Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 167-171
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.13033 Published Online October 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Sums of Frames in Hilbert C^*-Modules*

Haili Wang, Pengtong Li
Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing
Email: woaibeijing0@163.com; pengtongli@nuaa.edu.cn
Received: Sep. 19th, 2011; revised: Oct. 21st, 2011; accepted: Oct. 22nd, 2011.

Abstract: In this paper, we investigate the sums of Hilbert C^*-module frames. Several results on the sums of modular frames (Bessel sequences) being still frames are given.

Keywords: Hilbert C^*-Modules; Frames; Bessel Sequences; Sums of Frames; Frame Operators

Hilbert C^*-模框架的和*

王海丽，李鹏同
南京航空航天大学数学系，南京
Email: woaibeijing0@163.com; pengtongli@nuaa.edu.cn
收稿日期：2011 年 9 月 19 日；修回日期：2011 年 10 月 21 日；录用日期：2011 年 10 月 22 日

摘　要：本文研究了 Hilbert C^*-模框架的和，得到了模框架(或 Bessel 序列)之和还是模框架的几个结果。

关键词：Hilbert C^*-模；框架；Bessel 序列；框架和；框架算子

1. 引言和预备知识

Hilbert C^*-模是 Hilber 空间的自然推广，但它们的理论性质却有很大差别，例如：在 Hilbert C^*-模中，每个闭子模不一定可补，有界线性算子不一定可伴，连续线性泛函的 Ries 表示定理也不一定成立，等等。

Hilbert C^*-模首先由 I. Kaplansky 介绍[1]，它在算子代数、算子 K 理论、群表示论以及算子空间理论等方面起重要的作用，已成为算子理论与算子代数研究者的必要工具，关于它的详细介绍见[2]。

Hilbert 空间(向量)框架首先是由 R. Duffin 和 A. Schaeffer 为研究非调和 Fourier 级数及其一些重要的应用而引入的[3]；近 20 年来，它在理论研究和应用方面都得到迅速发展，文献[4]对其作了比较详细的介绍。

Hilbert 空间框架有几种不同形式的推广，例如 g-框架、融合框架、算子值框架和 Hilbert C^*-框架等[5-7]，这些推广在理论和应用上已经得到人们的广泛重视。本文将考虑最后一种推广，即 Hilbert C^*-模框架。从表面上看，Hilbert C^*-模框架的定义和某些结果[8-11]类似于 Hilbert 空间框架的情形，但其证明要复杂的多，并不是平凡的推广。文章[12]对 Hilbert 空间框架的和进行了研究，得到了使得两个框架之和仍然是框架的几个必要或充分条件，本文将在 Hilbert C^*-模框架中研究类似问题。下面介绍 Hilbert C^*-模和 Hilbert C^*-模框架的基本定义和简单性质。

定义 1.1 设 $\mathcal{A}$ 是 C^*-代数，$\mathcal{H}$ 是(左) $\mathcal{A}$ 模使得 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{H}$ 上的线性结构是相容的，即：$\lambda(ax)=(\lambda a)x=a(\lambda x),\forall\lambda\in\mathbb{C}$ (复数域) $a\in\mathcal{A}$，$x\in\mathcal{H}$。若存在 $\mathcal{A}$-值内积 $\langle .,.\rangle:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\mapsto\mathcal{A}$，使得对任意 $a\in\mathcal{A}$，$x,y,z\in\mathcal{H}$ 有

*国家自然科学基金资助课题(No.11171151)。

(1) $\langle x,x\rangle \geq 0$,并且$\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0$；

