

对流扩散特征值问题的hp-局部不连续伽辽金方法

袁梦瑶, 刘芳, 杨青松

贵州师范大学, 数学科学学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2023年10月22日; 录用日期: 2023年10月30日; 发布日期: 2023年12月27日

摘要

对流扩散方程是偏微分方程一个很重要的分支并且在许多领域都有广泛的应用, 对流扩散方程特征值问题的数值方法的研究有重要的实际应用, 所以这也是前计算数学界的热点. 本文研究了对流扩散特征值问题的hp-局部不连续断伽辽金方法(LDG), 通过分析得到了先验误差估计, 即关于网格尺寸 h 是最优以及关于 p 是次优的hp-误差估计, 并且进行了相应的数值实验。

关键词

对流扩散特征值, hp-局部不连续断伽辽金法, 先验误差

The hp-Local Discontinuous Galerkin Method for Convection-Diffusion Eigenvalue Problems

Mengyao Yuan, Fang Liu, Qingsong Yang

School of Mathematics Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Oct. 22nd, 2023; accepted Oct. 30th, 2023; published Dec. 27th, 2023

Abstract

Convection-diffusion equation is a very important branch of partial differential equation and is widely used in many fields. The study of numerical methods for eigenvalue problems of convection-diffusion equation has important practical applications, so it is also a hot spot in pre-computational mathematics. In this paper, the hp-local discontinuous discontinuity Galerkin method (LDG) for convection-diffusion eigenvalue problems is studied, and the prior error estimates, that is, the hp-error estimates about the mesh size h is optimal and p is suboptimal, are obtained through analysis, and the corresponding numerical experiments are carried out.

Keywords

Convection-Diffusion Eigenvalue, hp-Local Discontinuous Galerkin Method, A Prior Error Estimate

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对流扩散特征值问题在流体力学、环境科学、能源开发和电子科学等多个领域的应用使得它有诸多物理实际背景,其在流体力学主要研究流体中由流体质点所携带的某种物理量,如温度或溶解于流体中的物质的浓度在流动过程中的变化规律。因为其广泛的应用使得越来越多学者对利用有限元方法求解对流扩散特征值问题产生了很大的研究兴趣。文献 [1] 讨论了对流扩散方程的格式及其解的估计,文献 [2] 讨论了后验误差估计和自适应算法。文献 [3] 讨论了三次有限体积元法,文献 [4] 讨论了变限积分法,文献 [5] 讨论了自适应移动网格算法,文献 [6] 讨论了对流扩散特征值问题的Crouzeix-Raviart 元二网格离散方法,文献 [7] 讨论了对流扩散特征值问题的一种多水平校正方法,等等。局部间断有限元方法是Cockburn 和Shu 在求解对流扩散方程的时候提出来的,其思想是引入辅助变量将高阶方程转化为一阶方程组的形式,再对一阶方程使用间断有限元方法。该方法已经应用到对流扩散方程、传统的KdV 方程等有高阶导数项方程的数值求解上,并取得了良好的效果。它具有许多显著的优点,首先,它能够处理复杂的区域边界或者具有复杂边界条件的问题,并获得与内部区域一致的高阶计算精度,易于网格加密和边界条件处理。其次,它采用间断的有限元空

间, 允许相邻剖分单元上插值多项式的次数可以不同, 更易实现hp 自适应性, 即可以在区域变化剧烈的地方或者函数变化剧烈的地方采用细网格、高次多项式逼近, 而在平缓区域或者函数变化平缓的区域采用粗网格、低次多项式逼近, 从而提高计算效率。

本文研究了hp-局部不连续伽辽金方法计算对流扩散特征值问题的先验误差估计. 首先, 对求解区域进行剖分, 确定有限元空间, 然后通过辅助变量, 将问题中的二阶方程转化为一阶方程组, 接着通过格林公式构造出离散问题的LDG 格式, 选择合适的数值通量函数来进行格式的稳定性分析, 最后推出该数值格式的误差估计, 分析方程的LDG格式是否可以达到最优收敛阶。

2. 基础理论准备

设 $\Omega \subset R^2$ 是一个Lipshitz边界 $\partial\Omega$ 的有界域, 设 \mathbf{n} 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, 考虑Dirichlet边界条件特征值问题: 求 $\lambda \in C$ 和 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} -\Delta u + \mathbf{r} \cdot \nabla u + cu = \lambda u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

表示

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx,$$

并定义连续的双线性形式

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) + (\mathbf{r} \cdot \nabla u, v) + (cu, v), \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

假设 \mathbf{r} 和 c 是 Ω 上的有界函数, $\nabla \cdot \mathbf{r}$ 存在且满足

$$-\frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{r} + c \geq 0, \quad \text{in } \Omega.$$

在这些假设下, 存在与 u 、 v 无关的两个正常数 A 和 B , 使得双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 满足

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq A \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \\ a(v, v) &\geq B \|v\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.1)的弱形式是求 $(\lambda, u) \in C \times H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, 使得下面等式成立

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.3)$$

设 $\mathcal{T}_h = \{\kappa\}$ 为 Ω 的形状规则网格, 单元 κ 的直径用 h_κ 表示, \mathcal{T}_h 的一条内部边是 $\partial\kappa^+ \cap \partial\kappa^-$ 的非空内部, 其中 κ^+ 和 κ^- 是 \mathcal{T}_h 的两个相邻元素, 不一定匹配, \mathcal{T}_h 的一条外部边是 $\partial\kappa \cap \partial\Omega$ 的非空内部, 其中 κ 是 \mathcal{T}_h 的边界元素, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_D$, 其中 \mathcal{E}_I 表示内部边的集合, \mathcal{E}_D 表示边界 $\partial\Omega$ 上的边的集合。用 $p_\kappa \geq 1$ 表示单元 $\kappa \in \mathcal{T}_h$ 中多项式的次数, 记 $p = \{p_\kappa\}_{\kappa \in \mathcal{T}_h}$, 现定义hp-有限元空间为:

$$S^p(\mathcal{T}_h) = \{u \in L^2(\Omega) : u|_\kappa \in S^{p_\kappa}(\kappa), \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\},$$

其中当单元 κ 为三角形时, $S^{p_\kappa}(\kappa)$ 是 κ 上 p_κ 次多项式空间 $p^{p_\kappa}(K)$ 。

引入剖分 \mathcal{T}_h 上的分片函数空间:

$$H^s(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_\kappa \in H^s(\kappa), \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\}.$$

引入辅助变量 $\mathbf{q} = \nabla u$,则(2.1)可以改写为:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{r} \cdot \nabla u + cu = \lambda u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

用 $V_h = S^p(\mathcal{T}_h)$ 及 $Q_h = S^p(\mathcal{T}_h)^2$ 表示 hp - 间断有限元空间,则逼近问题(2.5) 的 hp - LDG格式为: 求 $(\lambda_h, u_h) \in C \times V_h$,对所有 $\kappa \in \mathcal{T}_h$ 有

$$\int_\kappa \mathbf{q}_h \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\kappa} \hat{\mathbf{q}}_h \cdot \mathbf{n}_\kappa v ds + \int_\kappa (\mathbf{r} \cdot \nabla u_h + cu_h) v dx = \int_\kappa \lambda_h u_h v dx \quad \forall v \in V_h \quad (2.5)$$

$$\int_\kappa \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{t} dx - \int_{\partial\kappa} \hat{u}_h \cdot \mathbf{n}_\kappa \mathbf{t} ds + \int_\kappa u_h \nabla \cdot \mathbf{t} dx = 0 \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{Q}_h \quad (2.6)$$

