Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2020, 10(4), 289-295
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2020.104030

均衡Riccati方程的新进展

张大永，彭云飞

贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳
Email: pengyf0803@163.com

收稿日期：2020年10月26日；录用日期：2020年11月11日；发布日期：2020年11月18日

摘 要

自Riccati方程被提出以来，一直是数学家关注的重要问题之一。其早期研究推动了微分方程的发展。20世纪中期，最优控制论发展使得Riccati方程大放异彩。特别地，时间不一致控制问题成为数学与金融的前沿交叉课题，Riccati方程再次引起许多学者的关注。本文基于时间不一致控制问题的最新进展和Riccati方程的研究历史，特别是Riccati方程与控制论的关系，详细综述了均衡Riccati方程的研究进展，由此展示Riccati方程将再次焕发新的活力。

关键词

Riccati方程，均衡Riccati方程，时间不一致

The Latest Development of Equilibrium Riccati Equation

Dayong Zhang, Yunfei Peng

College of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou
Email: pengyf0803@163.com

Received: Oct. 26th, 2020; accepted: Nov. 11th, 2020; published: Nov. 18th, 2020

Abstract

Riccati equation has been one of the most important issues for mathematicians since it was proposed. The prior research promoted the development of differential equations. Moreover, Riccati equation has been highly active owing to the development of optimal control theory in the Mid-20th century. In particular, the time-inconsistent control problem has become an interdisciplinary frontier of mathematics and finance, which makes such equation attract considerable attention of researchers again. Based on the latest development of time-inconsistent control and the

文章引用: 张大永, 彭云飞. 均衡 Riccati 方程的新进展[J]. 运筹与模糊学, 2020, 10(4): 289-295.
DOI: 10.12677/orf.2020.104030

history of Riccati equation research, especially the relation between Riccati equation and control theory, this paper surveys the research advance of equilibrium Riccati equation in detail. As a consequence, the Riccati equation is given a new vitality.

Keywords

Riccati Equation, Equilibrium Riccati Equation, Time-Inconsistent

1. 函数型 Riccati 方程的研究历史

在 1720 年，意大利数学家 Riccati 在研究曲线曲率半径仅依赖于纵坐标时导出了一个二阶常微分方程，作变量替换后，得到微分方程 $\dot{y} = -x^{-n}y^2 + nx^m$ 。在与朋友 Rizzetti 的通信中提出了一阶微分方程

$$\dot{y} = \alpha y^2 + \beta t^m \text{ 和 } \dot{y} = \alpha y^2 + \beta y + \gamma t^2$$

并进行了深入研究。更一般地，上述微分方程可以写为

$$\dot{y} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

后人把这类方程称为 Riccati 方程[1]。显然齐次情形就是著名的 Bernoulli 方程。

在常微分早期发展史上，Riccati 的工作值得重视，他不仅研究了二阶微分方程，还提出了变量代换、变量分离等思想方法[2]。除了 Riccati 本人，包括 Euler，Bernoulli 兄弟和 Liouville 等许多著名数学家都研究过 Riccati 方程。如 D. Bernoulli 在 1725 年证明了 Riccati 方程系数为特定确定数时，可将其化成可变量分离的微分方程[3] [4]；D'Alembert 在 1763 年则将这类方程命名为“Riccati 方程”[5]。经长期研究，Liouville 在 1841 年证明了 Riccati 方程一般不能用初等积分法求解[3]。这一结果不仅表明 Riccati 方程极具挑战性且对常微分方程的发展产生了深远影响。这导致了人们将注意力转向 Riccati 微分方程定性理论、近似解、数值解等方面的研究，直接推动微分方程的研究进入一个新的阶段——定性理论阶段[6]。

