2}\frac{\mathrm{d}r}{1-r}<\infty$。

引理 2.6：设 $p\ge q\ge 1$是整数，$A_j\ \ (j=0,\cdots,k-1)$，$F\not\equiv 0$是Δ内$[p,q]$级有限的亚纯函数，$f(z)$是微分方程(2.1)亚纯解，满足$\rho_{[p,q]}(f)=\infty$，$\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho<\infty$，则有

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f)=\lambda_{[p,q]}(f)=\rho_{[p,q]}(f)=\infty$$

和

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f)=\lambda_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho.$$

证明：根据方程(2.1)得

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\left(\frac{f^{(k)}}{f}+A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+A_0\right) \tag{2.2}$$

容易看出如果z_0是f的$\beta(\beta>k)$阶零点，假设$A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$在z_0解析，则z_0是F的$\beta-k$阶零点。因此有

$$n\left(r,\frac{1}{f}\right)\le k\overline{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)+n\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}n(r,A_j), \tag{2.3}$$

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}N(r,A_j). \tag{2.4}$$

根据引理 2.5 和(2.2)得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\le m\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m(r,A_j)+O\left(\exp_p\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right) \tag{2.5}$$

除去一个例外集$E_2\subset[0,1)$满足$\int E_2\frac{\mathrm{d}r}{1-r}<\infty$。根据(2.4)，(2.5)则有

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+O(1)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}T(r,A_j)+T(r,F)+O\left(\exp_p\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right) \tag{2.6}$$

对$r\notin E_2$成立。

设$\mu=\max\left\{\rho_{[p,q]}(A_j),(j=0,1,2,\cdots,k-1),\rho_{[p,q]}(F)\right\}$，则当$r\to 1^-$时，有

$$\sum_{j=0}^{k-1}T(r,A_j)+T(r,F)\le(k+1)\exp_p\left\{(\mu+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}. \tag{2.7}$$

根据(2.6)，(2.7)我们有，当$r\to 1^-$时，

$$\begin{aligned}T(r,f)&\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+(k+1)\exp_p\left\{(\mu+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}+O\left(\exp_p\left\{(\rho+\varepsilon)\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right)\\&=k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+O\left(\exp_p\left\{\eta\log_q\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}\right),\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中$\max\{\rho,\mu\}<\eta<\infty$，对$r\notin E_2$成立。

因为$\rho_{[p,q]}(f)=\infty$，$\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho<\infty$，根据引理 2.4 和(2.8)我们有

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f)=\lambda_{[p,q]}(f)=\rho_{[p,q]}(f)=\infty$$

和

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f)=\lambda_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho$$

3. 定理的证明

3.1. 定理 1.1 的证明

假设 f 是方程(1.1)的解满足

$$\max\left\{\rho_{[p,q]}\left(A_j\right)\ (j=0,1),\ \rho_{[p,q]}\left(d_j\right)\ (j=0,1,2),\ \rho_{[p,q]}\left(F\right)\right\}<\rho_{[p,q]}\left(f\right)=\infty.$$

将 $f''=F-A_1f'-A_0f$ 代入 g_f，得到

$$g_f-d_2F=\left(d_1-d_2A_1\right)f'+\left(d_0-d_2A_0\right)f\ . \tag{3.1}$$

微分(3.1)，再用 $f''=F-A_1f'-A_0f$ 代替 f'' 得

$$\begin{aligned} g_f'-\left(d_2F\right)'-\left(d_1-d_2A_1\right)F=&\left[d_2A_1^2-\left(d_2A_1\right)'-d_1A_1-d_2A_0+d_0+d_1'\right]f' \\ &+\left[d_2A_0A_1-\left(d_2A_0\right)'-d_1A_0+d_0'\right]f. \end{aligned} \tag{3.2}$$

利用(1.2)，(1.3)，(3.1)，(3.2)可改写为

$$\alpha_1f'+\alpha_0f=g_f-d_2F\ , \tag{3.3}$$

$$\beta_1f'+\beta_0f=g_f'-\left(d_2F\right)'-\left(d_1-d_2A_1\right)F\ . \tag{3.4}$$

令

$$\begin{aligned} h=\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1=&\left(d_1-d_2A_1\right)\left(d_2A_0A_1-\left(d_2A_0\right)'-d_1A_0+d_0'\right) \\ &-\left(d_0-d_2A_0\right)\left(d_2A_1^2-\left(d_2A_1\right)'-d_1A_1-d_2A_0+d_0+d_1'\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

因为 $h\not\equiv0$，由(3.3)~(3.5)，可得

$$f=\frac{\alpha_1\left(g_f'-\left(d_2F\right)'-\alpha_1F\right)-\beta_1\left(g_f-d_2F\right)}{h}. \tag{3.6}$$