其中 $v \in V_h$, n_κ 是 $\partial\kappa$ 的单位外法向量 $\hat{\mathbf{u}}_h$ 和 $\hat{\mathbf{q}}_h$ 是数值通量,它是 u 和 q 在 $\partial\kappa$ 上的痕迹的近似值. 定义 v 在 e 上的均值和跳跃:

$$\{\{v\}\} = \frac{1}{2}(v^+ + v^-), \quad [[v]] = v^+ \mathbf{n}^+ + v^- \mathbf{n}^-,$$

其中 $e = \partial\kappa^+ \cap \partial\kappa^-$, $v^+ = v|_{\kappa^+}$, $v^- = v|_{\kappa^-}$, \mathbf{n} 是从 κ^+ 到 κ^- 的单位外法向量.如果 \mathcal{E}_D , 定义 v 在 e 上的均值和跳跃:

$$\{\{v\}\} = v, \quad [[v]] = v\mathbf{n}.$$

有了上述的定义,可以得到

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}} \int_{\partial\kappa} v \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\mathcal{E}} \{\{\mathbf{q}\}\} \cdot [[v]] ds + \int_{\mathcal{E}_I} [[\mathbf{q}]] \{\{v\}\} ds$$

定义数值通量:

$$\hat{u}|_e = \begin{cases} \{\{u\}\} + \mathbf{b} \cdot [[u]] & e \in \mathcal{E}_I \\ 0 & e \in \mathcal{E}_D \end{cases} \quad \hat{\mathbf{q}}|_e = \begin{cases} \{\{\mathbf{q}\}\} - \eta[[u]] - \mathbf{b}[[\mathbf{q}]] & e \in \mathcal{E}_I \\ \mathbf{q} - \eta u \mathbf{n} & e \in \mathcal{E}_D \end{cases}$$

其中参数 η 和 \mathbf{b} 要适当选择.

为了定义参数 η ,在 $L^\infty(\mathcal{E})$ 中的相关局部网格大小和近似度中引入函数 h 和 p 为:

$$h = h(x) = \begin{cases} \min\{h_\kappa, h'_\kappa\}, & x \in e_{\kappa\kappa'}, \\ h_\kappa & x \in e_{\kappa\Omega}, \end{cases} \quad p = p(x) = \begin{cases} \max\{p_\kappa, p'_\kappa\}, & x \in e_{\kappa\kappa'}, \\ p_\kappa, & x \in e_{\kappa\Omega}, \end{cases}$$

其中 $e_{\kappa\kappa'} = \text{int}(\partial\kappa \cap \partial\kappa')$, $e_{\kappa\Omega} = \text{int}(\partial\kappa \cap \partial\Omega)$.

定义不连续稳定参数 $\eta \in L^\infty(\mathcal{E})$ 为 $\eta = \alpha p^2 h^{-1}$, 选择参数 \mathbf{b} , 使得 $\|\mathbf{b}\|_{\infty, \mathcal{E}_T} \leq \beta$, 其中 $\alpha > 0$ 和 $\beta \geq 0$ 是与网格大小无关的常数.

定义提升算子 $\Psi(v) \in \mathbf{Q}_h$, $v \in V(h) := V_h + H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\int_{\Omega} \Psi(v) \cdot \mathbf{t} dx = \int_{\mathcal{E}_T} (\{\{\mathbf{t}\}\} - \mathbf{b}[[\mathbf{t}]]) \cdot [[v]] ds + \int_{\mathcal{E}_D} v \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} ds \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{Q}_h \quad (2.7)$$

由于 $\mathbf{q} = \nabla u$, 则有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{t} dx &= \int_{\Omega} \nabla_h u \cdot \mathbf{t} dx - \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u}) \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}_K ds \\ &= \int_{\Omega} \nabla_h u \cdot \mathbf{t} dx - \int_{\mathcal{E}_T} (\{\{u\}\} [[\mathbf{t}]] + [[u]] \cdot \{\{\mathbf{t}\}\} - \{\{u\}\} [[\mathbf{t}]] - \mathbf{b} \cdot [[u]] [[\mathbf{t}]]) ds - \int_{\mathcal{E}_D} u \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} ds \\ &= \int_{\Omega} \nabla_h u \cdot \mathbf{t} dx - \int_{\mathcal{E}_T} ([[u]] \cdot \{\{\mathbf{t}\}\} - \mathbf{b} \cdot [[u]] [[\mathbf{t}]]) ds - \int_{\mathcal{E}_D} u \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} ds \\ &= \int_{\Omega} (\nabla_h u - \Psi(u)) \cdot \mathbf{t} dx \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{Q}_h \end{aligned} \quad (2.8)$$

由(2.6)和(2.8)得到

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (\nabla_h u - \Psi(u)) \cdot \nabla v dx - \int_{\mathcal{E}_T} (\{\{\mathbf{q}\}\} - \eta[[u]]) \cdot [[v]] ds - \int_{\mathcal{E}_D} (\mathbf{q} - \eta u \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} v ds \\ &+ \int_{\Omega} (\mathbf{r} \cdot \nabla u + cu) v dx = \int_{\Omega} \lambda u v dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

由于

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Psi(v) \cdot (\nabla_h u - \Psi(u)) dx &= \int_{\Omega} \Psi(v) \cdot \mathbf{q} dx \\ &= \int_{\mathcal{E}_T} ([[v]] \cdot \{\{\mathbf{q}\}\} - \mathbf{b} \cdot [[v]] [[\mathbf{q}]]) ds + \int_{\mathcal{E}_D} v \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

由(2.9)和(2.10)得到

$$\begin{aligned} a_h(u, v) &:= \int_{\Omega} (\nabla_h u - \Psi(u)) \cdot (\nabla v - \Psi(v)) dx + \int_{\mathcal{E}_T} \eta[[u]] \cdot [[v]] ds + \int_{\mathcal{E}_D} \eta u v ds + \int_{\Omega} (\mathbf{r} \cdot \nabla u + cu) v dx \\ &= \int_{\Omega} \lambda u v dx \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.3)的有限元近似是求 $(\lambda_h, u_h) \in C \times V_h$, $u_h \neq 0$, 使得

$$a_h(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V^h. \quad (2.12)$$

(2.3)的源问题为: 求 $w \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$a(w, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.13)$$

(2.13)的间断有限元近似是求 $w_h \in V_h$, 使得

$$a_h(w_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.14)$$

定义线性有界算子 $T : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ 满足

$$a(Tf, v) = (f, v), \quad \forall f \in L^2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.15)$$

则(2.3)等价的算子形式为:

$$Tu = \frac{1}{\lambda}u \quad (2.16)$$

由(2.12)可定义对应的离散解算子 $T_h : L^2(\Omega) \rightarrow V_h$ 满足

$$a_h(T_h f, v) = (f, v), \quad \forall f \in L^2(\Omega), \quad \forall v \in V_h. \quad (2.17)$$

则(2.12)等价的算子形式为:

$$T_h u_h = \frac{1}{\lambda_h}u_h \quad (2.18)$$

(2.3)的对偶问题为: 求 $(\lambda^*, u^*) \in C \times H_0^1(\Omega)$, $u^* \neq 0$, 使得

$$a(v, u^*) = \lambda^*(v, u^*), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.19)$$

(2.19)的源问题为求 $w^* \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$a(v, w^*) = (v, g), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.20)$$

定义线性有界算子 $T^* : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ 满足

$$a(v, T^*g) = (v, g), \quad \forall g \in L^2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.21)$$

