Discussion on Implication Relation

Runguang Huang

Shenzhen Nantian Power Plant, Shenzhen, China
Email: scamperhrg@126.com

Received: Aug. 4th, 2020, published:Aug. 7th, 2020

Abstract

Implication relationship can only be based on the connotation of the relationship between concepts, rather than a pure logic problem. This paper discusses implication relations from three angles: (1) Falsified socialist, (2) the propositional variable equation, (3) Wayne figure or set theory.

Keywords

Implication Relationship, Falsified Socialist, Propositional Variable Equation, Wayne Figure, Possibility of the World

有关蕴涵关系的探讨

黄汝广

深圳南天电力，深圳，中国
Email: scamperhrg@126.com

收稿日期：2020年8月4日；发布日期：2020年8月7日

摘　要

蕴涵关系只能是基于概念间的内涵联系，而不是一个纯逻辑学问题。本文从三个角度论述蕴涵关系：**(1)** 证伪主义，**(2)** 命题变元方程，**(3)** 韦恩图或集合论。

关键词

蕴涵关系，证伪主义，命题变元方程，韦恩图，可能性世界

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51026. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 4 August 2020, publ: 7 August 2020

1. 引言

蕴涵式$P \to Q$等值于$\sim P \vee Q$，是现今最流行的一种定义，这种实质蕴涵一般被归于弗雷格的贡献，但更早据说可以追溯至古希腊的斯多葛学派。很显然，实质蕴涵定义满足蕴涵关系的最起码要求，也即不对称性，并且一般认为在简单性方面胜过其它蕴涵定义。然而，也正是因为其简单性，才导致了一些所谓的实质蕴涵怪论，比如$P \to (Q \to P)$，$\sim P \to (P \to Q)$等。

对此，逻辑界有截然相反的态度：一是认为违反了人们的直觉和常识，难以接受，需要改造；二是承认有问题，却认为没有改造的必要。在后者中，塔尔斯基甚至认为，有关的批评没有什么充分根据，并声称：“正是在这个简单的实质蕴涵上面的逻辑学，已被证明是最复杂精细的数学推理的满意基础。”[1]

笔者认为蕴涵关系并不是一个纯逻辑学问题，而应该基于概念间的内涵关系，下面从三个角度进行探讨。

2. 从证伪主义角度看蕴涵关系

我们知道，现代逻辑中蕴涵关系“$P \to Q$”的真值，仅仅是根据命题P与Q的真值进行的一个约定，而命题P与Q的真值，却是根据其描述是否与事实相符来确定的。很显然，这两种真值在本质上是完全不同的，但却都被赋予了相同的“1”与“0”，这种不当的混淆，虽然简化了问题，但却是所谓蕴涵怪论的根源。

笔者认为，蕴涵关系“$P \to Q$”，应该被定义为省略了具体推导过程的有效推理或证明，其真正的作用在于实现命题P与Q之间真值的传递：如果命题P真，则命题Q必然真。按照此定义，蕴涵关系“$P \to Q$”的有效推理仅有一种形式，即肯定前件式“$P \to Q$，P，故Q”；只有在承认矛盾律与排中律的前提条件下，否定后件式“$P \to Q$，$\sim Q$，故$\sim P$”才是有效推理，这其实就是反证法。

当然，以矛盾律与排中律为前提，蕴涵关系“$P \to Q$”与其逆否形式“$\sim Q \to \sim P$”也是等价的，它们各自在命题P与Q之间，所能实现的真值传递如下表1 (其中“i”表示不确定，即真值可能为1，也可能为0)。由此表可见，蕴涵关系只能实现命题之间的同值传递(正向具有保真性，逆否具有保假性)，并且“如果”两字表明了前件真是假设，只是一种可能性，与事实上的真假无关，可能性与现实性是不可以混淆的。

Table 1. The transfer of truth value that implication relation can realize
表 1. 蕴涵关系所能实现的真值传递

$P \to Q$		$\sim Q \to \sim P$	
P	Q	$\sim Q$	$\sim P$
0	i	1	i
1	1	0	0

实际上，古德曼所谓的“反事实条件句难题”，根源就在于没有区分现实世界与可能世界：所谓“反事实”，只不过是一种不同于现实世界的选择可能性，而在这个可能世界里，“反事实”恰恰是“事实”。当然，蕴涵关系是可以用于现实世界进行有效推理的，但必须保证前件现实上也是真的，否则就会犯否定前件谬误，导致所谓的假命题蕴涵真命题的怪论。

