Creative Education Studies 创新教育研究, 2023, 11(2), 319-323
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2023.112053

从依测度收敛到几乎处处收敛的教学设计探讨

王 文*，周 辉，解大鹏

合肥师范学院数学与统计学院，安徽 合肥

收稿日期：2022年12月20日；录用日期：2023年2月17日；发布日期：2023年2月27日

摘 要

结合教育部对师范专业认证的指标，以及多年从事实变函数的课堂教学经验，本文主要探讨对$mE=\infty$和$mE<\infty$时的依测度收敛的可测函数列，如何逐步引导学生添加合适的条件得到几乎处处收敛。通过此研究有助于引导师范生如何深挖教材，如何通过串联间知识点间的联系设计来试题，从而达到培养师范生教学技能。

关键词

实变函数，依测度收敛，几乎处处收敛，教学改革

Discussion on Teaching Design from Measure Convergence to Almost Everywhere Convergence

Wen Wang*, Hui Zhou, Dapeng Xie

School of Mathematics and Statistics, Hefei Normal University, Hefei Anhui

Received: Dec. 20th, 2022; accepted: Feb. 17th, 2023; published: Feb. 27th, 2023

Abstract

Based on the standards of the Ministry of Education for Teacher Education Certification, and the teaching experience of many years in the classroom, this paper mainly discusses the measurable function series converging with the measure convergence when $mE=\infty$ and $mE<\infty$, how to guide students to add appropriate conditions to derive the almost everywhere convergence. Through this research, it is helpful to guide students of normal university how to dig deep into

*第一作者。

文章引用: 王文, 周辉, 解大鹏. 从依测度收敛到几乎处处收敛的教学设计探讨[J]. 创新教育研究, 2023, 11(2): 319-323.
DOI: 10.12677/ces.2023.112053

teaching materials, how to design test questions by connecting knowledge points in series, so as to train teaching skills of students of normal university.

Keywords

Function of Real Variable, Measure Convergence, Almost Everywhere Convergence, Question Group Reflection Teaching

1. 前言

收敛性是分析学研究的重要内容，也是主要的出发点。在数学分析中主要研究了序列的逐点收敛和一致收敛。到了实变函数课程，进一步扩大了研究范围，探讨了几乎处处收敛、基本上一致收敛、依测度收敛等。叶戈洛夫(EropoB)定理及其逆定理给出了几乎处处收敛与基本上一致收敛的关系。

对于几乎处处收敛和依测度收敛，这两者间有密切的关系，而且我们已经知道这两种收敛是相互独立的，几乎处处收敛的函数列不一定依测度收敛，反过来，依测度收敛的函数列也不一定几乎处处收敛。教材[1]中也给出了两个具体的例子，依测度收敛$\not\Rightarrow$几乎处处收敛(第 62 页例 1)，几乎处处收敛$\not\Rightarrow$依测度收敛(第 63 页例 2)。

但是，两者之间还是有着联系的，数学家 Riesz 和 Lebesgue 分别对两种收敛之间的联系进行深入研究，得到了著名的 Riesz 定理和 Lebesgue 定理。而且，我们看到，当$mE<\infty$时，Lebesgue 定理揭示了函数列几乎处处收敛强于依测度收敛。有关这方面的教学研究也有不少，可参见文献[2] [3] [4] [5]。

本文结合教育部对师范专业认证的指标，以及多年从事实变函数的课堂教学经验，主要探讨对$mE=\infty$和$mE<\infty$时，依测度收敛的函数列能否在合适的条件下得到几乎处处收敛，设计合适的教学过程。并以此问题设计为契机，强调以学生为本，突出学生在课堂的主体地位，并融合翻转课堂教学理念，探索实变函数教学改革问题。这也将有助于引导师范生如何深挖教材，如何通过串联间的联系设计来试题，从而达到培养师范生教学技能。

先回顾可测函数列的几乎处处收敛和依测度收敛的概念。

设$\{f_n(x)\}$，$f(x)$都是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的 a.e.有限的可测函数。

定义 1 [1] (几乎处处收敛) $\exists$集合$Q\subseteq E$满足$m(E\setminus M)=0$，且对$\forall\ x\in M$有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，则称函数列$\{f_n(x)\}$在$E$上 a.e.收敛于$f(x)$。

定义 2 [1] (依测度收敛)对$\forall\ \sigma>0$，有$\lim\limits_{n}mE\left[\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\sigma\right]=0$，则称函数列$\{f_n(x)\}$在$E$上依测度收敛于$f(x)$，记为$f_n(x)\Rightarrow f(x)$。