则(2.19)等价的算子形式为:

$$T^*u^* = \frac{1}{\lambda^*}u^* \quad (2.22)$$

(2.19)的有限元近似是求 $(\lambda_h^*, u_h^*) \in C \times V_h, u_h^* \neq 0$, 使得

$$a_h(v_h, u_h^*) = \lambda_h^*(v_h, u_h^*), \quad \forall v_h \in V^h. \quad (2.23)$$

(2.20)的间断有限元近似是求 $w_h^* \in V_h$, 使得

$$a_h(v_h, w_h^*) = (v_h, g), \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.24)$$

由(2.23)可定义对应的离散解算子 $T_h^* : L^2(\Omega) \rightarrow V_h$ 满足

$$a_h(v_h, T_h^* g) = (v_h, g), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.25)$$

则(2.23)等价的算子形式为:

$$T_h^* u_h^* = \frac{1}{\lambda_h^*} u_h^* \quad (2.26)$$

引入赋予局部间断有限元范数的和空间 $V(h) = V_h + H_0^1(\Omega)$, 其中能量范数为:

$$\|v\|_h^2 = \|\nabla_h v\|_{0,\Omega}^2 + \|v\|_{0,\Omega}^2 + \alpha \|h^{-1/2} p[v]\|_{0,\mathcal{E}_T}^2 + \alpha \|h^{-1/2} p v\|_{0,\mathcal{E}_D}^2, \quad (2.27)$$

伽辽金正交性为:

$$a_h(w - w_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.28)$$

$$a_h(v_h, w^* - w_h^*) = 0, \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.29)$$

证明 在(2.5)式中将数值通量带入有:

$$\begin{aligned} a_h(w_h, v_h) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} (\nabla w_h \cdot \nabla v_h + (\mathbf{r} \cdot \nabla w_h) v_h + c w_h v_h) dx \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e (\{\{\nabla w_h\}\} + \eta [[w_h]] - \mathbf{b} [[\nabla w_h]]) \cdot [[v_h]] ds \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \int_e (\{\{\nabla v_h\}\} - \mathbf{b} [[\nabla v_h]]) \cdot [[w_h]] ds \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_D} \int_e w_h \mathbf{n} \cdot \nabla v_h ds - \sum_{e \in \mathcal{E}_D} \int_e (\nabla w_h - \eta w_h \mathbf{n}) \cdot [[v_h]] ds \end{aligned} \quad (2.30)$$

由文献 [8]中引理3.2有,当 $w \in H_0^1$ 时,可以得到 $[[w]]|_{\mathcal{E}} = 0$, $[[\nabla w]]|_{\mathcal{E}} = 0$.

设 $w \in H_0^1, v_h \in V(h)$,将表达式 $a_h(w, v_h)$ 拆分成三项

$$a_h(w, v_h) = T_1 - T_2 - T_3 \quad (2.31)$$

其中

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} (\nabla w \cdot \nabla v_h + (\mathbf{r} \cdot \nabla w) v_h + c w v_h) dx \\
T_2 &= \sum_{e \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}}} \int_e \{ \{ \nabla w \} \} \cdot [[v_h]] ds \\
T_3 &= \sum_{e \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} \int_e \nabla w \cdot [[v_h]] ds
\end{aligned}$$

对 T_1 用格林公式有:

$$T_1 = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left(\int_{\kappa} (-\Delta w \cdot v_h + (\mathbf{r} \cdot \nabla w) v_h + c w v_h) dx + \int_{\partial \kappa} \nabla w_h \cdot \mathbf{n}_{\kappa} v_h ds \right)$$

由于

$$\begin{aligned}
\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} (-\Delta w \cdot v_h + (\mathbf{r} \cdot \nabla w) v_h + c w v_h) dx &= \int_{\Omega} f v_h dx \\
\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial \kappa} \nabla w \cdot \mathbf{n}_{\kappa} v_h ds &= T_2 + T_3 + \sum_{e \in \mathcal{E}_{\mathcal{I}}} \int_e \{ \{ v_h \} \} \cdot [[\nabla w]] ds
\end{aligned}$$

因此可以得到 $T_1 = T_2 + T_3 + \int_{\Omega} f v_h dx$

由(2.31)式和上式可以得到:

$$a_h(w, v_h) = \int_{\Omega} f v_h dx, \quad \forall v_h \in V(h) \quad (2.32)$$

同理可以得:

$$a_h(v_h, w^*) = \int_{\Omega} g v_h dx, \quad \forall v_h \in V(h) \quad (2.33)$$

由(2.32)式和(2.14)式可以得到(2.28)式,由(2.33)式和(2.24)式可以得到(2.29)式,证明完成。

如下连续性和椭圆性成立:

$$|a_h(u_h, v_h)| \lesssim \|u_h\|_h \|v_h\|_h, \quad \forall u_h, v_h \in V(h), \quad (2.34)$$

$$\|u_h\|_h^2 \lesssim a_h(u_h, u_h), \quad \forall u_h \in V_h. \quad (2.35)$$

证明 首先证明(2.34)式,由文献 [9]中引理6.1有 $\|v\|_{0,\partial\kappa} \lesssim h_{\kappa}^{-\frac{1}{2}} p_{\kappa} \|v\|_{0,\kappa}$,由(2.7)式有

$$\begin{aligned}
\|\Psi(v)\|_{0,\Omega} \|\mathbf{t}\|_{0,\Omega} &\lesssim (\|\mathbf{t}^+\|_{0,\mathcal{E}_{\mathcal{I}}} + \|\mathbf{t}^-\|_{0,\mathcal{E}_{\mathcal{I}}}) \|[[v]]\|_{0,\mathcal{E}_{\mathcal{I}}} + \|\mathbf{t}\|_{0,\mathcal{E}_{\mathcal{D}}} \|v\|_{0,\mathcal{E}_{\mathcal{D}}} \\
[0.25cm] &\lesssim \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (h_{\kappa}^{-\frac{1}{2}} p_{\kappa} \|\mathbf{t}^+\|_{0,\kappa} + h_{\kappa}^{-\frac{1}{2}} p_{\kappa} \|\mathbf{t}^-\|_{0,\kappa}) \|[[v]]\|_{0,\mathcal{E}_{\mathcal{I}}} + \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_{\kappa}^{-\frac{1}{2}} p_{\kappa} \|\mathbf{t}\|_{0,\kappa} \|v\|_{0,\mathcal{E}_{\mathcal{D}}} \\
&\lesssim h^{-\frac{1}{2}} p \|\mathbf{t}\|_{0,\Omega} (\|[[v]]\|_{0,\mathcal{E}_{\mathcal{I}}} + \|v\|_{0,\mathcal{E}_{\mathcal{D}}})
\end{aligned}$$

从而可以得到

$$\|\Psi(v)\|_{0,\Omega} \lesssim \|h^{-\frac{1}{2}}p[[v]]\|_{0,\varepsilon_{\mathcal{I}}} + \|h^{-\frac{1}{2}}pv\|_{0,\varepsilon_{\mathcal{D}}} \quad (2.36)$$