(2) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle^*$；

(3) $\langle ax,y\rangle=a\langle x,y\rangle$；

(4) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$。

则称$\mathcal{H}$为准 Hilbert $\mathcal{A}$-模；进一步，若$\mathcal{H}$关于范数$\|x\|=\|\langle x,x\rangle\|^{1/2}$是完备的，则称$\mathcal{H}$为$C^*$-代数$\mathcal{A}$上的 Hilbert C^*-模，简称为 Hilbert $\mathcal{A}$-模。下面是几个 Hilbert $\mathcal{A}$-模的例子。首先，C^*-代数$\mathcal{A}$本身即是一个 Hilbert $\mathcal{A}$-模，如果在其中定义内积$\langle a,b\rangle=ab^*$。其次，有限个 Hilbert $\mathcal{A}$-模$\{\mathcal{H}_j\}_{j=1}^n$的直和$\oplus_{j=1}^n \mathcal{H}_j$也是一个 Hilbert $\mathcal{A}$-模，如果定义内积$\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^n\langle x_j,y_j\rangle$，这里$x=\{x_j\}_{j=1}^n$，$y=\{y_j\}_{j=1}^n\in\oplus_{j=1}^n\mathcal{H}_j$；特别地，$n$个 Hilbert $\mathcal{A}$-模$\mathcal{H}$的直和记为$\mathcal{H}^n$。再者，对C^*-代数$\mathcal{A}$，定义$l^2(\mathcal{A})\left\{\{a_j\}_{j=1}^\infty:\sum_{j=1}^\infty a_ja_j^*\text{范数收敛}\right\}\langle\{a_j\},\{b_j\}\rangle=\sum_{j=1}^\infty a_jb_j^*$则$l^2(\mathcal{A})$成为 Hilbert $\mathcal{A}$-模，通常称其为标准 Hilbert $\mathcal{A}$-模，它在 Hilbert C^*-模及其框架理论中起着重要作用。

设$\mathcal{H},\mathcal{K}$是 Hilbert $\mathcal{A}$-模。称映射 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$为可伴算子，如果存在映射 $T^*:\mathcal{K}\to\mathcal{H}$使得$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$，$\forall x\in\mathcal{H}$，$\forall y\in\mathcal{K}$。利用闭图像定理容易证明，任何可伴算子一定是有界$\mathcal{A}$-线性映射，但反之不成立。记$\mathcal{H}$到$\mathcal{K}$的可伴算子全体为$End_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{H},\mathcal{K})$，并简记$End_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{H})$。在通常算子范数$\|T\|=\sup\{\|Tx\|:\|x\|\leq 1\}$下，$End_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{H})$是一个$C^*-$代数。

定义 1.2 设$\mathcal{H}$为 Hilbert $\mathcal{A}$-模。若存在$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset\mathcal{H}$，使得每个$x\in\mathcal{H}$可以表示成一个$\mathcal{A}$-线性组合$x=\sum_{j=1}^n a_jx_j\in\mathcal{A}$，则称$\mathcal{H}$为有限生成的 Hilbert $\mathcal{A}$-模。类似地，称$\mathcal{H}$为可数生成的 Hilbert $\mathcal{A}$-模，如果生成元$\{x_1,\cdots,x_n\}$替换成可数集。

根据 G. G. Kasparov 稳定性定理[13]，如果$\mathcal{A}$是有单位元的C^*-代数，那么任何可数生成的 Hilbert $\mathcal{A}$-模必可嵌入到标准 Hilbert $\mathcal{A}$-模$l^2(\mathcal{A})$中，成为$l^2(\mathcal{A})$的一个正交直和项。

定义 1.3 设$\mathcal{A}$是有单位元的C^*-代数，$\mathcal{H}$为 Hilbert $\mathcal{A}$-模，$\mathbb{J}$是有限或可数指标集。称$\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}\subset\mathcal{H}$为$\mathcal{H}$的(标准)框架，如果存在正常数$A,B$满足

$$A\langle f,f\rangle\leq\sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f,f_j\rangle\langle f_j,f\rangle\leq B\langle f,f\rangle,\forall f\in\mathcal{H}. \tag{1.1}$$

这里级数是按范数收敛，最优的常数A,B分别称为框架的下界和上界。称$\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$是紧框架，如果$A=B$；称$\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$为 Parseval 框架，如果$A=B=1$；进一步，若(1.1)式中仅有右边不等式成立，则称$\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$是 Bessel 序列，常数B称为 Bessel 界。

设$\mathcal{A}$是有单位元的C^*-代数，$\mathcal{H}$是有限或可数生成的 Hilbert $\mathcal{A}$-模，$\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}\subset\mathcal{H}$是 Bessel 序列。定义$\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$的分析算子$\theta:\mathcal{H}\to l^2(\mathcal{A})$为$\theta(f)=\{\langle f,f_j\rangle\}_{j\in\mathbb{J}},f\in\mathcal{H}$，则$\theta\in End_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{H},l^2(\mathcal{A}))$，并且$\theta^*(\{a_j\})=\sum_{j\in\mathbb{J}}a_jf_j,\{a_j\}\in l^2(\mathcal{A})$。

定义框架算子$S=\theta^*\theta$，则$S\in End_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{H})$且为正算子。容易证明 S 可逆的充分必要条件为$\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$是框架，并且当$\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$是框架时，对任意$f\in\mathcal{H}$有，$f=\sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f,S^{-1}f_j\rangle f_j=\sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f,f_j\rangle S^{-1}f_j=\sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f,S^{-1/2}f_j\rangle S^{-1/2}f_j$。

