Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(2), 825-831
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.132079

麦克劳林关于方程实根最大绝对值下界的法则

李　睿

西北大学科学史高等研究院，陕西　西安

收稿日期：2024年1月28日；录用日期：2024年2月22日；发布日期：2024年2月29日

摘　要

18世纪英国数学家麦克劳林对于判定代数方程实根的界限做出了重要贡献，这项工作记载于其著作《代数论》第二部分的第5章中。在该章的最后，麦克劳林直接断言了一条关于方程实根最大绝对值下界的法则，但是作者发现这条法则并不总是成立。按照古证复原的原则，作者对这条法则的构造过程进行了复原，从而澄清了麦克劳林原来的数学思想，指出他的错误在于将分母误认为方程的次数，但实际上它应该是根的两两之积的项数。最后，通过修正他的错误，论文给出了该法则的正确形式。

关键词

麦克劳林，代数方程，实根的界限，法则，复原

Maclaurin's Rule of the Lower Limit of the Maximum Absolute Value of Real Roots of Any Algebraic Equation

Rui Li

Institute for Advanced Study in History of Science, Northwest University, Xi'an Shaanxi

Received: Jan. 28th, 2024; accepted: Feb. 22nd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

British mathematician Maclaurin in the 18th century made an important contribution to determining the limits of real roots of algebraic equations. This work is recorded in the fifth chapter of the second part of his book *A Treatise of Algebra*. At the end of this chapter, Maclaurin directly asserts a rule about the lower limit of the maximum absolute value of real roots of any algebraic equation, but we find that this rule is not always true. According to the principles of recover para-

文章引用: 李睿. 麦克劳林关于方程实根最大绝对值下界的法则[J]. 应用数学进展, 2024, 13(2): 825-831.
DOI: 10.12677/aam.2024.132079

digm, we have restored the deductive process of this rule, thus clarified Maclaurin's original mathematical thought and pointed out that his mistake lies in mistaking the denominator for the degree of the equation, but in fact it should be the number of terms of the product of any two roots. Finally, we have amended his mistake and given the correct form of this rule.

Keywords

Maclaurin, Algebraic Equation, Limits of Real Roots, Rule, Recover

1. 引言

高次代数方程实根的近似求解无论在历史上还是在当代都是一个重要的学术课题，而在对方程的实根展开近似求解之前，首要的事情之一就是只利用给定方程的形式对方程实根的界限给出科学的估计。自韦达(Francois Vieta, 1540~1603)在 16 世纪末开始这方面的研究以来[1] [2]，17 世纪的数学家哈里奥特(Thomas Harriot, 1560~1621)，笛卡尔(Rene Descartes, 1596~1650)，德比奥尼(Florimond de Beaune, 1601~1652)，胡德(Johann Hudde, 1628~1704)，柯林斯(John Collins, 1624~1683)，罗尔(Michel Rolle, 1652~1719)等人都对这个问题进行了探索[3] [4] [5]，其中笛卡尔符号法则、胡德法则和罗尔定理的影响最为深远，它们现今都已经发展成关于函数性质的标准定理。在这项研究的历史发展进程中，牛顿(Issac Newton, 1642~1727)是一个重要的节点。对于没有虚根的任意高次方程，他在《广义算术》(*Arithmetica Universalis*)中创造性地利用根的幂和公式与不等式技巧给出了求方程实根全体上下界的方法[6]。但是牛顿对于他的法则仅仅举例说明其操作程序，并未阐释其原理。

麦克劳林(Colin Maclaurin, 1698~1746)在 1720~30 年代对《广义算术》的困难法则进行了较为系统的解释和证明，这些内容成为其《代数论》(*A Treatise of Algebra*)的重要构件[7]。由于《代数论》中包含了许多麦克劳林自己的创新思想，因此这本书和牛顿的《广义算术》以及欧拉(Leonhard Euler, 1707~1783)的《代数学基础》(*Elements of Algebra*)一起被誉为 18 世纪的三大代数学著作[8] [9]。