2. $mE=\infty$时的依测度收敛的可测函数列

设$\{f_n(x)\}$是E上有限可测函数列，下面主要讨论$mE=\infty$时，函数列依测度收敛，是否可以增加适当的条件，就能得到几乎处处收敛。为了让学生更深刻的理解函数列的这两种收敛之间的关系，下面通过问题设计，引导学生思考，逐步达到最终的目的。

设计目标：当 $mE=\infty$ 时，探寻依测度收敛的函数列 $\{f_n(x)\}$ 能否在适当的条件下，得到几乎处处收敛。

设计思路：由 Riesz 定理知道，依测度收敛的函数列，一定存在子列几乎处处收敛。另外，引导同学们回忆数学分析中讲过的函数列收敛与子列收敛之间的关系，那么依测度收敛能否在合适的条件下能导出几乎处处收敛呢？

设计问题：1) 让同学们复习 Riesz 定理：

由函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$，由 Riesz 定理得到存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$。

2) 继续追问：引导学生回忆《数学分析》中的数列收敛与子列收敛之间的关系。

3) 继续引导：数列的一个子列收敛了，能否添加合适的条件推出数列收敛呢？

4) 引导学生想出对单调的函数列满足这样的条件。

5) 这样就顺利的得到了一个很好的结论，对依测度的可测函数列，由 Riesz 定理，一定存在子列几乎处处收敛；再由可测函数列是单调的，即可得到几乎处处收敛。即下面的结论：

例 1：设在可测集 E 上，$f_n(x)\Rightarrow f(x)$，而对任意正整数 n 和 a.e.的 $x\in E$，$f_n(x)\le f_{n+1}(x)$，则 $f_n(x)$ a.e.收敛于 $f(x)$。

6) 下面可以让学生独立根据前面的思路，给出完整的证明过程。

证明过程：因为 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，由 Riesz 定理得，$\exists$ 子列 $\{f_{n_k}(x)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=f(x)\quad \text{a.e.于 } E,$$

即存在 $A_0\subset E$ 使得 $m(E-A_0)=0$，且 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 A_0 上收敛于 $f(x)$。

对 $\forall n\in N^*$，记 $A_n=E[f_n\le f_{n+1}]$，则 $m(E-A_n)=0$。令 $A=\bigcap_{k=0}^{\infty}A_k$，则

$$m(E-A)=m\left(E-\bigcap_{k=0}^{\infty}A_k\right)=m\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}(E-A_k)\right)\le\sum_{k=0}^{\infty}m(E-A_k)=0,$$

且在 A 上 $f_n(x)\le f_{n+1}(x), n=1,2,\cdots$，$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=f(x)$。因此在 A 上，$f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$。于是 $f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$。

教学创新：教学过程中，对班级学生进行分组讨论，通过老师的问题引导，引导学生思考，逐步提问，并在其中的若干问题引入翻转课堂教学，调动学生学习兴趣和活跃课堂的学习氛围，达到学生主动学习探究的良好效果。

3. $mE<\infty$ 时的依测度收敛的可测函数列

根据 Lebesgue 定理可知，当 $mE<\infty$ 时函数列几乎处处收敛强于依测度收敛。那此时依测度收敛的函数列是否可以增加合适的条件，得到几乎处处收敛呢？为了让学生更深刻的理解，设计下面问题，引导学生思考，从而达到最终的目的。

设计目标：当 $mE<\infty$ 时，探寻依测度收敛的函数列 $\{f_n(x)\}$ 能否在适当的条件下，得到几乎处处收敛。

设计思路：引导同学们从数学分析中讲过的数列中单调有界定理出的发，设计构造单调递减的非负函数列，从而逐点收敛；再由 Riesz 定理知道，依测度收敛的函数列，一定存在子列几乎处处收敛；进而根据极限的唯一性和两边夹性质即可得到一个合适的条件。

设计问题：1) 由数列中单调有界定理出的发，设计构造单调递减的非负函数列 $g_n(x)=\sup_{k\ge n}|f_k(x)|$；

2) 假设 $g_n(x) \Rightarrow 0$，由 Riesz 定理得到存在子列 $\{g_{n_k}(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 0；

3) 由极限的唯一性得到 $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$；

4) 由极限的两边夹性质及 $0 \le |f_n(x)| \le g_n(x)$ 即可得几乎处处收敛。这样就可自然的探讨下面问题：

例 2： 设 $mE < \infty$，$\{f_n(x)\}$ 是 E 上有限可测函数列，设 $g_n(x) = \sup\{|f_k(x)| : k \ge n\}$。若 $g_n(x) \Rightarrow 0$，则：$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ a.e.于 E。