由(2.11)式,将表达式 $|a_h(u_h, v_h)|$ 拆分成三项可以得到

$$\begin{aligned} |a_h(u_h, v_h)| &\leq |T_1| + |T_2| + |T_3| \\ |T_1| &= \int_{\Omega} |(\nabla_h u_h - \Psi(u_h)) \cdot (\nabla_h v_h - \Psi(v_h))| dx \\ &\lesssim \|\nabla_h w_h\|_{0,\Omega} \|\nabla_h v_h\|_{0,\Omega} + \|\nabla_h w_h\|_{0,\Omega} \|\Psi(v_h)\|_{0,\Omega} + \|\nabla_h v_h\|_{0,\Omega} \|\Psi(w_h)\|_{0,\Omega} \\ &\quad + \|\Psi(w_h)\|_{0,\Omega} \|\Psi(v_h)\|_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} |T_2| &= \int_{\varepsilon_{\mathcal{I}}} |\eta[[u_h]] \cdot [[v_h]]| ds + \int_{\varepsilon_{\mathcal{D}}} |\eta u_h v_h| ds \\ &\lesssim \alpha \|h^{-\frac{1}{2}}p[[u_h]]\|_{0,\varepsilon_{\mathcal{I}}} \|h^{-\frac{1}{2}}p[[v_h]]\|_{0,\varepsilon_{\mathcal{I}}} + \alpha \|h^{-\frac{1}{2}}pu_h\|_{0,\varepsilon_{\mathcal{D}}} \|h^{-\frac{1}{2}}pv_h\|_{0,\varepsilon_{\mathcal{D}}} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$|T_3| = \int_{\Omega} |(\mathbf{r} \cdot \nabla_h u_h + cu_h)v_h| dx \lesssim \|\nabla_h u_h\|_{0,\Omega} \|v_h\|_{0,\Omega} + \|u_h\|_{0,\Omega} \|v_h\|_{0,\Omega} \quad (2.39)$$

由(2.36)式,(2.37)式,(2.38)式和(2.39)式可以得到(2.34)式.

下面,我们证明(2.35)式,由(2.36)式,(2.11)式,将表达式 $a_h(v_h, v_h)$ 拆分成三项可以得到

$$a_h(v_h, v_h) = T_1 + T_2 + T_3$$

其中

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{\Omega} (\nabla_h v_h - \Psi(v_h))^2 dx \gtrsim \int_{\Omega} (1 - \chi)(\nabla_h v_h)^2 + (1 - \frac{1}{\chi})(\Psi(v_h))^2 dx \\ &\gtrsim \|\nabla_h v_h\|_{0,\Omega}^2 - \|h^{-\frac{1}{2}}p[[v_h]]\|_{0,\varepsilon_{\mathcal{I}}}^2 - \|h^{-\frac{1}{2}}pv_h\|_{0,\varepsilon_{\mathcal{D}}}^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

其中 χ 满足 $\frac{1}{1+\eta} < \chi < 1$.

$$T_2 = \int_{\varepsilon_{\mathcal{I}}} \eta[[v_h]]^2 ds + \int_{\varepsilon_{\mathcal{D}}} \eta v_h^2 ds = \alpha \|h^{-\frac{1}{2}}p[[v_h]]\|_{0,\varepsilon_{\mathcal{I}}}^2 + \alpha \|h^{-\frac{1}{2}}pv_h\|_{0,\varepsilon_{\mathcal{D}}}^2 \quad (2.41)$$

$$T_3 = \int_{\Omega} (\mathbf{r} \cdot \nabla_h v_h + cv_h)v_h dx = \int_{\Omega} (-\frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{r}} \cdot v_h^2 + cv_h^2) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}v_h^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dx \gtrsim \|v_h\|_{0,\Omega}^2 \quad (2.42)$$

由(2.40)式,(2.41)式,(2.42)式可以得到(2.35)式,证明完成.

令 w 是(2.13)式的解, w^* 是(2.20)式的解,且 $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Omega)$,假设如下正则性估计成立

$$\|w\|_{1+r} \lesssim \|f\|_{0,\Omega} \quad (\frac{1}{2} < r \leq 1) .$$

$$\|w^*\|_{1+r} \lesssim \|g\|_{0,\Omega} \quad (\frac{1}{2} < r \leq 1) .$$

引理 2.1 (文献 [10]中命题4.9) 设 $\kappa \in \mathcal{T}_h$ 及 $v \in H^{s_\kappa}(\kappa)$, $s_\kappa > \frac{3}{2}$, 则存在多项式 $\Pi_{p_\kappa}^{h_\kappa} v \in S^{p_\kappa}$, $p_\kappa = 1, 2, \dots$, 满足 $(0 \leq m \leq s_\kappa)$

$$\|v - \Pi_{p_\kappa}^{h_\kappa} v\|_{m, \kappa} \lesssim h_\kappa^{\min(p_\kappa+1, s_\kappa)-m} p_\kappa^{m-s_\kappa} \|v\|_{s_\kappa, \kappa} \quad (2.43)$$

$$\|v - \Pi_{p_\kappa}^{h_\kappa} v\|_{0, \partial\kappa} \lesssim h_\kappa^{\min(p_\kappa+1, s_\kappa)-\frac{1}{2}} p_\kappa^{\frac{1}{2}-s_\kappa} \|v\|_{s_\kappa, \kappa} \quad (2.44)$$

现引入整体间断插值算子 $\Pi_p^h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$, 使得 $\Pi_p^h(u)|_\kappa = \Pi_{p_\kappa}^{h_\kappa}(u|_\kappa)$, 对于向量值函数 $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_d)$, 定义 $\Pi_p^h(\mathbf{r})|_\kappa = (\Pi_{p_\kappa}^{h_\kappa} \mathbf{r}_1, \Pi_{p_\kappa}^{h_\kappa} \mathbf{r}_2, \dots, \Pi_{p_\kappa}^{h_\kappa} \mathbf{r}_d)$.

定理 2.1 设 w 和 w_h 分别是(2.13)式和(2.14)式的解, w 满足 $w|_\kappa \in H^{s_\kappa}(\kappa)$, 对所有 $\kappa \in \mathcal{T}_h$ 及 $s_\kappa > \frac{3}{2}$, 有以下不等式成立

$$\|w - w_h\|_h \lesssim \inf_{v_h \in V_h} \|w - v_h\|_h, \|w - w_h\|_h \lesssim \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (h_\kappa^{\min(p_\kappa+1, s_\kappa)-1} p_\kappa^{\frac{3}{2}-s_\kappa} \|w\|_{s_\kappa, \kappa})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.45)$$

证 首先, 我们证明(2.45)式, 通过利用(2.28)式, (2.34)式和(2.35)式, 可以推导出

$$\begin{aligned} \|v_h - w_h\|_h^2 &\lesssim |a_h(v_h - w_h, v_h - w_h)| \lesssim a_h(v_h - w, v_h - w_h) + a_h(w - w_h, v_h - w_h) \\ &\lesssim \|v_h - w\|_h \|v_h - w_h\|_h \end{aligned} \quad (2.46)$$

由三角不等式可以得到

$$\|w - w_h\|_h \lesssim \|w - v_h\|_h + \|v_h - w_h\|_h \quad (2.47)$$

由(2.47)式和(2.48)式可以得到(2.45)式。

下面, 我们证明(2.46)式, 由(2.27)式, 令 $E_h(w) = w - \Pi_p^h w$ 有,

$$\begin{aligned} \|E_h(w)\|_h^2 &\lesssim \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\|\nabla_h E_h(w)\|_{0, \kappa}^2 + \|E_h(w)\|_{0, \kappa}^2) + \alpha \sum_{e \in \mathcal{E}_I} \left\| h^{-\frac{1}{2}} p [[E_h(w)]] \right\|_{0, \mathcal{E}_I}^2 + \alpha \sum_{e \in \mathcal{E}_D} \left\| h^{-\frac{1}{2}} p E_h(w) \right\|_{0, \mathcal{E}_D}^2 \\ &\lesssim \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\|\nabla_h E_h(w)\|_{0, \kappa}^2 + \|E_h(w)\|_{0, \kappa}^2) + \alpha \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{e \subset \partial\kappa} h^{-\frac{1}{2}} p \|E_h(w)\|_{0, e}^2 \right) \\ &:= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