与传统定义相比，新定义的蕴涵关系“$P \to Q$”之成立，完全取决于那被省略了的具体证明过程，

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51026. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 4 August 2020, publ: 7 August 2020

而不是取决于命题 P 与 Q 的真值。如果证明并非被省略，而是根本不存在或者还没被发现，那么“$P \to Q$”本身就只能看作是一个假设：也即猜想 P 与 Q 可能存在某种必然的逻辑关系，这在科学研究上也是很常用的方法。

当然，仅从命题 P 与 Q 的真值出发，也可对一个假设的蕴涵关系 $P \to Q$ 进行研究，但是它只能被证伪，而不能被证实。这是完全符合波普尔证伪主义的，具体见表 2，其中“0”表示被证伪，“i”表示不确定，即假设的蕴涵关系可能成立，也可能不成立。

Table 2. According to the truth value of the proposition, the implication of the hypothesis can only be falsified
表 2. 根据命题真值，假设的蕴涵关系只能被证伪

P	Q	$P \to Q$	$\sim Q \to \sim P$
0	0	i	i
0	1	i	i
1	0	0	0
1	1	i	i

本质上，蕴涵式 $P \to Q$ 只不过是对各学科定理或假设的一个形式抽象，但一个具体蕴涵关系的确定，比如一个数学定理，是基于概念之间的内涵关系，纯逻辑学无能为力。因此，在形式逻辑学的推理模式中，$P \to Q$ 只应当作为前提，而不能作为结论。认识到这一点，就容易明白：诸如“$\sim P \to (P \to Q)$”之类，其实是毫无意义的，有关的怪论自然也就被排除了。

3. 从命题变元方程的角度看蕴涵关系

从历史上讲，在弗雷格重提“实质蕴涵”定义之前，麦柯尔就已经提出过一种“强蕴涵”定义，即“$P \wedge Q = P$”：一般将其解释为，Q 的含义是包含在 P 的含义之中的。由于在布尔代数中，“$P \wedge Q = P$”，“$P \vee Q = Q$”，“$\sim P \vee Q = 1$”与“$P \wedge \sim Q = 0$”这四个等式是等价的，因此莫绍揆先生给出如下定义：两命题 P 与 Q，如果满足上述四个等式之一，便说 P 蕴涵 Q，记作 $P \to Q$。[2]

我们注意到，由于“$P \wedge Q = P$”与“$\sim P \vee Q = 1$”等价，如果麦柯尔蕴涵直接用“$\sim P \vee Q = 1$”定义，并且为方便而简记为“$\sim P \vee Q$”，则麦柯尔蕴涵就退化为实质蕴涵了。但是从纯真值角度来看，麦柯尔蕴涵与实质蕴涵的真值表完全相同，似乎还不能称之为“强蕴涵”，这里的关键其实就在于等式。

由于麦柯尔蕴涵是一个等式，它能更好地体现蕴涵的“相关”之义：“$\sim P \vee Q = 1$”其实就是一个二元布尔代数方程，其中 P 与 Q 表示命题变元，它们间的相互关系正是通过上述方程来体现的。此外，把 P 与 Q 看作命题变元，也更能体现逻辑学注重形式而非内容的特点。

同时，等式还有另一个好处，即莫绍揆先生所说：“在布尔代数中，等式是不能相互嵌套的，即 $(P = Q) = R$，$P = (Q = R)$ 这类式子是不讨论的。因为蕴涵式实际上是一个等式，故蕴涵式也是不能互相嵌套的。”所以，“$P \to (Q \to P)$”之类是不合法的，真命题为任一命题所蕴涵的怪论就可以消除了；这种连锁形式所导致的怪论，其根源正在于实质蕴涵的“简单性”。然而蕴涵式不可以互相嵌套的法则，并不能排除一切怪论。

事实上，麦柯尔的“强蕴涵”定义还不够强，他应该把等式改为恒等式，也即“$P \wedge Q \equiv P$”，“$P \vee Q \equiv Q$”，“$\sim P \vee Q \equiv 1$”或“$P \wedge \sim Q \equiv 0$”；注意，这里的恒等式并不是基于真值表，而是基于 P 与 Q 的内涵关系。如此一来，麦柯尔蕴涵与实质蕴涵的区别就显而易见了，因为上述恒等式无法由真

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51026. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 4 August 2020, publ: 7 August 2020

