Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(2), 788-805
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.132077

双尺度随机时滞微分方程的平均原理

贺 鑫

长安大学理学院，陕西 西安

收稿日期：2024年1月28日；录用日期：2024年2月22日；发布日期：2024年2月29日

摘 要

本文研究了分数布朗运动驱动的非自治双尺度随机时滞微分方程的平均原理。首先，通过广义Stieltjes积分和随机平均原理，推导了非自治双尺度系统的均方收敛定理。然后，结合均方收敛定理和停时理论，分别得到了原系统和平均系统的矩估计。最后，证明了当时间尺度参数趋于零时，慢变量方程的解过程在均方意义下收敛于平均方程的解过程。

关键词

双尺度，随机时滞微分方程，平均原理，分数布朗运动

The Averaging Principle of Two-Scale Stochastic Delay Differential Equation

Xin He

School of Sciences, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Received: Jan. 28th, 2024; accepted: Feb. 22nd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

The main goal of this article is to study an average principle of a class of non-autonomous two time-scale stochastic differential delay equations driven by fractional Brownian motion. Firstly, the mean square convergence theorem for non-autonomous scale systems was derived by means of Generalized Stieltjes integral and Stochastic Average Principle. Then, combining the mean square convergence theorem and the Stopping-time theory, the moment estimates of the original system and the average system were obtained, respectively. Finally, it showed that when the time scale parameters approach zero, the solution process of the slow variable equation converges to the solution process of the mean equation in the mean square sense.

文章引用: 贺鑫. 双尺度随机时滞微分方程的平均原理[J]. 应用数学进展, 2024, 13(2): 788-805.
DOI: 10.12677/aam.2024.132077

Keywords

Two-Time-Scale, Stochastic Differential Delay Equations, Averaging Principle, Fractional Brownian Motion

1. 引言

双尺度随机时滞微分方程最早可以追溯到 Itô 和 Gikhman 创立随机微积分理论的年代。由于在化学[1]、力学[2]、电子电路[3]和大气海洋学[4]等实际应用领域中表现出来的广泛应用，双尺度随机微分方程俨然已经成为一个重要的研究领域，越来越多的学者开始重视双尺度随机微分方程的研究。对于多尺度随机微分方程的定性分析，平均原理提供了极大帮助。多尺度随机微分方程的平均原理就是在一定的条件下，将快变量过程视为随机噪声并将其消除从而得到一个极限过程，使得极限过程的解逼近原始方程中慢变量的解。平均原理广泛应用于力学、物理、控制等领域，是简化动力系统从而得到微分方程近似解的有力工具。

关于随机动力系统的平均原理有较长的历史，其奠基性工作由前苏联数学家 Bogoliubov 在文献[5]中完成。紧接着，Gikhman [6]，Volosov [7]和 Besjes [8]研究了非线性常微分方程的平均问题。随机平均原理首先由 Stratonovich 提出，此后，Khasminskii [9]将平均原理发展到具有快－慢尺度的随机常微分方程的研究中，证明了在较弱的收敛意义下成立的平均原理。值得一提的是，Freidlin 和 Wentzell [10] [11]给出了依概率收敛的平均原理。另外，Golec 和 Ladde [12]以及 Givon [13]等人又进一步将结果推广到均方意义下收敛的情形。然后，Cerrai 和 Freidlin [14]研究了一类无限维随机反应扩散模型的平均原理。近年来，Fu 和 Duan [15]深入研究了带有高斯噪声的双尺度随机偏微分方程，得到在 Lipschitz 条件下的均方收敛的平均结果。随后，Fu 和 Liu [16]又进一步将结果推广为：慢方程的解强收敛于平均方程的解。Xu [17]将以布朗运动为驱动的随机系统推广到非高斯噪声(带跳)的情形并得到了强收敛结果。之后，Xu [18]等人又进一步证得由分数布朗运动驱动的双尺度随机微分方程的平均原理。