对 I_1 进行估计, 由(2.43)式可得

$$(\|\nabla_h E_h(w)\|_{0, \kappa}^2 + \|E_h(w)\|_{0, \kappa}^2) \lesssim (h_\kappa^{\min(p_\kappa+1, s_\kappa)-1} p_\kappa^{1-s_\kappa} \|w\|_{s_\kappa, \kappa})^2 \quad (2.49)$$

对 I_2 进行估计, 由(2.44)式可得

$$h^{-\frac{1}{2}} p \|E_h(w)\|_{0, e}^2 \lesssim (h_\kappa^{\min(p_\kappa+1, s_\kappa)-1} p_\kappa^{\frac{3}{2}-s_\kappa} \|w\|_{s_\kappa, \kappa})^2 \quad (2.50)$$

由(2.50)式和(2.51)式得到

$$\|w - \Pi_p^h w\|_h \lesssim \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (h_\kappa^{\min(p_\kappa+1, s_\kappa)-1} p_\kappa^{\frac{3}{2}-s_\kappa} \|w\|_{s_\kappa, \kappa})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.51)$$

误差估计公式与插值误差公式

$$\inf_{v_h \in V_h} \|w - v_h\| \lesssim \|w - \Pi_p^h w\| \quad (2.52)$$

由(2.45)式,(2.52)式,(2.53)式得到(2.46)式, 证明完成。

定理 2.2 设 w 和 w_h 分别是(2.13)式和(2.14)式的解, w 满足 $w|_\kappa \in H^{s_\kappa}(\kappa)$, 对所有 $\kappa \in \mathcal{T}_h$ 及 $s_\kappa > \frac{3}{2}$, 有以下不等式成立

$$\|w - w_h\|_{0, \Omega} \lesssim h^r p^{\frac{1}{2}-r} \|w - w_h\|_h, \quad (2.53)$$

$$\|w - w_h\|_{0, \Omega} \lesssim \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (h_\kappa^{\min(p_\kappa+1, s_\kappa)-1+r} p_\kappa^{2-s_\kappa-r} \|w\|_{s_\kappa, \kappa})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.54)$$

其中 $s = \min_{\kappa \in \mathcal{T}_h} s_\kappa > \frac{3}{2}$.

证 首先证明(2.54)式考虑(2.3)式对偶问题的源问题 $a(v, w^*) = (v, g)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, 对于任意固定的 $g \in L^2(\Omega)$, 令 $w_h^* = \Pi_p^h w^*$, 利用伽辽金正交性(2.29) 式和(2.34)式推导出。

$$\begin{aligned} (w - w_h, g) &= a_h(w - w_h, w^*) = a_h(w - w_h, w^* - w_h^*) \\ &\lesssim \|w - w_h\|_h \|w^* - w_h^*\|_h. \end{aligned} \quad (2.55)$$

由(2.46)式和椭圆正则性假设估计, 令 $g = w - w_h$ 得到

$$\|w^* - w_h^*\|_h \lesssim h^r p^{\frac{1}{2}-r} \|w^*\|_{1+r, \Omega} \lesssim h^r p^{\frac{1}{2}-r} \|w - w_h\|_{0, \Omega}. \quad (2.56)$$

由(2.56)式和(2.57)式得到

$$\|w - w_h\|_{0, \Omega} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{|(w - w_h, g)|}{\|g\|_{0, \Omega}} \lesssim h^r p^{\frac{1}{2}-r} \|w - w_h\|_h$$

从而可得到(2.54) 式。

下面, 我们证明(2.55)式, 由(2.46)式和(2.54)式得到

$$\|w - w_h\|_{0, \Omega} \lesssim h^r p^{\frac{1}{2}-r} \|w - w_h\|_h \lesssim \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (h_\kappa^{\min(p_\kappa+1, s_\kappa)-1+r} p_\kappa^{2-s_\kappa-r} \|w\|_{s_\kappa, \kappa})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

从而可得到(2.55) 式, 证明完成。从(2.46) 式中取 $s_\kappa = 1 + r$ ($\frac{1}{2} < r \leq 1$), 和正则性估计可以得到以下稳定估计

$$\begin{aligned}
\|T_h f\|_h &\lesssim \|T_h f - T f\|_h + \|T f\|_h \\
&\lesssim \|T_h f - T f\|_h + \|T f\|_1 \\
&\lesssim h^{\min(p,r)} p^{\frac{1}{2}-r} \|T f\|_{1+r} + \|T f\|_1 \\
&\lesssim \|f\|_{0,\Omega}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

3. 先验误差估计

3.1. 特征值问题的先验误差分析

设 λ 是(2.4)的第 j 个特征值, 具有代数重数 q 和陡度 α , 其中 $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+q-1}$. 当 $\|T_h - T\|_{0,\Omega} \rightarrow 0$, (2.12) 的 q 个特征值 $\lambda_{j,h}, \dots, \lambda_{j+q-1,h}$ 将收敛到 λ . 设 $M(\lambda)$ 是与 λ 相关的(2.4)式的广义特征向量空间, $M_h(\lambda)$ 是与 λ_h 相关的(2.12)式的广义特征向量空间的直接和, λ_h 收敛于 λ .

给定两个闭子空间 V 和 U 这两个子空间的间隙表示为

$$\delta(U, V) = \sup_{u \in V, \|u\|_{0,\Omega}=1} \inf_{v \in U} \|u - v\|_{0,\Omega}, \quad \hat{\delta}(U, V) = \max\{\delta(U, V), \delta(V, U)\}.$$

$\hat{\lambda}_h = \frac{1}{q} \sum_{i=j}^{j+q-1} \lambda_{i,h}$ 表示算术平均值.

定理 3.1 设 $M(\lambda) \subset H^{1+r}(\Omega)$ ($1 \geq r > \frac{1}{2}$), 那么有以下不等式成立

$$|\lambda_h - \lambda| \lesssim h^{\frac{2r}{\alpha}} p^{\frac{1-2r}{\alpha}}. \tag{3.1}$$

设 $u_h \in M_h(\lambda)$ 是(2.12)的广义特征向量空间的直接和, 那么存在(2.4)的特征值函数 u 使得

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \lesssim h^{\frac{2r}{\alpha}} p^{\frac{1-2r}{\alpha}}, \tag{3.2}$$

$$\|u - u_h\|_h \lesssim h^{\frac{2r}{\alpha}} p^{\frac{1-2r}{\alpha}} + h^r p^{\frac{1}{2}-r}, \tag{3.3}$$

如果设 $\alpha = 1$, 那么

$$\|u - u_h\|_h \lesssim h^r p^{\frac{1}{2}-r}. \tag{3.4}$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \lesssim h^r p^{\frac{1}{2}-r} \|u - u_h\|_h. \tag{3.5}$$

证明 记 $T f = w$ 和 $T_h f = w_h$, 结合算子形式、正则性估计和(2.55)式, 可以得到

$$\begin{aligned}
\|T - T_h\|_{0,\Omega} &= \sup_{0 \neq f \in L^2(\Omega)} \frac{\|T f - T_h f\|_{0,\Omega}}{\|f\|_{0,\Omega}} = \sup_{0 \neq f \in L^2(\Omega)} \frac{\|w - w_h\|_{0,\Omega}}{\|f\|_{0,\Omega}} \\
&\lesssim \sup_{0 \neq f \in L^2(\Omega)} \frac{h^{2r} p^{1-2r} \|f\|_{0,\Omega}}{\|f\|_{0,\Omega}} \lesssim h^{2r} p^{1-2r} \rightarrow 0, \quad (h \rightarrow 0, p \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