值表得出，其成立与否取决于命题 P 与 Q 所关系的具体学科，纯逻辑学无能为力(只有当 $Q=P$ 时，由排中律“$\sim P\vee P\equiv 1$”或矛盾律“$P\wedge\sim P\equiv 0$”可得“$P\to P$”，这是唯一一个由纯逻辑定律决定的蕴涵式，但也只是一个同义反复而已)。总之，蕴涵的恒等式定义既避免了与实质蕴涵的混淆，又可以保留蕴涵式不能嵌套的法则。

很显然，按照上述定义，“$P\to Q$”与“$\sim Q\to\sim P$”都对应恒等方程“$\sim P\vee Q\equiv 1$”，因而它们是等价的。那么，我们再看假言推理的两个有效式“$P\to Q$，P，故 Q”与“$P\to Q$，$\sim Q$，故$\sim P$”，它们实际上就是解方程的过程：前者对应“把 $P=1$ 代入方程 $\sim P\vee Q\equiv 1$，解得 $Q=1$”，后者对应“把 $Q=0$ 代入方程 $\sim P\vee Q\equiv 1$，解得 $P=0$”。当然，如果把 $P=0$ 或 $Q=1$ 代入方程 $\sim P\vee Q\equiv 1$，则解不唯一确定，对应的正是假言推理的无效形式。

此外需要注意，在方程“$\sim P\vee Q\equiv 1$”中，P 是既可以真也可以假，或者换句话说，如果没有具体的体系背景，P 是无所谓真假的：比如“三角形内角和等于 180 度”在欧氏几何中为真，但在非欧几何中为假；再比如“贝克汉姆是英国人”在我们这个现实世界为真，但也可以想象它在一个平行宇宙的可能世界中为假(其实这种想象或假设，正是“如果”一词的真正含义所在)。简而言之，对于一个满足蕴涵关系“若 P 则 Q”的体系，P 在该体系中却未必真。

比如，一个体系如果满足蕴涵关系 $\sim Q\wedge P\to Q$，则在该体系中 $\sim Q\wedge P\equiv 0$，否则将违反矛盾律，这正是一种常用的反证法形式。但需要注意的是，“$\sim Q\wedge P\equiv 0$”的逻辑结论应该是“若 P 则 Q”而非“Q”，只有当 P 也确定为真时，才必然得出 Q 真的结论。如果 P 并不是公理或已被证明的定理，而只是某人突发奇想的一个所谓新方法，并且很不幸的是该方法实际上不成立，那么 Q 也就不必然成立了。在反证法中，这是常犯的一种错误，最有名的即康托尔的对角线反证法。

4. 集合论的角度看蕴涵关系

莱布尼兹认为：所有命题都是或都可以还原为主词-谓词形式(或许这就是谓词逻辑的源头？)，而真命题就是一个主词概念包含谓词概念的命题。[3]尽管莱布尼兹这个论断或许值得商榷，但它确实有诱惑力，因为如此一来，我们原则上只需探讨主谓形式的命题就可以了。

主谓形式命题“x 是 P”可用 $P(x)$表示，那么蕴涵式 $P(x)\to Q(x)$ 的含义即：如果 x 是 P，则 x 是 Q；为了方便，可简记为 $P\to Q$。现在我们定义集合 $P=\{x\mid x\in U 且 P(x)\}$，$Q=\{x\mid x\in U 且 Q(x)\}$，那么，蕴涵关系“$P\to Q$”可基于集合的外延而定义为“$P$，$Q$”，并且容易验证，“$P\wedge Q=P$”，“$P\vee Q=Q$”，“$\sim P\vee Q=U$”，以及“$P\wedge\sim Q=\varnothing$”，均与之等价。(其中，集合 P 与 Q 的定义之所以强调 $x\in U$，是因为只有明确了个体的论域也即全集 U，补集$\sim P$ 与$\sim Q$ 才是有意义的)。

同时，“P，Q”还表示命题“所有 P 是 Q”，如此一来，蕴涵式“$P\to Q$”就可还原为一个有效三段论：P，Q，如果 $x\in P$，则 $x\in Q$；其中大前提 P，Q，正是蕴涵式 $P\to Q$ 的本质所在。反之，那些不能还原为有效三段论的“若 P 则 Q”都不是蕴涵式。由于有效三段论只能有三个概念，而“$P(x)\to Q(y)$”还原为三段论必然犯四概念错误，因此不可能是蕴涵式。当然，像“如果猪会上树，那么太阳从西边升起”这类表述，在日常生活中也很常见，但这只是一种用来强调不可能性的修辞手法，并非蕴涵式。