然而，许多研究都是基于系统未来的状态与过去的状态是相互独立的假设下展开的，这与实际情况并不相符。事实上，滞后现象不可避免地出现在随机动力系统中，也就是说事物的发展趋势既依赖于当前的状态，还依赖于过去的历史状态。时滞是实际应用中许多系统的重要特征，在生物学、信号传输、随机控制等应用领域的很多数学模型中，都发挥着不可或缺的作用，许多学者都进行了研究[19] [20] [21]。文献[19]给出了随机时滞微分方程和带跳的随机时滞微分方程的平均原理，证明了平均方程的解在 p 阶矩意义下和依概率意义下收敛于随机微分方程的解。文献[20]讨论了基于 Hurst 参数 $H \in (1/2,1)$ 的分数布朗运动驱动的随机时滞微分方程的平均原理，原始方程的解依概率收敛和均方意义收敛于相应平均方程的解。

双尺度随机微分方程的平均原理已经取得了很大的进展，但对于双尺度随机时滞微分方程的平均法的研究却很少。文献[22]利用随机平均原理研究了由布朗运动驱动的自治双尺度随机时滞微分方程，为一类自治双尺度随机时滞微分方程建立了一个平均原理的强极限定理。文献[23]则在文献[22]的基础上研究了 Hurst 参数 $H \in (1/2,1)$ 的乘法分数布朗噪声驱动的自治双时间尺度随机时滞微分方程的平均原理。

受此启发，本文在文献[20] [23]的研究基础上，研究由分数布朗运动驱动的非自治双尺度随机时滞微

分方程的平均原理，其中该非自治系统的慢变量过程由 Hurst 参数 $H\in(1/2,1)$ 的分数布朗运动驱动，快变量过程由布朗运动驱动。借助广义 Stieltjes 积分和停时理论，通过随机平均原理得到非自治双尺度随机时滞微分方程的平均方程，并证得平均方程和原方程的慢分量在均方意义下解的近似等价性。

本文的其余部分组织如下：第 2 节预备知识。第 3 节是本文的主要结果及其证明过程，即证明慢方程的解是强收敛于平均方程的解。第 4 节总结了本文。

2. 预备知识

假设 $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ 是一个带流的完备概率空间，其中 $\Omega=[0,T]$ 为实轴上的有限区间，T 是正常数，$\mathbb{P}$ 是概率测度，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 满足通常条件，即是右连续的且 $\mathcal{F}_0$ 包含所有的 $\mathbb{P}$ 零测集。符号 $|\bullet|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的 Euclidean 范数，$\|\bullet\|$ 表示矩阵范数。$\mathbb{C}:=C\left([-\tau,0];\mathbb{R}^n\right)$ 表示所有从 $[-\tau,0]$ 映到 $\mathbb{R}^n$ 的右连续且具有左极限的函数 f 构成的 Banach 空间，其范数为最大范数 $\|\bullet\|_\infty$。对于 $h(\bullet)\in C\left([-\tau,\infty)\right)$ 和 $t\geq 0$，定义一个随机过程 $h:=\{h(t),t\in[-\tau,\infty)\}$，$h_t\in\mathbb{C}$ 定义为 $h_t(\theta)=h(t+\theta)$，$\theta\in[-\tau,0]$。$W:=\{W_t,t\in[0,T]\}$ 是定义在完备概率空间 $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T},\mathbb{P}\right)$ 上的 m 维布朗运动，$B^H:=\{B_t^H,t\in[0,T]\}(1/2<H<1)$ 是一个定义在完备概率空间 $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T},\mathbb{P}\right)$ 上的 n 维分数布朗运动。在本文中，符号 C 代表常数，其值在变化。

定义 2.1 [23] 令 $a,b\in\mathbb{R}$。阶数为 $\alpha(\alpha>0)$ 的左侧和右侧 Riemann-Liouville 分数阶积分被定义为

$$I_{\alpha+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\omega)^{\alpha-1}f(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

$$I_{b-}^{\alpha}f(t)=\frac{(-1)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b(\omega-x)^{\alpha-1}f(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

其中 $(-1)^{\alpha}=\mathrm{e}^{-i\pi\alpha}$，$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}r^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-r}\mathrm{d}r$ 是 Euler Gamma 函数。

假设 $1/2<H<1$，$1-H<\alpha<1$，记 $\mathrm{W}^{\alpha,1}\left([0,T];\mathbb{R}^n\right)$ 表示由可测函数 $f:[0,T]\to\mathbb{R}^n$，且

$$\|f\|_{\alpha,1}:=\int_0^T s^{-\alpha}|f(s)|\mathrm{d}s+\int_0^T\int_0^s(s-\omega)^{-\alpha-1}|f(s)-f(\omega)|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}s<\infty \tag{1}$$