由文献 [11] 中定理(7.1),定理(7.2),定理(7.3),定理(7.4),有

$$\hat{\delta}(M(\lambda), M_h(\lambda)) \lesssim \|(T - T_h)|_{M(\lambda)}\|_{0,\Omega} \quad (3.6)$$

$$|\lambda - \hat{\lambda}_h| \lesssim \sum_{i,l=j}^{j+q-1} |\langle (T - T_h)\varphi_i, \varphi_l^* \rangle| + \|(T - T_h)|_{M(\lambda)}\|_{0,\Omega} \|(T^* - T_h^*)|_{M(\lambda^*)}\|_{0,\Omega} \quad (3.7)$$

$$|\lambda - \lambda_h| \lesssim \left\{ \sum_{n,i=j}^{j+q-1} |\langle (T - T_h)\varphi_i, \varphi_l^* \rangle| + \|(T - T_h)|_{M(\lambda)}\|_{0,\Omega} \|(T^* - T_h^*)|_{M(\lambda)}\|_{0,\Omega} \right\}^{1/\alpha} \quad (3.8)$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \lesssim \|(T - T_h)|_{M(\lambda)}\|_{0,\Omega}^{1/\alpha} \quad (3.9)$$

其中 $\{\varphi_i\}_{i=j}^{j+q-1}$ 是 $M(\lambda)$ 的基, $\{\varphi_l^*\}_{l=j}^{j+q-1}$ 是对偶基.

从定理2.1和定理2.2,可以推断出

$$\begin{aligned} \|(T - T_h)|_{M(\lambda)}\|_{0,\Omega} &= \sup_{f \in M(\lambda), \|f\|_{0,\Omega}=1} \|Tf - T_h f\|_{0,\Omega} \\ &\lesssim \sup_{f \in M(\lambda), \|f\|_{0,\Omega}=1} h^{2r} p^{1-2r} \|Tf\|_{r+1,\Omega} \end{aligned} \quad (3.10)$$

同理可得

$$\|(T^* - T_h^*)|_{M(\lambda)}\|_{0,\Omega} \lesssim \sup_{f \in M(\lambda), \|f\|_{0,\Omega}=1} h^{2r} p^{1-2r} \|T^* f\|_{r+1,\Omega} \quad (3.11)$$

将(3.10) 式代入(3.9) 式,可以得到(3.2) 式.

利用算子性质,正则性估计,由伽辽金正交性(2.29) 式和(2.34) 式,可以得到

$$\begin{aligned} \langle (T - T_h)\varphi_i, \varphi_l^* \rangle &= a_h(T\varphi_i - T_h\varphi_i, T^*\varphi_l^*) \\ &= a_h(T\varphi_i - T_h\varphi_i, T^*\varphi_l^* - T_h^*\varphi_l^*) \\ &\lesssim \|T\varphi_i - T_h\varphi_i\|_h \|T^*\varphi_l^* - T_h^*\varphi_l^*\|_h \\ &\lesssim h^r p^{\frac{1}{2}-r} \|T\varphi_i\|_{r+1} h^r p^{\frac{1}{2}-r} \|T^*\varphi_l^*\|_{r+1} \\ &\lesssim h^{2r} p^{1-2r} \end{aligned} \quad (3.12)$$

将(3.10) 式,(3.11) 式和(3.12) 式代入(3.8) 式,可以得到(3.1) 式.

由于 $u = \lambda T u$ 和 $u_h = \lambda_h T_h u_h$,利用三角不等式,(2.58) 式,(3.1) 式和(3.2) 式可以推导出

$$\left| \|u - u_h\|_h - \|u - \lambda T_h u\|_h \right| \lesssim \|u_h - \lambda T_h u\|_h = \|T_h(\lambda_h u_h - \lambda u)\|_h \lesssim \|\lambda_h u_h - \lambda u\|_{0,\Omega} \lesssim h^{\frac{2r}{\alpha}} p^{\frac{1-2r}{\alpha}} \quad (3.13)$$

由(2.45) 式和(2.46) 式得到

$$\|u - \lambda T_h u\|_h = \|\lambda T u - \lambda T_h u\|_h \leq \lambda \|T u - T_h u\|_h \lesssim \inf_{v_h \in V_h} \|T u - v_h\|_h \lesssim \|u - u_h\|_h \lesssim h^r p^{\frac{1}{2}-r} \tag{3.14}$$

由(3.13) 式和(3.14) 式得到(3.3) 式。

当 $\alpha = 1$ 时, 由(2.45) 式和(2.54) 式得到

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \lesssim \|T u - T_h u\|_{0,\Omega} \lesssim h^r p^{\frac{1}{2}-r} \|T u - T_h u\|_h \lesssim h^r p^{\frac{1}{2}-r} \inf_{v_h \in V_h} \|T u - v_h\|_h \lesssim h^r p^{\frac{1}{2}-r} \|u - u_h\|_h$$

从而得到(3.5) 式,证明完成。

3.2. 数值实验

在本节中, 将报告一些数值实验, 以此来证明我们方法的有效性。考虑问题(2.1), 其中取 $\mathbf{r} = (0, 0)^T, \mathbf{r} = (1, 1)^T, \mathbf{r} = (3, 0)^T, c = 0$ 。我们的程序是在iFEM 软件包下编译的, 我们使用LDG方法其中参数 $b = (0, 0)^T, \eta = 10$ 来进行计算。考虑以下三个测试域: L形域 $\Omega_L = (-1, 1)^2 \setminus ([0, 1] \times (-1, 0])$, 方形域 Ω_S 且顶点为 $(0, 1), (0, 0), (1, 0), (1, 1)$, 裂缝结构域 $\Omega_{SL} = (-1, 1)^2 \setminus \{0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ 。由于确切的特征值是未知的, 我们在L形域中取参考特征值 $\lambda_1 = |\mathbf{r}|^2/4 + 9.63972384472$; 在S形域中取参考特征值 $\lambda_1 = |\mathbf{r}|^2/4 + 19.7392088022$; 在裂缝结构域 Ω_{SL} 中取参考特征值 $\lambda_1 = |\mathbf{r}|^2/4 + 8.3713297112$ 。从表 1,表 2 和表 3 中, 我们可以看出来, 该算法能达到最优收敛阶数。

Table 1. When $\mathbf{r} = (0, 0)^T$, the eigenvalue numerical solution results for regions $\Omega_L, \Omega_S, \Omega_{SL}$

表 1. 当 $\mathbf{r} = (0, 0)^T$ 时, 关于区域 $\Omega_L, \Omega_S, \Omega_{SL}$ 的特征值数值解结果

Domain	P	h = 1/2			h = 1/4		
		λ_1	Error	dof	λ_1	Error	dof
Ω_L	4	9.65607248	1.6349E-02	360	9.64618648	6.4626E-03	1440
	7	9.64425294	4.5291E-03	864	9.64152211	1.7983E-03	3456
	9	9.64221059	2.4867E-03	1320	9.64069696	9.7312E-04	5280
	11	9.64040331	6.7947E-04	1872	9.64052686	8.0302E-04	7488
Domain	P	h = 1/2			h = 1/4		
		λ_1	Error	dof	λ_1	Error	dof
Ω_S	4	19.7402270029	1.0182E-03	120	19.7392134429	4.6408E-06	480
	5	19.7392303409	2.1539E-05	168	19.7392088300	2.7900E-08	672
	6	19.7392091260	3.2390E-07	224	19.7392089726	1.7050E-07	896
	9	19.7392088134	1.1300E-08	440	19.7392082646	5.3750E-07	1760
Domain	P	h = 1/2			h = 1/4		
		λ_1	Error	dof	λ_1	Error	dof
Ω_{SL}	4	8.43474906	6.3419E-02	480	8.40297669	3.1647E-02	1920
	7	8.39630057	2.4971E-02	1152	8.38380747	1.2478E-02	4608
	9	8.38729272	1.5963E-02	1760	8.37929518	7.9655E-03	7040
	10	8.38384381	1.2514E-02	2112	8.37780816	6.4785E-03	8448