2. 主要结果及证明

下面将介绍 Hilbert $\mathcal{A}$-模中框架和的一些性质。在本文中我们总设$\mathcal{H}$是有限或可数生成的 Hilbert $\mathcal{A}$-模，$\mathcal{A}$是有单位元的C^*-代数。

命题 2.1 若$\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$是 Hilbert $\mathcal{A}$-模$\mathcal{H}$中的框架，且框架的界为A,B。λ是任意不为零的常数，则$\{\lambda f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$

是 Hilbert $\mathcal{A}$-模框架，框架界是 $\lambda^2 A, \lambda^2 B$。

容易验证上述命题是成立的。下面讨论 λ 为数列的情况。

命题 2.2 若 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 中的框架，且框架的界为 A,B。$\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是一个数列，且 $0<a\le|\lambda_j|\le b$，则 $\{\lambda_j f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 的框架，框架界是 a^2A, b^2B。

下面是上述两个命题的推广。

命题 2.3 若 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 中的框架，且框架的界为 A,B。α 是 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 中的正可逆元，则 $\{\alpha^{1/2} f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模框架。

证明：由于 α 是 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 中的正可逆元，故存在 $a\in\mathbb{R}, a>0$，满足 $\alpha\ge aI, I$ 是 $\mathcal{A}$ 中的单位元。又根据模框架的定义，有 $\sum_j\langle x,\alpha^{1/2}f_j\rangle\langle\alpha^{1/2}f_j,x\rangle=\sum_j\langle x,f_j\rangle(\alpha^{1/2})^*\alpha^{1/2}\langle f_j,x\rangle=\sum_j\langle x,f_j\rangle\alpha\langle f_j,x\rangle\ge aA\langle x,x\rangle$。另一方面，有 $\sum_j\langle x,\alpha^{1/2}f_j\rangle\langle\alpha^{1/2}f_j,x\rangle=\sum_j\langle x,f_j\rangle(\alpha^{1/2})^*\alpha^{1/2}\langle f_j,x\rangle=\sum_j\langle x,f_j\rangle\alpha\langle f_j,x\rangle\le\sum_j\|\alpha\|\langle x,f_j\rangle\langle f_j,x\rangle\le\|\alpha\|B\langle x,x\rangle$。故 $\{\alpha^{1/2} f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模框架。

下面讨论 α 为 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 中序列的情况。

命题 2.4 若 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 中的框架，且框架的界为 A,B。$\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 中的数列，且 $0<aI\le\alpha_j\le bI$，I 是 $\mathcal{A}$ 的单位元。则 $\{\alpha_j f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 的框架，框架界是 a^2A, b^2B。

命题 2.5 若 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 中的框架，且框架的界为 A,B。$\{T_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 上的有界可伴 $\mathcal{A}$-线性算子序列，且该算子序列满足 $\inf_j\inf_{\|x\|=1}\{\|T_jx\|\}_{j\in\mathbb{J}}>0$，则 $\{T_j f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 的框架。

证明：根据模框架的定义，对任意 $x\in\mathcal{H}$，有 $A\langle x,x\rangle\le\sum_j\langle x,f_j\rangle\langle f_j,x\rangle\le B\langle x,x\rangle$。

由于 T_j^* 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 上的有界 $\mathcal{A}$-线性映射，故 $\exists M\in\mathbb{R}, M>0$ 满足 $\langle T_j^*x,T_j^*x\rangle\le M\langle x,x\rangle$ [14]。因而有

$$\left\|\sum_j\langle x,T_jf_j\rangle\langle T_jf_j,x\rangle\right\|=\left\|\sum_j\langle T_j^*x,f_j\rangle\langle f_j,T_j^*x\rangle\right\|\le B\left\|\langle T_j^*x,T_j^*x\rangle\right\|\le B\left\|M\langle x,x\rangle\right\|\le BM\|x\|^2.$$

故 $\{T_j f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 的 Bessel 序列，框架的上界条件满足。

又令 $a=\inf_j\|T_j^*\|$ 对 $\forall x\in\mathcal{H}$，有 $\|T_j^*x\|\ge a\|x\|$；进一步有

$$\left\|\sum_j\langle x,T_jf_j\rangle\langle T_jf_j,x\rangle\right\|=\left\|\sum_j\langle T_j^*x,f_j\rangle\langle f_j,T_j^*x\rangle\right\|\ge A\|T_j^*x\|^2\ge Aa^2\|x\|^2.$$