5) 下面可以让学生独立根据前面的思路，给出完整的证明过程。

证明过程： 由 $g_n(x) = \sup_{k\ge n} |f_k(x)|$，可得 $\forall x \in E$，

$$g_1(x) \ge g_2(x) \ge \cdots \ge g_2(x) \ge \cdots \ge 0,$$

则 $\{g_n(x)\}$ 在 E 上收敛。又 $g_n(x) \Rightarrow 0$，由 Riesz 定理，存在子集 $E_1 \subseteq E$ 及 $\{g_{n_k}(x)\}$ 使得 $m(E - E_1) = 0$ 且在 E_1 上 $\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(x) = 0$。由极限的唯一性可得 $\forall x \in E_1$，$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$。又 $0 \le |f_n(x)| \le g_n(x)$ $(n \in N)$，两边同时取极限得 $\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = 0, x \in E_1$，所以 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, x \in E_1$。再由 $m(E - E_1) = 0$ 可得 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ a.e.于 E。

教学创新： 教学过程中，通过问题串设计，逐步引导，不断提问，并对学生分组进行讨论，调动学生学习兴趣、活跃课堂的学习氛围，达到学生主动学习探究的良好效果。

4. 教学思考

目前，地方师范院校课程改革的不断深入，以及通识教育的逐步开展，导致专业核心课程的学时不断减少，就实变函数课程而言，学时已经缩减到 56 个学时了。这样，在教学实践中既要能够在规定的学时内完成预定教学内容，又要在课程教学中不断启发学生用数学的逻辑思维方式思考问题、解决问题，同时还要兼顾课程思政元素，很难有多余的时间处理课后习题，更不要说和学生互动。因此，如何解决这些问题值得任课教师深思，这就要求老师对传统的教学模式做出一定的改革。

为了更好地、高效的实施教学，作者结合多年《实变函数》的教学实践和体会，对本校学生开设《实变函数》课程时，采用线上线下混合模式开展教学。如在线下教学过程中，实变函数是数学分析课程的继续，很多知识点和理论是数学分析中知识点的延申，因此在讲授实变函数课程相关知识点前，可以提前把与数学分析相关的内容，或需要用到数学分析中的内容通过学习通发给学生，让学生做好复习。比如在将几乎处处收敛和基本上一致收敛之前，让学生提前复习数学分析中的逐点收敛和一致收敛相关的主要内容和主要定理。此外，对课后习题的处理，挑选部分有代表性的习题在课堂上详细讲解，再布置类似练习作为课后练习。对于剩下的课后习题，一部分采用学习通发布班级分组解决，再相互交流，再分组之间打分，教师打分，计入平时成绩。另外，有些习题的讲解，通过提前录好视频，再发给班级群或学习通，让学生课后自主学习，这样节省了大量的课堂时间。

对实变函数教材[1]中第六章后面的课程，由于课时有限，课堂教学很难完全详细讲解，采用线上教学，还将录好的相关内容的视频通过线上让学生自主学习，通过线上平台记录学生的学习过程，也计入平时成绩考核的范围。这些做法都是为了弥补课堂教学学时不足采取的有效措施。

5. 结束语

教师教学除了传授学术知识和技能，也应该培养学生数学思维方式的归纳迁移能力，从而增强知识点间的相互联系，引导学生的总结和归类知识点间相互渗透的主动意识，这对培养学生创新意识、创新能力，提高学生学习的积极性有着重要的积极作用，才能真正做到创造性地学习。

基金项目

安徽省高校自然科学基金重点项目(KJ2021A0927)，安徽省省级质量工程教学研究项目(重点项目)师范认证背景下实变函数课程的教学改革探究(编号：2021jyxm1224)资助，安徽省高等学校省级教学示范课《实变函数》(编号：2020SJJXSFK1944)。

参考文献

[1] 程其襄, 张奠宙, 胡善文, 薛以锋. 实变函数与泛函分析基础(第四版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[2] 张超, 陈泽泽. 实变理论中关于可测函数列几种相近的收敛性探析[J]. 甘肃高师学报, 2022, 27(5): 1-4.

[3] 崔颖. 关于“依测度收敛”概念教法的探究[J]. 宿州学院学报, 2015, 30(2): 122-124.

[4] 张超, 陈泽泽. 实变理论中关于可测函数列几种相近的收敛性探析[J]. 甘肃高师学报, 2022, 27(5): 1-4.

[5] 续小磊, 续晓欣. 几乎处处收敛、近一致收敛和依测度收敛之间的等价条件研究[J]. 长江大学学报(自然科学版), 2011, 8(10): 10-11, 15.