构成的空间。假设 $1/2<H<1$，$1-H<\alpha<1$，记 $\mathrm{W}_0^{\alpha,\infty}\left([0,T];\mathbb{R}^n\right)$ 表示由可测函数 $f:[0,T]\to\mathbb{R}^n$，且

$$\|f\|_{\alpha,\infty}:=\sup_{t\in[0,\infty]}\left(|f(t)|+\int_s^t(r-\omega)^{-\alpha-1}|f(t)-f(\omega)|\mathrm{d}\omega\right)<\infty \tag{2}$$

构成的空间。对任意 $\lambda\geq 0$ 定义等价范数

$$\|f\|_{\alpha,\infty}:=\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(|f(t)|+\int_s^t(r-\omega)^{-\alpha-1}|f(t)-f(\omega)|\mathrm{d}\omega\right)<\infty. \tag{3}$$

定义 2.3 [24] 令 $a,b\in\mathbb{R}$。阶数为 $\alpha(\alpha>0)$ 的广义 Riemann-Stieltjes 分数阶积分被定义为

$$\int_0^T f(r)\mathrm{d}g(r)=(-1)^{\alpha}\int_0^T D_{0+}^{\alpha}f(r)D_{T-}^{1-\alpha}g_{T-}(r)\mathrm{d}r,$$

$$\int_s^t f(r)\mathrm{d}g(r)=\int_0^T f(r)\mathbf{1}_{(s,t)}\mathrm{d}g(r).$$

其中对于任意的 $0\leq a<b\leq T$，$g_{b-}(t):=g(t)-g(b)$，且对于任意的 $a<t<b$，阶数为 $\alpha(\alpha>0)$ 的左侧和右侧 Weyl 型分数阶积分被定义为

$$D_{\alpha+}^{\alpha}f(t):=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(t)}{(t-a)^{\alpha}}+\alpha\int_a^t\frac{f(t)-f(s)}{(t-s)^{\alpha+1}}\mathrm{d}s\right],$$

$$D_{b-}^{1-\alpha}g_{b-}(t)=\frac{(-1)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{g(b)-g(t)}{(b-t)^{1-\alpha}}+(1-\alpha)\int_t^b\frac{g(t)-g(s)}{(s-t)^{2-\alpha}}\mathrm{d}s\right].$$

其中$\Gamma(\bullet)$是 Gamma 函数。

假设$1/2<H<1$，$1-H<\alpha<1$，设$W_T^{\alpha,0}([0,T];\mathbb{R}^n)$是可测函数$g:[0,T]\to\mathbb{R}^m$构成的空间，且具有范数

$$\|g\|_{\alpha,0,T}:=\sup_{0\le s<t\le T}\left(\frac{|g(t)-g(s)|}{(t-s)^{1-\alpha}}+\int_s^t\frac{|g(u)-g(s)|}{(u-s)^{2-\alpha}}\mathrm{d}u\right)<\infty.$$

引理 2.4 [25] 假设$H\in(1/2,1)$且对任意的$\alpha\in(1-H,1/2)$，函数$f\in W^{\alpha,1}([0,T];\mathbb{R}^n)$和$g\in W^{1-\alpha,\infty}([0,T];\mathbb{R}^n)$，且对于任意$t\in[0,T]$，积分$\int_0^t f\,\mathrm{d}B_s^H$存在，则有以下不等式成立：

$$\left|\int_0^t f\,\mathrm{d}B_s^H\right|\le\Lambda_\alpha(B_s^H)\|f\|_{\alpha,1}.$$

其中$\Lambda_\alpha(B^H):=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\|B^H\|_{\alpha,0,T}$。

进一步，根据 Fernique 定理，对于任何$0<\vartheta<2$，有$\mathbb{E}\left[e^{(\Lambda_\alpha(B^H))^\vartheta}\right]<\infty$。 (4)

假设$\tau>0$，$s,t\in[-\tau,T]$，记$W_0^{\alpha,\infty}([s,t];\mathbb{R}^n)$表示可测函数$f:[s,t]\to\mathbb{R}^n$构成的空间且满足以下可积条件

$$\|f\|_{\alpha,\infty(s,t)}:=\sup_{r\in[s,t]}\left(|f(r)|+\int_s^r(r-u)^{-\alpha-1}|f(r)-f(u)|\mathrm{d}u\right)<\infty. \tag{5}$$