故框架的下界条件也满足。因此 $\{T_j f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 的框架。

命题 2.6 若 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 和 $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 的框架，且框架的界为 $A_f,B_f;A_g,B_g$ 则 $\{h_j\}_{j\in\mathbb{J}}=\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}\cup\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$，是 $\mathcal{H}$ 的模框架，框架界为 A_f+A_g, B_f+B_g。

定理 2.7 若 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 中的框架，且框架的界为 A,B，$\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 $\mathcal{H}$ 中以 M 为界的 Bessel 序列，λ 是一个复数，且 $|\lambda|\le(A/M)^{1/2}$，则 $\{f_j+\lambda g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 也是 $\mathcal{H}$ 的框架，并且框架的界为：$A\left[1-|\lambda|(M/A)^{1/2}\right]^2, B\left[1+|\lambda|(M/B)^{1/2}\right]^2$。

证明：根据模框架的定义，对任意 $x\in\mathcal{H}$，有 $A\langle x,x\rangle\le\sum_j\langle x,f_j\rangle\langle f_j,x\rangle\le B\langle x,x\rangle$。又因为 $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 $\mathcal{H}$ 中以 M 为界的 Bessel 序列，有 $\sum_j\langle x,g_j\rangle\langle g_j,x\rangle\le M\langle x,x\rangle$。应用 Minkowski 不等式，进一步有

$$\left\|\sum_j\langle x,f_j+\lambda g_j\rangle\langle f_j+\lambda g_j,x\rangle\right\|\le\left\|\sum_j\langle x,f_j\rangle\langle f_j,x\rangle\right\|^{1/2}+\left\|\sum_j|\lambda|^2\langle x,g_j\rangle\langle g_j,x\rangle\right\|^{1/2}$$

$$\le \left(B\|x\|^2\right)^{1/2}+|\lambda|\left(M\|x\|^2\right)^{1/2}=\left(\sqrt{B}+|\lambda|\sqrt{M}\right)\|x\|$$

故框架的上界条件满足。由于$|\lambda|\le (A/M)^{1/2}$，有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_j\left\langle x,f_j+\lambda g_j\right\rangle\left\langle f_j+\lambda g_j,x\right\rangle\right\| &\ge \left\|\sum_j\left\langle x,f_j\right\rangle\left\langle f_j,x\right\rangle\right\|^{1/2}-\left\|\sum_j|\lambda|^2\left\langle x,g_j\right\rangle\left\langle g_j,x\right\rangle\right\|^{1/2}\\ &\ge \left(A\|x\|^2\right)^{1/2}-|\lambda|\left(M\|x\|^2\right)^{1/2}=\left(\sqrt{A}-|\lambda|\sqrt{M}\right)\|x\|.\end{aligned}$$

故框架的下界条件也满足，因此$\left\{f_j+\lambda g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是$\mathcal{H}$的框架，框架界为$A\left[1-|\lambda|(M/A)^{1/2}\right]^2$，$B\left[1+|\lambda|(M/B)^{1/2}\right]^2$。

推论 2.8 若$\left\{f_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$和$\left\{g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是 Hilbert $\mathcal{A}$-模$\mathcal{H}$中的框架且框架的界为$A_f,B_f;A_g,B_g$。λ是一个复数，且$|\lambda|\le\left(A_f/B_g\right)^{1/2}$，则$\left\{f_j+\lambda g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是$\mathcal{H}$的框架，且框架的界为$A\left[1-|\lambda|\left(B_g/A_f\right)^{1/2}\right]^2$，$B\left[1+|\lambda|\left(B_g/B_f\right)^{1/2}\right]^2$。

在上述推论中，如果令$\lambda=\pm1$，可以得到下列推论。

推论 2.9 若$\left\{f_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$和$\left\{g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是 Hilbert $\mathcal{A}$-模$\mathcal{H}$中的框架，且框架的界分别为$A_f,B_f;A_g,B_g$。若$\left[A_f,B_f\right]\cap\left[A_g,B_g\right]=\varnothing$，则$\left\{f_j\pm g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$也是$\mathcal{H}$的框架。

(1) 当$B_g<A_f$时，框架界为$A_f\left[1-\left(B_g/A_f\right)^{1/2}\right]^2$，$B_f\left[1+\left(B_g/B_f\right)^{1/2}\right]^2$；