Table 2. When $\mathbf{r} = (1, 1)^T$, the eigenvalue numerical solution results for regions $\Omega_L, \Omega_S, \Omega_{SL}$ 表 2. 当 $\mathbf{r} = (1, 1)^T$ 时, 关于区域 $\Omega_L, \Omega_S, \Omega_{SL}$ 的特征值数值解结果

Domain	P	h = 1/2			h = 1/4		
		λ_1	Error	dof	λ_1	Error	dof
Ω_L	4	10.1560247	1.6301E-02	360	10.1461867	6.4629E-03	1440
	7	10.1442395	4.5157E-03	864	10.1415201	1.7963E-03	3456
	9	10.1421945	2.4707E-03	1320	10.1407004	9.7660E-04	5280
	10	10.1416181	1.8943E-03	1584	10.1411084	1.3846E-03	6336
Domain	P	h = 1/2			h = 1/4		
		λ_1	Error	dof	λ_1	Error	dof
Ω_S	4	20.2392882231	7.9421E-05	120	20.2391975052	1.1297E-05	480
	5	20.2391743782	3.4424E-05	168	20.2392081676	6.3460E-07	672
	6	20.2392084724	3.2980E-07	224	20.2392091838	3.8160E-07	896
	7	20.2392080677	7.3450E-07	288	20.2392087612	4.1000E-08	1152
Domain	P	h = 1/2			h = 1/4		
		λ_1	Error	dof	λ_1	Error	dof
Ω_{SL}	4	8.93497578	6.3646E-02	480	8.90306679	3.1737E-02	1920
	6	8.90402362	3.2694E-02	896	8.88764719	1.6317E-02	3584
	9	8.88727794	1.5948E-02	1760	8.87976956	8.4399E-03	7040
	11	8.88433879	1.3009E-02	2496	8.87920615	7.8764E-03	9984

Table 3. When $\mathbf{r} = (3, 0)^T$, the eigenvalue numerical solution results for regions $\Omega_L, \Omega_S, \Omega_{SL}$ 表 3. 当 $\mathbf{r} = (3, 0)^T$ 时, 关于区域 $\Omega_L, \Omega_S, \Omega_{SL}$ 的特征值数值解结果

Domain	P	h = 1/2			h = 1/4		
		λ_1	Error	dof	λ_1	Error	dof
Ω_L	4	11.9073197	1.7596E-02	360	11.8964264	6.7026E-03	1440
	6	11.8966198	6.8960E-03	672	11.8923849	2.6611E-03	2688
	8	11.8931319	3.4081E-03	1080	11.8908573	1.1335E-03	4320
	10	11.8920620	2.3382E-03	1584	11.8907964	1.0726E-03	7488
Domain	P	h = 1/2			h = 1/4		
		λ_1	Error	dof	λ_1	Error	dof
Ω_S	4	21.9881538411	1.0550E-03	120	21.9891653747	4.3427E-05	480
	5	21.9891184389	9.0363E-05	168	21.9892078649	9.3730E-07	672
	7	21.9892094933	6.9110E-07	288	21.9892078292	9.7300E-07	1152
	10	21.9892088301	2.7900E-08	528	21.9892084674	3.3480E-07	2112
Domain	P	h = 1/2			h = 1/4		
		λ_1	Error	dof	λ_1	Error	dof
Ω_{SL}	4	10.6867156	6.5386E-02	480	10.6534231	3.2093E-02	1920
	6	10.6545793	3.3250E-02	896	10.6377797	1.6450E-02	3584
	8	10.6413591	2.0029E-02	1440	10.6319249	1.0595E-02	5760
	11	10.6361897	1.4860E-02	2496	10.6289649	7.6352E-03	9984

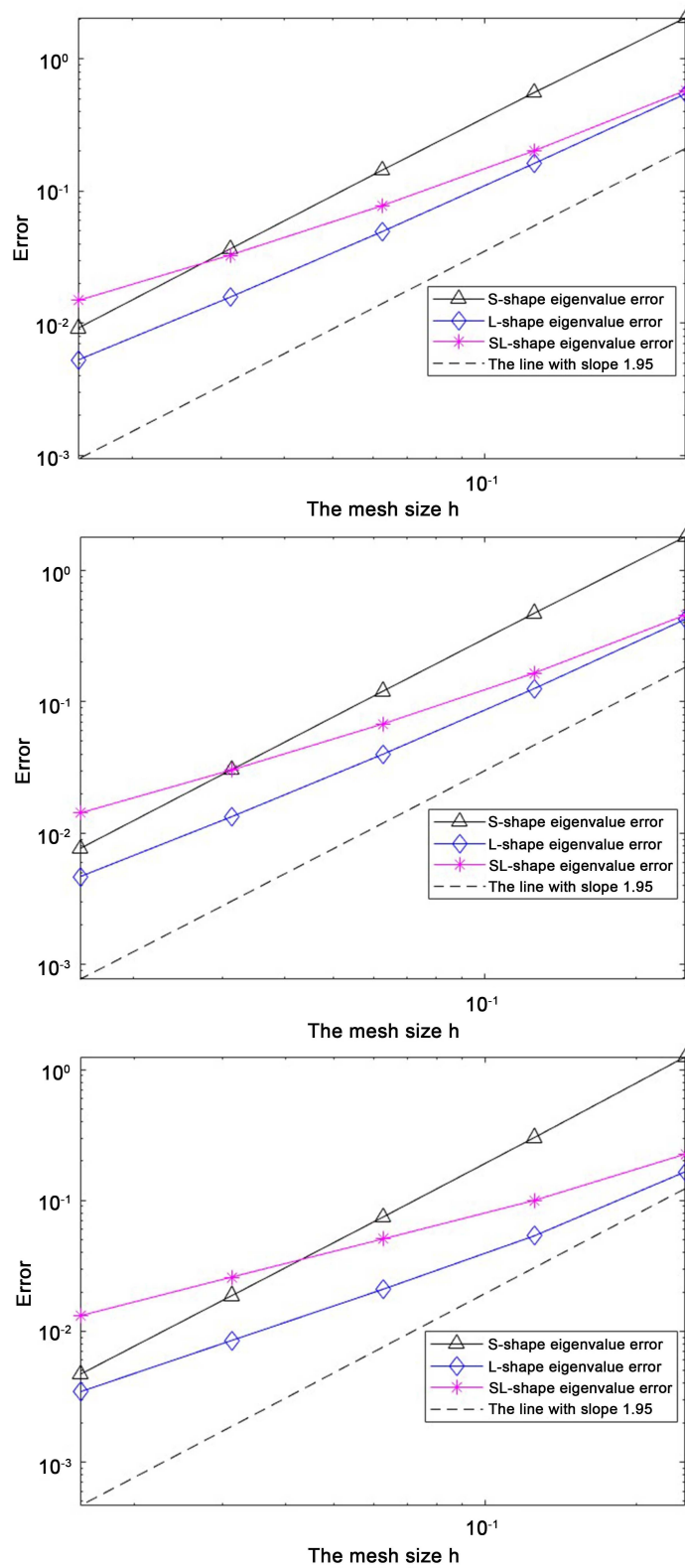


Figure 1. When $\mathbf{r} = (0, 0)^T, \mathbf{r} = (1, 1)^T, \mathbf{r} = (3, 0)^T$, error curve of primary eigenvalues