不过，“$P\to Q$”还原为三段论的大前提“P，Q”，通常是默认并省略的：比如“如果贝克汉姆是英国首相，那么贝克汉姆是英国人”，其大前提即现实世界中英国的有关法律规定——英国首相必须是英国人，但被省略了。假设在另外一个平行宇宙的可能世界中，这个大前提并不成立，则“如果贝克汉姆是英国首相，那么贝克汉姆是英国人”也就不再是蕴涵式了。所以，蕴涵关系的关键在于被省略的大前提，而不是前后件的真假值。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51026. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 4 August 2020, publ: 7 August 2020

但是，如果大前提只是一个假设，也即基于一个可能世界而非现实世界，则不可省略。比如“如果所有的凤凰是美丽的，那么有的凤凰是美丽的”，大前提“所有的凤凰是美丽的”正是基于一个可能世界而言的，小前提“有的凤凰是凤凰”则被省略了。然而，有人认为这并不是一个蕴涵式，因为“所有的凤凰是美丽的”是真命题，而“有的凤凰是美丽的”是假命题。

这种错误认识的根源，正在于把可能世界与现实世界混淆了：“有的凤凰是美丽的”之所以被认为假命题，是基于现实世界中不存在凤凰，而不是基于一个存在凤凰的可能世界；这样，大前提与小前提就不是针对的同一个世界了，而在不同的世界中，同一个句子所表述的命题的真假可能完全相反，广义上讲这也是一种隐形的四概念错误。换句话说，一个句子本身是无所谓真假的，其真假只能是基于一个具体模型或世界；至于在公理体系中证明一个命题为真，实际上是预先假设了一个所有公理为真的模型或世界。

当然，有人辩解说，“所有的凤凰是美丽的”为真也同样是基于现实世界，而非可能世界，不存在什么隐形的四概念错误。但是，如果这种辩解成立，那就意味着：在现实世界中，“有的凤凰”表示存在凤凰，而“所有的凤凰”却不表示存在凤凰，否则“所有的凤凰是美丽的”也应是假命题。然而一个不争的事实是，“有的凤凰”只不过是“所有的凤凰”的一个子集，如果“有的”表示存在，“所有的”却不表示存在，岂不成了空集的子集反倒是非空集？

关于所谓的空集，笔者认为它实际上是一个真类，而不是集合。根据塔尔斯基的定义[4]：空类 $\varnothing=\{x\,|\,x\neq x\}$，其内涵即“不存在任何违反同一律的对象”；而全类 $U^{*}=\{x\,|\,x=x\}$，其内涵即“所有的对象均满足同一律”。由于“不存在任何违反同一律的对象”与“所有对象均满足同一律”是等价命题，空类与全类在内涵意义上当然也是等价的；又由于全类是真类，那么与之内涵等价的空类也理应是真类(特别地，假如“所有的”不表存在，则有可能 $U^{*}=\varnothing$)。因此，集合只能是非空类，自然，空类也不可能是任何集合的子集，亚里士多德只讨论非空类实在是有先见之明。

从外延上看，空类即没有任何元素的类，似乎没有歧义，但从内涵上讲，却是有歧义的：因为，任何一个具体矛盾都定义了一个空类，而不同矛盾的内涵是不同的，所以，无穷多的矛盾就定义了无穷多内涵上不同的空类。然而，现代集合论却基于外延认为空类只有一个，这就把不同内涵的空类混而为一了，容易导致无意识中偷换概念的问题。

在现代数理逻辑学中，“$\varnothing$‘ A”被解读为：A 为真是无条件的，所以 A 是重言式；很显然，这里是从外延上，把 $\varnothing$ 解读为了不需要任何条件。但从内涵上讲，$\varnothing$ 意味着矛盾，“$\varnothing$‘ A”应解读为：A 为真所需要的条件不可能满足，所以 A 是矛盾式；换句话说，矛盾最终必然推出矛盾。

然而现代逻辑学却认为，矛盾可以推出一切。我们知道，欧氏几何与罗氏几何的平行公设是矛盾的，假设把罗氏几平行公设也加入欧氏几何形成所谓欧罗几何，很显然这是一个矛盾的体系，由此矛盾体系，既可以推出欧式几何定理“三角形内角和大于两直角”，也可以推出罗氏几何定理“三角形内角和小于两直角”，但决不可能推出黎曼几何特有的定理“三角形内角和大于两直角”。因此，矛盾必然可以推出矛盾，但是不可能推出一切。