《代数论》分为三部分以及一个附录，分别讨论代数基本运算(共 14 章)、方程求解(共 12 章)、代数与几何的相互应用(共三章)以及几何曲线的一般性质。在方程求解部分的第 5 章，麦克劳林详细讨论了关于方程实根界限的法则。第 5 章的章名为“方程[根]的界限”，其中麦克劳林讨论的都是首一的方程。该章包含第 39~52 目，内容分为以下三个方面：其中第 39~44 目讨论方程实根全体的界限，第 45~50 目讨论方程每个实根的界限，第 51~52 目解释上述的牛顿基于根的幂和公式得到的法则[7]。

2. 麦克劳林关于方程实根最大绝对值下界的法则

2.1. 麦克劳林的法则

鉴于牛顿给出的法则都是求方程实根最大绝对值的上界，即最大正根的上界和最小负根的下界，为了更精确地限定全体实根的界限，麦克劳林在第 5 章的最后附上了一条他自己发现的关于实根最大绝对值下界的法则。这样，结合牛顿在《广义算术》中给出的求方程最大正根的上界与最小负根的下界，麦克劳林就可以更精确的锁定最大正根与最小负根的范围。

麦克劳林对其法则的论述如下[7]：

关于方程根的界限，我们还可以给出另外几条类似的法则。下面我们给出一条其他作者从未提及的法则。

对于三次方程 $x^3 - px^2 + qx - r = 0$，求出 $q^2 - 2pr$ 并称之为 e^4，那么方程的最大根总是大于 $\frac{e}{\sqrt[4]{3}}$，即 $\sqrt[4]{\frac{e^4}{3}}$。

对任意次方程 $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4} - \cdots = 0$，计算 $\frac{q^2 - 2pr + 2s}{n}$，那么它的四次方根总是小于方程的最大根。

麦克劳林在术文中的“最大根”是指实根的最大绝对值，他的法则用现代数学符号可以表示为：

法则 M 对于不含虚根的 n 次方程

$$x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4} - \cdots = 0,$$

记其绝对值最大的根为 x_M，有 $\sqrt[4]{\frac{q^2 - 2pr + 2s}{n}} < |x_M|$。特殊地，当 $n = 3$ 时，有 $\sqrt[4]{\frac{q^2 - 2pr}{3}} < |x_M|$。

2.2. 麦克劳林的法则并不总是成立

对于这条法则，麦克劳林既没有举例说明，也没有解释论证，但他强调这条法则是“其他作者从未提及的”，可见他对其重要性与正确性充分自信。需要注意的是，麦克劳林对于他在《代数论》中的许多重要的其他创新工作都未声明其优先权，例如给出线性方程组的消元法则(即早期的克拉默法则)、对牛顿求虚根个数的法则及其幂和公式给出证明等[9]-[15]，这反过来也体现出他对这条法则的重视。不过，虽然如此，我们并未见到有文献对这条法则进行研究。

但是我们在研究中发现，麦克劳林的法则并不总是成立。例如，对于四次方程

$$x^4 + 10x^3 - 35x^2 + 50x - 24 = 0,$$

其 4 个根为 1，2，3，4，此时

$$\sqrt[4]{\frac{q^2 - 2pr + 2s}{n}} = 2.874 < 4 = |x_M|,$$

即他的法则成立。而对于四次方程

$$x^4 + 86x^3 - 2771x^2 + 39646x - 212520 = 0,$$

其 4 个根为 20，21，22，23，此时

$$\sqrt[4]{\frac{q^2 - 2pr + 2s}{n}} = 23.8044 > 23 = |x_M|,$$

即他的法则不成立。因此，我们自然会产生以下两个问题：

1) 这条法则为什么会存在错误？虽然麦克劳林深信其法则的重要性与正确性，但是他对该法则的推导过程完全没有交待，这就需要我们利用古证复原的范式来恢复麦克劳林原来的想法[16] [17] [18] [19] [20]。