关于 Riccati 方程的研究一直方兴未艾。直到今天，许多学者仍在开展相关方面的研究。主要开展 Riccati 方程简化形式的精确解、数值解、近似解；具有某些解的条件；解的性质及其物理意义；利用 Riccati 方程的解求解其他方程以及在量子力学中的应用等。下面我们综述近期的一些研究概况。Gasull 等人考虑了实系数和复系数的多项式 Riccati 方程[7]。也有学者研究了分数阶 Riccati 方程以及数值算法。Lucas 等研究了有限维赋范分裂代数上的 Riccati 方程，指出此时是欧几里德空间上共形 Riccati 方程的特殊情形，是与旋转群同构的矢量场李代数 V 的一条曲线[8]。讨论 Riccati 方程在偏微方程中的应用也一直是热点。如 Lou 借助 Riccati 方程提出求解非线性系统的相容 Riccati 展开法，此方法适用于包括 KdV 方程、非线性 Schröndinger 方程、弥散水波方程等可积系统[9]。Odibat 基于 Riccati 方程提出一种方法以寻求非线性演化方程的行波解，获得了孤子解、扭结解和周期解，解的形式有双曲函数，三角函数和有理函数[10]。Navickas 等人研究了具有多项式系数的广义 Riccati 方程并获得了存在扭结孤立波解的充分必要条件[11]。Malwe 等应用 Riccati 方程映射获得了非线性传输线方程的行波解、三角函数解、双曲函数解和有理函数解等[12]。Riccati 方程在量子动力学的应用已有很长的历史，尤其近期更是大量的学者进行了深入研究。如 Cruz 等借助非线性复 Riccati 方程证明量子不确定性演化的敏感性是由初始条件的选择造成的，使得

量子动力学得以重新描述，并将此方法应用于描述耗散量子系统[13] [14]。Rosu 等研究了缺少线性项的耦合 Riccati 方程组并将薛定谔方程对应的势转换为 Riccati 方程。特别地，在单参数族等谱势，基态的积分因子对应着 Riccati 方程的解，获得了单参数等谱势的广义 Mielnik 结构等[15]。

此外，许多学者对 Riccati 方程与二阶微分方程之间的关系和解进行研究，如 Riccati 方程的可积性、解的个数、特殊形式及其解[16] [17]。这些研究使得 Riccati 方程得到了推广与发展。成果虽然丰富，但仍未解决该方程。Riccati 方程即无初等解法，又与许多理论问题和实际问题密切相关，尤其是在系统科学中鲁棒稳定性问题、控制科学中最优控制问题等。这使得 Riccati 方程及其应用一直是研究热点。

2. 算子型 Riccati 方程

尽管一般 Riccati 方程无显示解，但 Riccati 方程无论在理论上还是在应用领域都是极其重要，尤其是在现代控制论中扮演着重要角色。在经典变分问题中，人们注意到 Riccati 方程和变分问题之间存在某种联系。1960 年，Kalman 引入了 Riccati 方程，建立线性二次最优控制问题(LQ 问题)的状态反馈最优控制[18]。特别是最优控制理论诞生的标志性工作——Kalman 最优线性反馈调节器理论，使 Riccati 方程从此大放异彩。

在有限维最优 LQ 控制理论中，有限时区和无限时区上的 Riccati 方程分别为微分型

$$\begin{cases} \dot{P}+A^{\mathrm{T}}P+PA-\left(B^{\mathrm{T}}P+S\right)^{\mathrm{T}}R^{-1}\left(B^{\mathrm{T}}P+S\right)+Q=0, \quad t\in[0,T), \\ P(T)=G \end{cases} \tag{1}$$

和代数型

$$A^{\mathrm{T}}P+PA-\left(B^{\mathrm{T}}P+S\right)^{\mathrm{T}}R^{-1}\left(B^{\mathrm{T}}P+S\right)+Q=0. \tag{2}$$

其经典结果是 LQ 问题对任意初始状态都惟一可解当且仅当 Riccati 方程(1) (或(2))有半正定对称解 $P(\cdot)$ (或对称解 P_∞)。这揭示了最优控制问题与微分方程的本质联系。不仅如此，还建立了两点边值问题与 Riccati 方程之间的等价关系。