当然，有些书上也把“$P\to Q$”记作“P，Q”，这应该从内涵上来理解，即 P 概念的内涵包含了 Q 概念的内涵。实际上，莱布尼兹早就意识到了命题从内涵与外延角度进行解释时的不同，并且基于一切命题都可还原为主谓形式的观点，而赞同内涵解释。

笔者之所以基于外延将“$P\to Q$”定义为“P，Q”，只是因为这样更具直观性，方便解决一些蕴涵怪论。按照该定义：$P\to(Q\to P)$ 与 $\sim P\to(P\to Q)$，即 P，$(Q$，$P)$ 与 $\sim P$，$(P$，$Q)$，完全是没有意

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51026. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 4 August 2020, publ: 7 August 2020

义的；$(p \to q) \vee (q \to p)$，即$(p, q) \vee (q, p)$，很容易找到反例；$Q \to (P \vee \sim P)$，即Q，U，似乎不存在问题，但是如果P与Q论域完全不同，Q与U可能根本没有什么关系；$(P \wedge \sim P) \to Q$，即$\varnothing$，Q，当然也存在P与Q论域完全不同的问题，而且按照我们前面的讨论，$\varnothing$是真类，它不可能是任何集合的子集。

最后，把“$P \to Q$”定义为“P，Q”，与概率论中“蕴含”的定义是一致的[5]：“在同一试验下的两个事件A和B，如果当A发生时B必发生，则称A蕴含B，或者说B包含A，记为A，B。”一个事件A发生，换种说法，其实即描述事件A的命题A为真。

5. 论

本质上讲，蕴涵式通常是一个省略了大前提的三段论推理，而这被省略的大前提恰恰是整个蕴涵式的核心所在，因为正是它体现了P与Q之间的一种约束关系，即当P真时Q必然真(基于可能世界)，至于它们自身实际上是真是假却无关紧要(基于现实世界)。然而，实质蕴涵的定义却只考虑P与Q的真值(基于现实世界)，完全抹杀了推理的前提及过程，这正是导致诸多实质蕴涵怪论的一个重要根源。实际上，我们通常所谓的蕴涵关系都有“推出”的含义，而实质蕴涵所定义的“$\to$”只不过是一个连接词，根本没有“推出”这一含义，但现代逻辑学却偏偏又把实质蕴涵的所谓重言式都视为有效推理模式，这就把“推出”含义强加于单纯的连接词“$\to$”了；或者换句话说，“$\sim P \vee Q$”基于布尔逻辑的真值约定为真，仅仅是通常蕴涵关系“$P \to Q$”的一个必要条件，而不是充要条件。

我们知道，塔尔斯基曾声称：“正是在这个简单的实质蕴涵上面的逻辑学，已被证明是最复杂精细的数学推理的满意基础。”这其实是塔尔斯基自作多情，因为真正的数学推理都是基于公理及概念间的内涵关系，与纯粹基于真假值的实质蕴涵没有任何关系。一个最基本的事实是，在数学上如果“若P则$\to$”为真，那么它就是一个定理，而定理必须要有一个证明，通常无法仅由P及Q的真假来判定。

当然，概念间的关系未必都是主谓形式的，此时“若P则Q”背后隐藏的大前提可能就不是显而易见的了，比如开普勒三定律背后所隐藏的万有引力定律。事实上，满足一个“若P则Q”的大前提可能不止一个，并且很多时候都是基于猜想，此时，科学研究的一个重要任务就是通过实验排除那些与实验不符的猜想，这正是所谓的证伪主义。

致　谢

感谢徐明良、樊毅等朋友，本文从与他们的讨论以及还未发表的文稿中受益匪浅。

参考文献

[1] 张绍友.从蕴涵怪论到日常蕴涵逻辑系统的探索[D].重庆:西南大学,2011.
[2] 莫绍揆.逻辑代数初步[M].江苏人民出版社，1980.
[3] (美)加勒特·汤姆森.莱布尼茨[M].北京：中华书局，2002.
[4] (波兰)塔尔斯基.逻辑与演绎科学方法论导论[M].周礼全,吴允曾,晏成书译.北京:商务印书馆,2011.
[5] 陈希孺.概论论与数理统计[M]..中国科学技术大学出版社,2019.