图 1. 当 $\mathbf{r} = (0, 0)^T$ 时(上), 当 $\mathbf{r} = (1, 1)^T$ 时(中), 图(c) 当 $\mathbf{r} = (3, 0)^T$ 时(下), 一次元特征值的误差曲线图

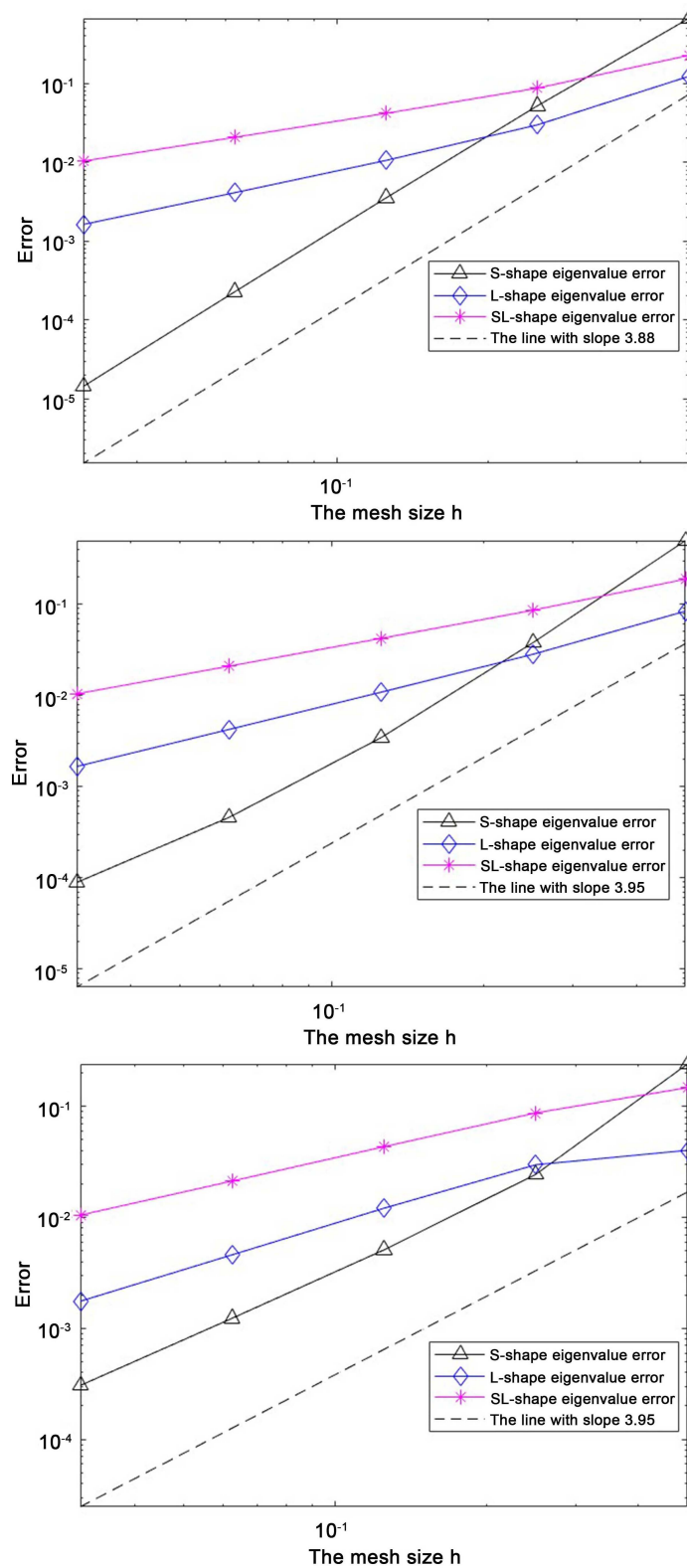


Figure 2. When $\mathbf{r} = (0, 0)^T$, $\mathbf{r} = (1, 1)^T$, $\mathbf{r} = (3, 0)^T$, error curve of quadratic eigenvalues

图 2. 当 $\mathbf{r} = (0, 0)^T$ 时(上), 当 $\mathbf{r} = (1, 1)^T$ 时(中), 图(c) 当 $\mathbf{r} = (3, 0)^T$ 时(下), 二次元特征值的误差曲线图

4. 结论

对流扩散方程在现实问题中有广泛的应用, 本文给出了求解对流扩散特征值问题的局部不连续伽辽金方法, 首先就是需要推导出方程的先验误差估计, 其中最重要的就是证明出离散解算子 T_h 在 $L^2(\Omega)$ 中的范数意义收敛于狄利克雷解算子 T , 即 $\|T - T_h\|_{0,\Omega} = 0$. 最后我们通过局部不连续伽辽金方法进行数值实验得到了特征值数值解结果, 从误差曲线图和表中数值结果中可以看出, 我们的方法可以实现特征值的最优收敛阶, 得到特征值函数的最优阶误差估计, 该数值实验表明了该算法的有效性. 因此, 对于流体力学问题, 该方法有着较强的应用价值.

基金项目

贵州师范大学学术新苗基金(黔师新苗[2021]A01)。

参考文献

- [1] 曾晓艳, 陈建业, 孙乐林. 对流扩散方程的一种新型差分格式[J]. 数学杂志, 2003, 23(1): 37-42.
- [2] Li, Y., Bi, H. and Yang, Y. (2022) The a Priori and a Posteriori Error Estimates of DG Method for the Steklov Eigenvalue Problem in Inverse Scattering. *Journal of Scientific Computing*, **91**, Article No. 20. <https://doi.org/10.1007/s10915-022-01787-x>
- [3] 杨凯丽, 何斯日古楞, 肖宇宇. 对流扩散方程的三次有限体积元法[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2021, 52(3): 250-256.
- [4] 胡学佳, 玉林, 王桂霞, 王雅楠. 变系数对流扩散方程的变限积分法[J]. 内蒙古农业大学学报(自然科学版), 2022, 43(4): 108-113.
- [5] 刘利斌, 徐磊, 包小兵. 二维奇异摄动对流扩散方程的自适应移动网格算法[J]. 纯粹数学与应用数学, 2023, 39(2): 199-213.
- [6] 杜莹玉, 韩家宇. 对流扩散特征值问题的Crouzeix-Raviart元二网格离散方案[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2021, 39(6): 8-12.
- [7] 彭忠兰. 对流扩散特征值问题的一种多水平校正方法[D]: [硕士学位论文]. 贵阳: 贵州师范大学, 2016.
- [8] Herbert, E. and Christian, W. (2013) *hp* Analysis of a Hybrid DG Method for Stokes Flow. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **33**, 687-721. <https://doi.org/10.1093/imanum/drs018>
- [9] Wihler, T.P. and Rivière, B. (2011) Discontinuous Galerkin Methods for Second-Order Elliptic PDE with Low-Regularity Solutions. *Journal of Scientific Computing*, **46**, 151-165. <https://doi.org/10.1007/s10915-010-9387-9>

-
- [10] Perugia, I. and Schötzau, D. (2003) The hp -Local Discontinuous Galerkin Method for low-Frequency Time-Harmonic Maxwell Equations. *Mathematics of Computation*, **72**, 1179-1214. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-02-01471-0>
- [11] Babuška, I. and Osborn, J.E. (1991) Eigenvalue Problems. In: Ciarlet, P.G. and Lions, J.L., Eds., *Finite Element Methods (Part I). Handbook of Numerical Analysis*, Vol. 2, Elsevier Science Publishers, North Holland, 641-787. [https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(05\)80042-0](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(05)80042-0)