随着控制论的发展，Riccati 方程也被引入分布参数系统最优控制，并取得了丰硕的成果。在 20 世纪 70 年代，Lions 研究了如下形式的无限维 Riccati 微分方程

$$\begin{cases} \dot{P}+A^{*}P+PA-PMP+Q=0, \\ P(T)=C \end{cases} \tag{3}$$

其中 $M=BR^{-1}B^{*}$， A,B,M,Q,C 是 Hilbert 空间上的线性算子[19]。由于算子 A 一般是无界的，讨论该方程的适定性是有一定难度。为了克服其困难，Lukes-Russell、Curtain-Pritchard 先后导出了不但可以容纳更多情形而且也较为容易的积分型 Riccati 方程

$$P(t)=\Phi^{*}(T,t)C\Phi(T,t)+\int_t^T\Phi^{*}(\zeta,t)\left[Q(\zeta)-P(\zeta)M(\zeta)P(\zeta)\right]\Phi(\zeta,t)\mathrm{d}\zeta \tag{4}$$

并讨论了微分型 Riccati 和积分型 Riccati 方程的等价关系，其中 Φ 是由 A 生成的发展算子[20] [21]。Gibson 对(4)进行深入研究，引进最优控制问题并基于其问题的可解性获得 Riccati 方程解的存在唯一性[22] [23]。显然此方法有一定的局限性。在 1984 年，You 发现了最优反馈控制和 Fredholm 积分方程的关系[24]。而 1985 年 Chen 直接研究了非线性 Riccati 方程与一个线性 Fredholm 积分方程

$$H(t,s)=V(t,s)-\int_s^T V(t,\sigma)M(\sigma)H(\sigma,s)\mathrm{d}\sigma, \quad t_0\le s\le t\le T \tag{5}$$

的等价关系：在适当条件下，Riccati 方程(4)有解 P 当且仅当线性 Fredholm 积分方程(5)有解 H，为彻底解决分布参数系统 LQ 最优控制问题奠定了基础[25]。这里

$$V(t,s)=\Phi^*(T,t)C\Phi(T,s)+\int_{\max\{t,s\}}^{T}\Phi^*(\zeta,t)Q(\zeta)\Phi(\zeta,s)\mathrm{d}\zeta .$$

Da Prato-Bensoussan 也研究了 Riccati 方程[26] [27]。1991 年 Lasiecka-Triggiani 讨论了无限维 Riccati 方程解的存在唯一性的充分条件，进而考虑了抛物型、双曲型及其它类型偏微分方程带边界控制的 LQ 问题[28]。1995 年，在李训经与雍炯敏的专著中，综述了算子函数 $P(\cdot)$ 满足的积分型 Riccati 方程，积分型 Fredholm 方程，以及代数型 Riccati 方程与最优控制之间的关系[29]。

简而言之，无论是微分型的、代数型的还是积分型的 Riccati 方程在(最优)控制理论的应用方面均取得了令人惊叹的成果。因为 LQ 问题的可解性与相应的 Riccati 方程的可解性之间具有等价性，其 LQ 问题的最优解由 Riccati 方程解决定。可以说 Riccati 方程促进了最优控制的发展，反过来最优控制的发展使得 Riccati 方程无论在理论上还是应用方面均得到了充分的展现。

3. 均衡 Riccati 方程

现代最优控制问题的基本特征是符合 Bellman 最优性原理。也就是说，一旦在某个时刻做出最优决策，则该决策在此时刻后的任何时刻都是最优的，即该决策的最优性具有时间一致的特征。该结论成立的前提是决策环境和决策者的心态不纳入决策因素。但在金融、经济等领域，这个前提显然不符合客观事实。这使得现代控制理论成为解决许多应用问题强而有力的工具，但对许多经济问题却不适用，因为人们的经济行为是一个极其复杂的活动。如何发展现代控制论，使之成为能够解决经济、金融等领域的许多问题的强有力工具，是控制论发展的一个重要方向，即建立时间不一致控制问题的基本理论。为此建立相对简单的时间不一致 LQ 控制问题的基本理论理所当然就成为一个突破点。即推广 Riccati 方程，使得时间不一致 LQ 控制问题的可解性与该 Riccati 方程的可解性等价。正是在这一背景之下，人们引进了均衡 Riccati 方程。