(2) 当$B_f<A_g$时，框架界为$A_g\left[1-\left(B_f/A_g\right)^{1/2}\right]^2$，$B_g\left[1+\left(B_f/B_g\right)^{1/2}\right]^2$。

在定理 2.7 中，如果令$\lambda=-1$，得到下列命题。

命题 2.10 若$\left\{f_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是 Hilbert $\mathcal{A}$-模$\mathcal{H}$中的框架，框架的界为A,B，$\left\{g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是$\mathcal{H}$中的序列且满足$\left\{f_j-g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是$\mathcal{H}$中以$M$为界的 Bessel 序列，如果$M<A$，则$\left\{g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是$\mathcal{H}$的框架，框架界为$A\left[1-(M/A)^{1/2}\right]^2$，$B\left[1+(M/B)^{1/2}\right]^2$。

由于$\left\|\left\langle x,f_j-g_j\right\rangle\right\|\le\|x\|\left\|f_j-g_j\right\|$，由上述命题可以得到下列定理。

定理 2.11 若$\left\{f_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是 Hilbert $\mathcal{A}$-模$\mathcal{H}$的框架，框架的界为A,B，$\left\{g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是$\mathcal{H}$中的序列，若满足$M=\sum_j\left\|f_j-g_j\right\|^2<A$,则$\left\{g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是$\mathcal{H}$的框架，框架界为$A\left[1-(M/A)^{1/2}\right]^2$,$B\left[1+(M/B)^{1/2}\right]^2$。

证明：对任意$x\in\mathcal{H}$，下列不等式成立$\left\langle x,f_j-g_j\right\rangle\left\langle f_j-g_j,x\right\rangle\le\left\|\left\langle f_j-g_j,f_j-g_j\right\rangle\right\|\langle x,x\rangle$。进而有

$$\sum_j\left\langle x,f_j-g_j\right\rangle\left\langle f_j-g_j,x\right\rangle\le\sum_j\left\|\left\langle f_j-g_j,f_j-g_j\right\rangle\right\|\langle x,x\rangle=M\langle x,x\rangle.$$

可见，$\left\{f_j-g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是以$M$为界得 Bessel 序列，且$M<A$，由命题 2.10 知，$\left\{g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是$\mathcal{H}$的框架，框架界为$A\left[1-(M/A)^{1/2}\right]^2$，$B\left[1+(M/B)^{1/2}\right]^2$。

推论 2.12 若$\left\{f_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是 Hilbert $\mathcal{A}$-模$\mathcal{H}$中的框架，框架的界为A,B,$\left\{g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是$\mathcal{H}$中的序列，若满足$M=\sum_j\left\|g_j\right\|^2<A$，则$\left\{f_j+g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是$\mathcal{H}$的框架，框架界$A\left[1-(M/A)^{1/2}\right]^2$，$B\left[1+(M/B)^{1/2}\right]^2$。

下面命题是定理 2.7 推广。

定理 2.13 若$\left\{f_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是 Hilbert $\mathcal{A}$-模$\mathcal{H}$中的框架，且框架的界为A,B，$\left\{g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$是$\mathcal{H}$中以$M$为界的 Bessel 序列，$\alpha$是$C^*$-代数$\mathcal{A}$中的正可逆元，且$\|\alpha\|\le(A/M)^{1/2}$，则$\left\{f_j+\alpha^{1/2}g_j\right\}_{j\in\mathbb{J}}$也是$\mathcal{H}$的框架，并且该框架界为$A\left[1-\|\alpha\|^{1/2}(M/A)^{1/2}\right]^2$，$B\left[1+\|\alpha\|^{1/2}(M/B)^{1/2}\right]^2$。

证明：根据模框架的定义，对任意 $x\in\mathcal{H}$，有 $A\langle x,x\rangle\le\sum_j\langle x,f_j\rangle\langle f_j,x\rangle\le B\langle x,x\rangle$。又因为 $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 $\mathcal{H}$ 中以 M 为界的 Bessel 序列，有 $\sum_j\langle x,g_j\rangle\langle g_j,x\rangle\le M\langle x,x\rangle$。应用 Minkowski 不等式，进一步有

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_j\left\langle x,f_j+\lambda g_j\right\rangle\left\langle f_j+\lambda g_j,x\right\rangle\right\|\le\left\|\sum_j\left\langle x,f_j\right\rangle\left\langle f_j,x\right\rangle\right\|^{1/2}+\left\|\sum_j|\lambda|^2\left\langle x,\alpha^{1/2}g_j\right\rangle\left\langle\alpha^{1/2}g_j,x\right\rangle\right\|^{1/2}\\&\le\left(B\|x\|^2\right)^{1/2}+\|\alpha\|\left(M\|x\|^2\right)^{1/2}=\left(\sqrt{B}+\|\alpha\|\sqrt{M}\right)\|x\|\end{aligned}.$$