由(1.8)，(3.1)，引理 2.1 和引理 2.2 我们有 $\rho_{[p,q]}\left(g_f\right)\le\rho_{[p,q]}\left(f\right)$。如果

$$\rho_{[p,q]}\left(g_f\right)<\rho_{[p,q]}\left(f\right),$$

根据(1.3)，(1.8)，(3.5)，(3.6)，引理 1.1，引理 1.2，得到

$$\rho_{[p,q]}\left(f\right)\le\max\left\{\rho_{[p,q]}\left(A_j\right)\ (j=0,1),\ \rho_{[p,q]}\left(d_j\right)\ (j=0,1,2),\ \rho_{[p,q]}\left(g_f\right)\right\}<\rho_{[p,q]}\left(f\right),$$

这是一个矛盾。因此 $\rho_{[p,q]}\left(g_f\right)=\rho_{[p,q]}\left(f\right)$。

现在证明 $\rho_{[p,q]}\left(f\right)=\rho_{[p+1,q]}\left(g_f\right)$。据(3.1)，引理 2.1，引理 2.2，有

$$\rho_{[p,q]}\left(g_f\right)\le\rho_{[p+1,q]}\left(f\right),$$

又因为 $\rho_{[p+1,q]}\left(d_j\right)=0\ (j=0,1,2)$，$\rho_{[p+1,q]}\left(A_j\right)=0\ (j=0,1)$，$\rho_{[p+1,q]}\left(F\right)=0$，根据(1.3)，(3.5)，(3.6)，引理 1.1，引理 1.2，得到

$$\rho_{[p,q]}\left(f\right)\le\rho_{[p+1,q]}\left(g_f\right),$$

所以 $\rho_{[p+1,q]}\left(g_f\right)\le\rho_{[p+1,q]}\left(f\right)$。

再由引理 2.3 有

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f)=\lambda_{[p,q]}(f)=\rho_{[p,q]}(f)=\rho_{[p,q]}(g_f)=\infty$$

和

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f)=\lambda_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p+1,q]}(g_f)=\rho.$$

综上所述定理 1.1 证明完毕。

3.2. 定理 1.2 的证明

因为 $A_0\not\equiv 0$， $F(z)\not\equiv 0$ 是 $[p,q]$ 级有限的亚纯函数，应用引理 2.6 可得

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f)=\lambda_{[p,q]}(f)=\rho_{[p,q]}(f)$$

和

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f)=\lambda_{[p+1,q]}(f)=\rho_{[p+1,q]}(f)=\rho.$$

方程(1.1)两边除以 A_0 得，

$$\frac{1}{A_0}f''+\frac{A_1}{A_0}f'+f=\frac{F}{A_0} \tag{3.7}$$

方程(3.7)两边微分得

$$\frac{1}{A_0}f^{(3)}+\left(\left(\frac{1}{A_0}\right)'+\frac{A_1}{A_0}\right)f''+\left(\left(\frac{A_1}{A_0}\right)'+1\right)f'=\left(\frac{F}{A_0}\right)'. \tag{3.8}$$

方程(3.8)两边乘以 A_0 得

$$f^{(3)}+C_1f''+D_1f'=F_1, \tag{3.9}$$

其中

$$C_1=A_1-\frac{A_0'}{A_0},\quad D_1=A_1'-A_1\frac{A_0'}{A_0}+A_0$$

和

$$F_1=F'-F\frac{A_0'}{A_0}.$$

因为 C_1， $D_1\not\equiv 0$， 和 $F_1\not\equiv 0$ 是单位圆内 $[p,q]$ 级有限的亚纯函数，对(3.9)式利用引理 2.6 得

$$\overline{\lambda}_{[p,q]}(f')=\lambda_{[p,q]}(f')=\rho_{[p,q]}(f')=\infty$$

和

$$\overline{\lambda}_{[p+1,q]}(f')=\lambda_{[p+1,q]}(f')=\rho_{[p+1,q]}(f')=\rho.$$

现将方程(3.9)两边除以 D_1 得

$$\frac{1}{D_1}f^{(3)}+\frac{C_1}{D_1}f''+f'=\frac{F_1}{D_1}. \tag{3.10}$$

方程(3.10)两边微分再乘以 D_1 得

$$f^{(3)} + C_2 f'' + D_2 f' = F_2, \tag{3.11}$$

由于C_2，$D_2 \not\equiv 0$，$F_2 \not\equiv 0$是单位圆内$[p,q]$级有限的亚纯函数，定义见(1.5)~(1.7)。方程(3.11)结合引理2.6得

$$\bar{\lambda}_{[p,q]}(f'') = \lambda_{[p,q]}(f'') = \rho_{[p,q]}(f'') = \infty$$

和

$$\bar{\lambda}_{[p+1,q]}(f'') = \lambda_{[p+1,q]}(f'') = \rho_{[p+1,q]}(f'') = \rho.$$