2011 年雍炯敏教授在研究了一类时间不一致最优控制问题时，引入时间一致均衡控制，运用非合作博弈，证明了均衡控制的存在性可由一个微分方程和一个倒向 Riccati-Volterra 积分方程的耦合方程组

$$\begin{cases}\dot{P}^{\Delta}(s)+P^{\Delta}(s)A^{\Delta}(s)+A^{\Delta}(s)^{\mathrm{T}}P^{\Delta}(s)+Q^{\Delta}(s)-P^{\Delta}(s)B^{\Delta}(s)R^{\Delta}(s)^{-1}B^{\Delta}(s)^{\mathrm{T}}P^{\Delta}(s)=0,\ s\in(t_{k-1},t_k),\\ P^{\Delta}(t_k-0)=\Phi^{\Delta}(t_N;t_k)^{\mathrm{T}}G(t_{k-1})\Phi^{\Delta}(t_N;t_k)+\int_{t_k}^{t_N}\Big(\Phi^{\Delta}(s;t_k)^{\mathrm{T}}Q(t_{k-1},s)\Phi^{\Delta}(s;t_k)\\ \qquad\qquad +\Psi^{\Delta}(s;t_k)^{\mathrm{T}}R(t_{k-1},s)\Psi^{\Delta}(s;t_k)\Big)\mathrm{d}s,\ 1\le k\le N\end{cases}\tag{6}$$

来刻画，他将之称为均衡 Riccati 方程。上述微分方程中 $\Phi^{\Delta}(\cdot;t_k)$ 是方程

$$\begin{cases}\Phi_s^{\Delta}(s;t_k)=\left[A^{\Delta}(s)-B^{\Delta}(s)R^{\Delta}(s)^{-1}B^{\Delta}(s)^{\mathrm{T}}P^{\Delta}(s)\right]\Phi^{\Delta}(s;t_k),\quad s\in(t_k,T],\\ \Phi^{\Delta}(t_k;t_k)=I\end{cases}$$

的解且 $\Psi^{\Delta}(s;t_k)=-R^{\Delta}(s)^{-1}B^{\Delta}(s)P^{\Delta}(s)\Phi^{\Delta}(s;t_k),s\in[t_k,T]$，其中 Δ 为 $[0,T]$ 上的分割[30]。这是首次将 Riccati 方程引入时间不一致问题研究中，但此均衡 Riccati 方程解的存在唯一性在[30]中并未给出具体证明。他在 2012 年研究一类随机微分方程支配的时间不一致 LQ 问题时，定义均衡值函数，建立均衡值函数满足的均衡 HJB 方程。他从均衡 HJB 方程构造了时间一致闭环均衡控制，并推导得到了均衡 Riccati 方程

$$\begin{cases}P_t(\tau,t)+P(\tau,t)\hat{A}(t)+\hat{A}(t)^{\mathrm{T}}P(\tau,t)+\hat{A}_1(t)^{\mathrm{T}}P(\tau,t)\hat{A}_1(t)+\hat{Q}(\tau,t)=0,\ (\tau,t)\in D[0,T],\\ P(\tau,T)=G(\tau),\quad \tau\in[0,T]\end{cases}\tag{7}$$

其中

$$\begin{cases}\Gamma(t)=\left[R(t,t)+B_1(t)^{\mathrm{T}}P(t,t)B_1(t)\right]^{-1}\left[B(t)^{\mathrm{T}}P(t,t)+B_1(t)^{\mathrm{T}}P(t,t)A_1(t)\right],\\ \hat{A}(t)=A(t)-B(t)\Gamma(t),\quad \hat{A}_1(t)=A_1(t)-B_1(t)\Gamma(t),\quad (\tau,t)\in D[0,T],\\ \hat{Q}(\tau,t)=Q(\tau,t)+\Gamma(t)^{\mathrm{T}}R(\tau,t)\Gamma(t).\end{cases}$$