2) 这条法则能否挽救，如果可以，那么其正确形式是什么？

如果能够回答这两个问题，我们不仅能够对麦克劳林的代数学创新工作具有新的认识，而且也将给代数学本身增加一条新的正确法则。我们将在下文依次对这两个问题给出回答。

3. 复原麦克劳林对这条法则的推导过程

以下我们希望对该法则的构造过程进行复原，分析它为什么是合理的，为什么会存在错误，以及是

在哪个环节出现的错误。虽然古证复原通常都是针对正确的结论，但是我们对这条并不总是成立的法则也可以展开复原工作[21]。

麦克劳林在这一章的讨论有两个明显的特点，一是在方法上通过特殊的例子来得出一般结论，二是在技巧上经常利用根与系数的关系。我们将以麦克劳林的这两个特点为依据，按照古证复原的原则，来恢复麦克劳林本来的想法。

设 n 次方程

$$x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4} - \cdots = 0\text{，}$$

有 n 个正根 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$，由根与系数的关系可知，

$$p = \sum_1^n x_i\text{，}\quad q = \sum_{1\le i\le j\le n} x_i x_j\text{，}\quad r = \sum_{1\le i\le j\le k\le n} x_i x_j x_k\text{，}\quad s = \sum_{1\le i\le j\le k\le l\le n} x_i x_j x_k x_l\text{。}$$

注意到组成 q^2，pr，s 的各项都是齐次的，我们希望来探究它们之间的关系。

首先来考虑较简单的三次方程

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0\text{。}$$

此时

$$p = \sum_{1\le i\le 3} x_i = x_1 + x_2 + x_3\text{，}\quad q = \sum_{1\le i\le j\le 3} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\text{，}\quad r = \sum_{1\le i\le j\le k\le 3} x_i x_j x_k = x_1x_2x_3\text{。}$$

可得

$$q^2 = \left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right)^2 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2\left(x_1^2x_2x_3 + x_2^2x_1x_3 + x_3^2x_1x_2\right)\text{，}$$

$$pr = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)\left(x_1x_2x_3\right) = x_1^2x_2x_3 + x_2^2x_1x_3 + x_3^2x_1x_2\text{，}$$

因此

$$q^2 - 2pr = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 < 3x_M^4\text{，即}\ \frac{q^2 - 2pr}{3} < x_M^4\text{。}$$

三次方程的例子表明，q^2 与 $2pr$ 中不是完全平方的项刚好抵消掉。然后我们来考虑四次方程的情形，并且希望此时也能消去 q^2 中的非完全平方项，只剩下完全平方项，从而可以利用不等式求解；因为 $2pr$ 中不含完全平方项，所以此时只需考虑 q^2 中的非完全平方项即可。

对于四次方程

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0\text{，}$$

设其有四个正根 x_1, x_2, x_3, x_4，根据根与系数的关系可得：

$$p = \sum_{1\le i\le 4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4\,,\ q = \sum_{1\le i\le j\le 4} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\text{，}$$

$$r = \sum_{1\le i\le j\le k\le 4} x_i x_j x_k = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4\,,\ s = \sum_{1\le i\le j\le k\le l\le 4} x_i x_j x_k x_l = x_1x_2x_3x_4\text{。}$$

因此 $q^2 = \left(\sum_{1\le i\le j\le 4} x_i x_j\right)^2$ 中的非完全平方项为

$$\begin{aligned} A = 2\Big(& x_1^2\left(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right) + x_2^2\left(x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4\right) \\ & + x_3^2\left(x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4\right) + x_4^2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right) + 3x_1x_2x_3x_4\Big)\text{，} \end{aligned}$$