假设

$$\bar{\lambda}_{[p,q]}\left(f^{(k)}\right) = \lambda_{[p,q]}\left(f^{(k)}\right) = \rho_{[p,q]}\left(f^{(k)}\right) = \infty \tag{3.12}$$

$$\bar{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f^{(k)}\right) = \lambda_{[p+1,q]}\left(f^{(k)}\right) = \rho_{[p+1,q]}\left(f^{(k)}\right) = \rho. \tag{3.13}$$

对于所有的$k = 0,1,2,\cdots,j-1$成立，现在证明(3.12)~(3.13)对$k = j$也成立。同前面的证明我们有

$$f^{(j+2)} + C_{j+1} f^{(j+1)} + D_j f^{(j)} = F_j,$$

其中C_j，$D_j \not\equiv 0$，$F_j \not\equiv 0$是单位圆内$[p,q]$级有限的亚纯函数，定义见(1.5)~(1.7)。利用引理2.6得

$$\bar{\lambda}_{[p,q]}\left(f^{(j)}\right) = \lambda_{[p,q]}\left(f^{(j)}\right) = \rho_{[p,q]}\left(f^{(j)}\right) = \infty$$

和

$$\bar{\lambda}_{[p+1,q]}\left(f^{(j)}\right) = \lambda_{[p+1,q]}\left(f^{(j)}\right) = \rho_{[p+1,q]}\left(f^{(j)}\right) = \rho.$$

综上所述定理1.2证明完毕。

致　谢

感谢审稿老师对文章提出宝贵的意见。

基金项目

国家自然科学基金(11301232,11171119)，江西省自然科学基金(20132BAB211009)，江西省教育厅青年科学基金(GJJ12207)资助项目。

参考文献 (References)

[1] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] Heittokangas, J. (2000) On complex differential equations in the unit disc. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica Dissertationes*, **122**, 1- 54.

[3] Laine, I. (1993) Nevanlinna Theory and complex differential equations, de Gruyter studies in mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin/New York.

[4] Laine, I. (2008) Complex differential equations, handbook of differential equations: Ordinary differential equations. Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam, Vol. IV, 269-363.

[5] Tsuji, M. (1975) Potential theory in modern function theory. Chelsea, New York, Reprint of the 1959 Edition.

[6] Belaïdi, B. (2010) Oscillation of fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, **2**, 25-38.

[7] Belaïdi, B. (2011) Growth of solutions of linear differential equations in the unit disc. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, **3**, 14-26.

[8] Cao, T.B. and Yi, H.Y. (2006) The growth of solutions of linear differential equations with coefficients of iterated or-

der in the unit disc. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **319**, 278-294.

[9] Cao, T.B. (2009) The growth, oscillation and fixed points of solutions of complex linear differential equations in the unit disc. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **352**, 739-748.

[10] Chen, Z.X. and Shon, K.H. (2004) The growth of solutions of differential equations with coefficients of small growth in the disc. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **297**, 285-304.

[11] Chyzhykov, I.E., Gundersen, G.G. and Heittokangas, J. (2003) Linear differential equations and logarithmic derivative estimates. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **86**, 735-754.

[12] Cao, T.B., Zhu, C.X. and Liu, K. (2011) On the complex oscillation of meromorphic solutions of second order linear differential equations in the unit disc. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **374**, 272-281.

[13] Juneja, O.P., Kapoor, G.P. and Bajpai, S.K. (1976) On the $[P,Q]$-order and lower $[P,Q]$-order of an entire function. *Journal Fur Die Reine Und Angewandte Mathematik*, **282**, 53-67.

[14] Juneja, O.P., Kapoor, G.P. and Bajpai, S.K. (1977) On the $[P,Q]$-order and lower $[P,Q]$-type of an entire function. *Journal Fur Die Reine Und Angewandte Mathematik*, **280**, 180-190.

[15] Belaïdi, B. (2012) Growth and oscillation theory of $[P,Q]$-order analytic solutions of linear differential equations in the unit disc. *Journal of Mathematical Analysis*, **3**, 1-11.

[16] Latreuch, Z. and Belaïdi, B. (2013) Linear differential equations with analytic coefficients of $[P,Q]$-order in the unit disc. *Sarajevo Journal of Mathematics*, **9**, 71-84.

[17] Cao, T.B. and Deng, Z.S. (2010) Solutions of non-homogeneous linear differential equations in the unit disc. *Annales Polonici Mathematici*, **97**, 51-61.

[18] Latreuch, Z. and Belaïdi, B. (2013) Complex oscillation of differential polynomials in the unit disc. *Periodica Mathematica Hungarica*, **66**, 45-60.

[19] Latreuch, Z. and Belaïdi, B. (2013) Complex oscillation of solutions and their derivatives of non-homogenous linear differetial equations in the unit disc. *International Journal of Analysis and Applications*, **2**, 111-123.

[20] Bank, S. (1972) General theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations. *Compositio Mathematica*, **25**, 61-70.

[21] Belaïdi, B. (2011) Growth of solutions to linear differential equations with analytic coefficients of $[P,Q]$-order in the unit disc. *Electron*. *Journal of Differential Equations*, **2011**, 1-11.