虽然该方程是确定型微分方程，但是由随机微分方程推导出来的，并且他采用了“对角线”方法和不动点原理证明上述 Riccati 方程解的适定性[31]。2017 年他又研究了平均场随机微分方程支配的时间不一致 LQ 控制问题，获得了近似问题的时间一致均衡策略，并证明该策略的收敛性，从而得到了均衡 Riccati 方程组

$$\begin{cases}P_s(s,t)+P(s,t)A(s)+A(s)^{\mathrm{T}}P(s,t)+C(s)^{\mathrm{T}}P(s,t)C(s)+Q(s,t)\\ \quad-\left[P(s,t)B(s)+C(s)^{\mathrm{T}}P(s,t)D(s)\right]\left[\hat{R}(s,s)+D(s)^{\mathrm{T}}P(s,s)D(s)\right]^{-1}\\ \quad\cdot\left[B(s)^{\mathrm{T}}\hat{P}(s,s)+D(s)^{\mathrm{T}}P(s,s)C(s)\right]=0,\\ \hat{P}_s(s,t)+\hat{P}(s,t)A(s)+A(s)^{\mathrm{T}}\hat{P}(s,t)+C(s)^{\mathrm{T}}P(s,t)C(s)+\hat{Q}(s,t)\\ \quad-\left[\hat{P}(s,t)B(s)+C(s)^{\mathrm{T}}P(s,t)D(s)\right]\left[\hat{R}(s,s)+D(s)^{\mathrm{T}}P(s,s)D(s)\right]^{-1}\\ \quad\cdot\left[B(s)^{\mathrm{T}}\hat{P}(s,s)+D(s)^{\mathrm{T}}P(s,s)C(s)\right]=0,\quad s\in[t,T],\\ P(T,t)=G(t),\quad \hat{P}(T,t)=\hat{G}(t).\end{cases}\tag{8}$$

他运用[31]中的“对角线”方法和齐次线性 Volterra 积分方程的性质证明了上述方程的适定性[32]。

著名行为经济学家周迅宇教授等人于 2012 年也研究了一类随机微分方程支配的时间不一致 LQ 控制问题，他们引进开环均衡控制并得到了开环均衡控制存在的充分条件[33]。随后，周教授等人证明了[33]中开环均衡控制存在的一个充要条件，其核心是均衡控制与某个由 FBSDEs 推导出的耦合 Riccati 方程组解的存在唯一性等价，证明了[33]中构造的显式开环均衡控制确实是唯一的。其中一个耦合 Riccati 方程组为

$$\begin{cases}\dot{M}=-\left[2A+|C|^2+\Gamma B'(R+MD'D)^{-1}(B+D'C)\right]M-Q\\ \qquad+(B+D'C)(R+MD'D)^{-1}(B+D'C)M^2\\ \qquad-B'(R+MD'D)^{-1}(B+D'C)MN,\\ \dot{N}=-\left[2A+\Gamma B'(R+MD'D)^{-1}B\right]N\\ \qquad+B'(R+MD'D)^{-1}(B+D'C)MN-B'(R+MD'D)^{-1}BN^2,\\ M_T=G,\quad N_T=h.\end{cases}\tag{9}$$

他们主要考虑了两种特殊情况下 Riccati 方程解的定性理论，存在性可运用截断方法验证，唯一性也是可以验证的。进而，提出一般时间不一致决策问题解的存在唯一性在连续时间条件下还不存在，即使能找到解，但很难找到参数不太苛刻的条件来保证解的存在[34]。与[33]定义的解条件相比较，[34]新定义的条件更弱也更恰当。

2018 年，彭云飞教授等人在研究一类 ODEs 支配的时间不一致问题时，引入下列耦合 Riccati 方程

$$\begin{cases}\dot{\bar{P}}(t)+\bar{P}(t)A+A^{\mathrm{T}}\bar{P}(t)+\bar{Q}(t)-\bar{P}(t)BM^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{P}(t)=0, & t\in[0,T],\\ \bar{Q}(t)=Q(t)-\int_t^T\bar{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau,t)\left(\dot{Q}(t)+\bar{R}^{\mathrm{T}}(\tau)\dot{M}(t)\bar{R}(t)\right)\bar{\Phi}(\tau,t)\,\mathrm{d}\tau, & t\in[0,T],\\ \bar{R}(t)=M^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{P}(t), & t\in[0,T],\\ \bar{P}(T)=0\end{cases}\tag{10}$$