而

$$
\begin{aligned}
pr &= \sum_{1\le i\le 4} x_i \sum_{1\le i\le j\le k\le 4} x_i x_j x_k \\
&= x_1^2\left(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)+x_2^2\left(x_1x_3+x_1x_4+x_3x_4\right) \\
&\quad +x_3^2\left(x_1x_2+x_1x_4+x_2x_4\right)+x_4^2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)+4x_1x_2x_3x_4
\end{aligned},
$$

因此

$$A-2pr+2s=0,$$

即 $q^2-2pr+2s$ 的结果只含完全平方项，从而可以按照三次方程的做法化成不等式。

对于五次及以上的方程，通过根与系数的关系得到的表达式中涉及根的五次幂以及更高次幂，而麦克劳林在此仍然只需考虑根的四次齐次项之间的加减运算，即他仍然只需考虑 q^2，pr 与 s 之间的关系。至此，麦克劳林可能通过归纳得到了一般规律，即对于任意不含虚根的高次方程，$q^2-2pr+2s$ 的结果总是只含完全平方项 $x_i^2x_j^2$，并且 $x_i^2x_j^2<x_M^4$。

他进而要把关于三次方程的法则推广到一般 n 次方程。在对应三次方程的法则中，q^2-2pr 其实也是 $q^2-2pr+2s$，只不过此时 $s=0$，因此关于三次方程的结论 $\sqrt[4]{\dfrac{q^2-2pr}{3}}<x_M$ 此时可以改写成 $\sqrt[4]{\dfrac{q^2-2pr+2s}{3}}<x_M$。在推广的过程中，麦克劳林或许只是将注意力集中在对于分子归纳出的一般规律，即分子的组成项都是完全平方项，而忽略了检查 $x_i^2x_j^2$ 的个数，并将其简单地误认为方程的次数，于是“推广”得出了 n 次方程的错误结论

$$\sqrt[4]{\frac{q^2-2pr+2s}{n}}<x_M。$$

事实上，根据以上的归纳分析可知，对于四次方程，

$$q^2-2pr+2s=\sum_{1\le i\le j\le 4} x_i^2x_j^2,$$

此时 $x_i^2x_j^2$ 的项数是 $4(4-1)/2$。而这一点对于任意 n 次方程也是成立的，即此时 $x_i^2x_j^2$ 的项数是 $n(n-1)/2$。对于这个结论，通过分析 q^2 与 $2pr$ 的特征与项数，我们不难证明它对任意次方程都成立。

至此，我们完成了对麦克劳林提出这条法则思路的复原以及对这条法则的修正。我们明确麦克劳林在法则的推广过程中只是在分母处出现错误，经过之前的分析，我们实际上已经得到这条法则的正确形式：

对于具有 n 个互异实根的 n 次方程

$$x^n-px^{n-1}+qx^{n-2}-rx^{n-3}+sx^{n-4}-\cdots=0,$$

记其绝对值最大的根为 x_M，则有

$$\sqrt[4]{\frac{q^2-2pr+2s}{n(n-1)/2}}<\left|x_M\right|。$$

事实上，配合牛顿利用根的平方和与不等式导出的法则[6]，我们可以得到一条新的 N-M 法则(而这也应该是麦克劳林最初构造这条法则的目的)，用于求方程最大正根与最小负根上下界：

对于不含虚根的 n 次方程

$$x^n-px^{n-1}+qx^{n-2}-rx^{n-3}+sx^{n-4}-\cdots=0,$$

记其绝对值最大的根为x_M，则有

$$\sqrt[4]{\frac{q^2-2pr+2s}{n(n-1)/2}}<|x_M|<\sqrt{p^2-2q}\text{。}$$

4. 结语

通过以上对麦克劳林关于方程实根界限的讨论，我们知道，他的目的不仅仅是在注释牛顿，而是试图在牛顿工作的基础上探寻实根最大绝对值更精确的界限。

我们通过对麦克劳林法则构造过程的古证复原，揭示了他得到这条法则原来的数学思想，即利用根与系数的关系以及不等式，由特殊的例子推广到一般结论。根据复原的过程，我们指出了其法则的合理性与错误之处，并完成了对这条法则的补救，给出了它的正确形式。