故框架的上界条件满足。由于 $\|\alpha\|\le(A/M)^{1/2}$，有

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_j\left\langle x,f_j+\alpha^{1/2}g_j\right\rangle\left\langle f_j+\alpha^{1/2}g_j,x\right\rangle\right\|\ge\left\|\sum_j\left\langle x,f_j\right\rangle\left\langle f_j,x\right\rangle\right\|^{1/2}-\left\|\sum_j\|\alpha\|\left\langle x,g_j\right\rangle\left\langle g_j,x\right\rangle\right\|^{1/2}\\&\ge\left(A\|x\|^2\right)^{1/2}-\|\alpha\|^{1/2}\left(M\|x\|^2\right)^{1/2}=\left(\sqrt{A}-\|\alpha\|^{1/2}\sqrt{M}\right)\|x\|\end{aligned}.$$

故框架的下界条件也满足,因此 $\{f_j+\alpha^{1/2}g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 $\mathcal{H}$ 的框架，框架下界为 $A\left[1-\|\alpha\|^{1/2}(M/A)^{1/2}\right]^2$，上界 $B\left[1+\|\alpha\|^{1/2}(M/B)^{1/2}\right]^2$。

推论 2.14 若 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 和 $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 是 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 中的框架，且框架的界分别为 $A_f,B_f;A_g,B_g$。α 是 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 中的正可逆元，且 $\|\alpha\|\le A_f/B_g$，则 $\{f_j+\alpha^{1/2}g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ 也是 $\mathcal{H}$ 的框架，并且框架界分别为

$A_f\left[1-\|\alpha\|^{1/2}\left(B_g/A_f\right)^{1/2}\right]^2$，$B_f\left[1+\|\alpha\|^{1/2}\left(B_g/B_f\right)^{1/2}\right]^2$。

3. 小结

本文主要介绍了 Hilbert C^*- 模框架的和，得到了模框架(或 Bessel 序列)之和还是模框架的几个结果。即对 Hilbert $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 中框架的稳定性理论的研究，它是对 Hilbert 空间框架的稳定性理论的进一步推广。

本文有待解决的问题是：在模上目前没有定义类似于 Hilbert 空间的 P 范数的定义。如果有合适的定义，那么与 Hilbert $\mathcal{A}$-模相关的理论将得到更进一步的发展。

参考文献 (References)

[1] I. Kaplansky. Modules over operator algebras. American Journal of Mathematics, 1953, 75(4): 839-853.
[2] E. C. Lance. Hilbert C^*- modules: A toolkit for operator algebraists. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
[3] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer. A class of nonharmonic Fourier series. Transaction of American Mathematical Society, 1952, 72: 341-366.
[4] D. Han, D. Larson. Frames, bases and group representations. Memoirs of the American Mathematical Society, 2000, 147: 697.
[5] P. G. Casazza, G. Kutyniok and S. Li. Fusion frames and distributed processing. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 25(1): 114-132.
[6] V. Kaftal, D. Larson and S. Zhang. Operator-valued frames. Transaction of American Mathematical Society, 2009, 361: 6349-6385.
[7] W. Sun. G-frames and G-rises bases. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 332(1): 437-452.
[8] M. Frank, D. Larson. A module frame concept for Hilbert C^*-modules. Contemporary Mathematics, 1999, 247: 207-233.
[9] M. Frank, D. Larson. Modular frames for Hilbert C^*- modules and symmetric approximation of frames. Proceeding SPIE, 2000, 4119: 325-336.
[10] M. Frank, D. Larson. Frames in Hilbert C^*- modules and C^*- algebras. Journal of Operator Theory, 2002, 48: 273-314.
[11] W. Jing, D. Han and R. N. Mohapatra. Structured parseval frames in Hilbert C^*- modules. Contemporary Mathematics, 2006, 414: 275-287.
[12] S. Obeidat, S. Samarah, P. G. Casazza and J. C. Tremain. Sums of Hilbert space frames. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 351(2): 579-585
[13] G. G. Kasparov. Hilbert C^*- modules: The theorems of Stinespring and Voiculescu. Journal of Operator Theory, 1980, 4: 133-150.
[14] W. Jing. Frames in Hilbert C^*- modules. The University of Central Florida Orlando, 2006.