并证明了均衡控制的存在性等价于 Riccati 方程解的存在性[35]。

关于时间不一致 LQ 问题的最新研究，可参阅文献[36]。

4. 小结

基于解决时间不一致 LQ 控制问题，人们引入均衡 Riccati 方程。显然均衡 Riccati 方程是算子 Riccati 方程的推广，内容更加丰富。关于其研究尚处于初始探索阶段。研究其适定性不仅有助于解决时间不一致 LQ 控制问题，为建立一般时间不一致控制问题的基本理论奠定基础，也有助于研究动力系统、量子力学等许多系统的相关性质。

基金项目

本文获得国家自然科学基金项目(11661020)，国家自然科学基金项目(12061021)资助。

参考文献

[1] 雍炯敏，楼红卫. 最优控制理论简明教程[M]. 北京：高等教育出版社, 2006.

[2] 秦元勋. 常微分方程概貌[M]. 上海：科学技术文献出版社, 1989.

[3] 伍卓群，李勇. 常微分方程[M]. 北京：高等教育出版社, 2015.

[4] 丁同仁，李承治. 常微分方程教程[M]. 第二版. 北京：高等教育出版社, 2018.

[5] M. Kline，著. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times [M]. 第 2 册. 朱学贤，申又枨，叶其孝，等，译. 上海：上海科学技术出版社, 2002.

[6] 秦元勋. 常微分方程定义的积分曲面[M]. 西安：西北大学出版社, 1985.

[7] Gasull, A., Torregrosa, J. and Zhang, X. (2016) The Number of Polynomial Solutions of Polynomial Riccati Equations. *Journal of Differential Equations*, **261**, 5071-5093. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.07.019

[8] Lucas, J.D., Tobolski, M. and Vilarino, S. (2016) Geometry of Riccati Equations over Normed Division Algebras. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **440**, 394-414. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.03.031

[9] Lou, S.Y. (2015) Consistent Riccati Expansion for Integrable Systems. *Studies in Applied Mathematics*, **134**, 372-402. https://doi.org/10.1111/sapm.12072

[10] Odibat, Z. (2017) A Riccati Equation Approach and Travelling Wave Solutions for Nonlinear Evolutions. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, **3**, 1-13. https://doi.org/10.1007/s40819-015-0085-z

[11] Navickas, Z., Ragulskis, M., Marcinkevicius, R., *et al*. (2017) Kink Solitary Solutions to Generalized Riccati Equations with Polynomial Coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **448**, 156-170. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.11.011

[12] Malwe, B.H., Betchewe, G., *et al*. (2016) Travelling Wave Solutions and Soliton Solutions for the Nonlinear Transmission Line Using the Generalized Riccati Equation Mapping Method. *Nonlinear Dynamics*, **84**, 171-177. https://doi.org/10.1007/s11071-015-2318-4

[13] Cruz, H., Schuch, D., Castanos, O., *et al*. (2015) Time Evolution of Quantum Systems via a Complex Nonlinear Riccati Equation, I. Conservative Systems with Time-Independent Hamiltonian. *Annals of Physics*, **360**, 44-60. https://doi.org/10.1016/j.aop.2015.05.001

[14] Cruz, H., Schuch, D., Castanos, O., *et al*. (2016) Time Evolution of Quantum Systems via a Complex Nonlinear Riccati Equation, II. Dissipative Systems. *Annals of Physics*, **373**, 609-630. https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.07.029

[15] Rosu, H.C., Mancas, S.C. and Chen, P. (2014) One-Parameter Families of Supersymmetric Isospectral Potentials from Riccati Solutions in Function Composition Form. *Annals of Physics*, **343**, 87-102. https://doi.org/10.1016/j.aop.2014.01.012

[16] E 卡姆克. 常微分方程手册[M]. 张鸿林，译. 北京：科学出版社, 1977.