牛顿的算术法则与修正后的麦克劳林法则分别给出了方程实根最大绝对值的上界与下界，如果把这两条法则结合起来，我们就能精确地锁定方程最大正根与最小负根的上下界，如上一节最后的法则所示。对于不含虚根的任意高次方程，这条新的法则很容易操作，只需要由前五项的系数即可确定所需的界限。

基金项目

国家自然科学基金数学天元基金项目(12226503)。

参考文献

[1] Viète, F. (1646) Opera Mathematica. Edited by Francis van Schooten. Lvgdvni Batavorum: Ex Officinal Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum.

[2] Viète, F. (2006) The Analytic Art. Translated by T. Richard Witmer, Dover Publications Inc., New York.

[3] Harriot, T. (2003) The Greate Invention of Algebra: Thomas Harriot's Treatise on Equations. Edited and Translated by Jacqueline Stedall, Oxford University Press, Oxford.

[4] Descartes, R. (1954) The Geometry of René Descartes. Edited by David Eugene Smith and Marcia L Latham, Dover Publications, New York.

[5] Collins, J. (1684) A Letter from Mr John Collins … Giving His Thoughts about Some Defects in Algebra. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **14**, 575-582. https://doi.org/10.1098/rstl.1684.0031

[6] Newton, I. (1728) Universal Arithmetick: Or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. Translated by Raphson, and Revised and Corrected by Cunn, J. Senex & W. Taylor etc., London.

[7] Maclaurin, C. (1748) A Treatise of Algebra. A. Millar & J. Nqourse, London, 170-185.

[8] Euler, L. (1882) Elements of Algebra. Longman, Hurst, Rees & Orme, London.

[9] Katz, V.J. (2009) A History of Mathematics: An Introduction. University of the District of Columbia, Columbia, 666.

[10] Boyer, C.B. (1996) Colin Maclaurin and Cramer's Rule. *Scripta Mathematica*, **27**, 377-379.

[11] Hedman, B.A. (1999) An Earlier Date for Cramer's Rule. *Historia Mathematica*, **26**, 365-368. https://doi.org/10.1006/hmat.1999.2247

[12] Rouse Ball, W.W. (1908) A Short Account of the History of Mathematics. Macmillan & Co., London.

[13] Stedall, J. (2011) From Cardano's Great Art to Lagrange's Reflections: Filling a Gap in the History of Algebra. European Mathematical Society Publishing House, Zurich. https://doi.org/10.4171/092

[14] Katz, V.J. and Parshall, K.H. (2014) Taming the Unknown: A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century. Princeton University Press, Princeton.

[15] Bruneau, O. (2005) Pour Une Biographie Intellectuelle de Colin Maclaurin (1698-1746): Oul'obstination mathématicienne d'un newtonien. Universite De Nantes, Paris, 246-256.

[16] 吴文俊. 吴文俊文集[M]. 济南: 山东教育出版社, 1998: 54.

[17] 曲安京. 中国数学史研究范式的转换[J]. 中国科技史杂志, 2005, 26(1): 50-58.

[18] 曲安京. 再谈中国数学史研究的两次运动[J]. 自然辩证法通讯, 2006, 165(5): 100-104.

[19] 赵继伟. 卡尔达诺关于四次方程特殊法则的构造原理——兼论数学史的研究范式[J]. 自然科学史研究, 2008, 27(3): 325-336.

[20] 曲安京. 近现代数学史研究的一条路径——以拉格朗日与高斯的代数方程理论为例[J]. 科学技术哲学研究, 2018, 35(6): 67-85.

[21] 赵继伟. 卡尔达诺关于方程变换的一条错误法则[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2009, 39(1): 165-168.