[17] 张伟年，林正东，徐冰. 常微分方程[M]. 北京：高等教育出版社, 2006.

[18] Kalman, R.E. (1960) Contributions to the Theory of Optimal Control. *Sociedad Matematica Mexicana*, *Boletin*, **5**, 102-119.

[19] Lions, J.L. (1971) Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Springer, Berlin, 1049.

https://doi.org/10.1007/978-3-642-65024-6

[20] Lukes, D.L. and Russell, D.L. (1969) The Quadratic Criterion for Distributed Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **7**, 101-121. https://doi.org/10.1137/0307008

[21] Curtain, R. and Pritchard, A.J. (1976) The Infinite-Dimensional Riccati Equation for Systems Defined by Evolution Operators. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **14**, 951-983. https://doi.org/10.1137/0314061

[22] Gibson, J.S. (1979) The Riccati Integral Equations for Optimal Control Problems on Hilbert Spaces. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **17**, 537-565. https://doi.org/10.1137/0317039

[23] Gibson, J.S. (1983) Linear-Quadratic Optimal Control of Hereditary Differential Systems: Infinite-Dimensional Riccati Equations and Numerical Approximations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **21**, 95-139. https://doi.org/10.1137/0321006

[24] You, Y. (1984) On the Solution of a Class of Operator Riccati Equation. *Chinese Annals of Mathematics. Series A*, **5**, 219-227. (In Chinese)

[25] Chen, S. (1985) Riccati Equations Arising in Infinite Dimensional Optimal Control Problems. *Control Theory Applied*, **2**, 64-72. (In Chinese)

[26] Prato, G.D. and Ichikawa, A. (1985) Riccati Equations with Unbounded Coefficients. *Annali di Mathematics Puraed Applicata*, **140**, 209-221. https://doi.org/10.1007/BFb0005648

[27] Bensoussan, A., Prato, G.D., Delfour, M.C. and Mitter, S.K. (1993) Representation and Control of Infinite Dimensional Systems, Volume II, Systems & Control: Foundations & Applications. Springer Science & Business Media, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2750-2

[28] Lasiecka, I. and Triggiani, R. (1991) Differential and Algebraic Riccati Equations with Application to Boundary/Point Control Problems: Continuous Theory and Approximation Theory. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0006880

[29] Li, X. and Yong, J. (1995) Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems. Birkhäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4260-4

[30] Yong, J. (2011) A Deterministic Linear Quadratic Time-Inconsistent Optimal Control Problem. *Mathematical Control & Related Fields*, **1**, 83-118. https://doi.org/10.3934/mcrf.2011.1.83

[31] Yong, J. (2012) Time-Inconsistent Optimal Control Problems and the Equilibrium HJB Equation. *Mathematical Control & Related Fields*, **2**, 271-329. https://doi.org/10.3934/mcrf.2012.2.271

[32] Yong, J. (2017) Linear-Quadratic Optimal Control Problems for Mean-Field Stochastic Differential Equations: Time-Consistent Solutions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **369**, 5467-5523. https://doi.org/10.1090/tran/6502

[33] Hu, Y., Jin, H. and Zhou, X.Y. (2012) Time-Inconsistent Stochastic Linear-Quadratic Control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **50**, 1548-1572. https://doi.org/10.1137/110853960

[34] Hu, Y., Jin, H. and Zhou, X.Y. (2017) Time-Inconsistent Stochastic Linear-Quadratic Control: Characterization and Uniqueness of Equilibrium. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **55**, 1261-1279. https://doi.org/10.1137/15M1019040

[35] 张婷. 一类时间不一致的控制问题[D]: [硕士学位论文]. 贵阳: 贵州大学, 2019.

[36] 蒋太江. 一类时间不一致的 LQ 问题[D]: [硕士学位论文]. 贵阳: 贵州大学, 2020.