这里$\|f\|_\infty:=\sup_{r\in[s,t]}e^{-\lambda r}|f(r)|$，$\|f(r)\|_{\alpha(s)}:=|f(r)|+\int_s^r(r-u)^{-\alpha-1}|f(r)-f(u)|\mathrm{d}u$。

对于任意$\lambda\ge0$定义等价范数$\|f\|_{\alpha,\lambda(s,t)}:=\sup_{r\in[s,t]}e^{-\lambda r}\left(|f(r)|+\int_s^r(r-u)^{-\alpha-1}|f(r)-f(u)|\mathrm{d}u\right)<\infty$。 (6)

对于任意$0<\lambda\le1$，记$C^\lambda([s,t];\mathbb{R}^n)$表示由$\lambda$-阶 Hölder 连续函数$f:[s,t]\to\mathbb{R}^n$且

$$\|f\|_{\alpha,\lambda(s,t)}^p:=\sup_{r\in[s,t]}e^{-\lambda r}\left(|f(r)|+\int_s^r(r-u)^{-\alpha-1}|f(r)-f(u)|\mathrm{d}u\right)^p,p\ge1. \tag{7}$$

构成的空间。这里$\|f\|_{\alpha,\infty(\tau)}^p:=\|f\|_{\alpha,\infty(-\tau,T)}^p$，$\|f\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^p:=\|f\|_{\alpha,\lambda(-\tau,T)}^p$和$\|f\|_{\alpha(\tau)}^p:=\|f\|_{\alpha,\infty(-\tau)}^p$。当$\tau=0$时，我们将省略对应范数的$\tau$。

引理 2.5 [26] 对于任意非负的a和b，且$a+b<1$，并且对于任意的$\lambda\ge1$，存在正常数C，使得

$$\int_0^t e^{-\lambda(t-r)}(t-r)^{-a}r^{-b}\mathrm{d}r\le C\lambda^{a+b-1}.$$

当$0\le a<1$，$b\le0$以及任意的$\lambda\ge1$时，有$\int_0^t r^{-b}(t-r)^{-a}r^{-b}\mathrm{d}r\le\Gamma(1-a)t^{-b}\lambda^{a-1}$。

引理 2.6 [25] 对于可测函数$f:[0,T]\to\mathbb{R}^n$，存在正常数C，使得

$$\left\|\int_0^t f(r)\mathrm{d}r\right\|_\alpha\le C\int_0^t|f(r)|(t-r)^{-\alpha}\mathrm{d}r,$$

且$\left\|\int_0^t f(r)\mathrm{d}B_r^H\right\|_\alpha\le C\Lambda_\alpha(B^H)\int_0^t\left((t-r)^{-2\alpha}+r^{-\alpha}\right)\left(|f(r)|+\int_0^r(r-u)^{-\alpha-1}|f(r)-f(u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}r$。

本文考虑如下形式的双尺度随机时滞微分方程：

$$\begin{cases} \mathrm{d}X^{\varepsilon}(t)=f\left(t,X_t^{\varepsilon},Y_t^{\varepsilon}\right)\mathrm{d}t+\sigma_1\left(t,X^{\varepsilon}(t-\tau)\right)\mathrm{d}B_t^H,\ t\in[0,T],\ X_0^{\varepsilon}=\xi\in\mathbb{C} \\ \mathrm{d}Y^{\varepsilon}(t)=\dfrac{1}{\varepsilon}g\left(X_t^{\varepsilon},Y^{\varepsilon}(t),Y^{\varepsilon}(t-\tau)\right)\mathrm{d}t+\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sigma_2\left(X_t^{\varepsilon},Y^{\varepsilon}(t),Y^{\varepsilon}(t-\tau)\right)\mathrm{d}W_t,t\in[0,T],Y_0^{\varepsilon}=\eta\in\mathbb{C} \end{cases} \tag{8}$$

其中$t\in[0,T]$，$\tau>0$为正常数时滞，$0<\varepsilon\ll 1$是一个小的正参数，代表系统中的时间尺度比率。因此，根据这个时间尺度，变量X_t^{ε}称为慢分量，变量Y_t^{ε}称为快分量。我们对系数做如下定义：
$f:[0,T]\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}^n$，$\sigma_1:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}$，$g:\mathbb{C}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，$\sigma_2:\mathbb{C}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}$。

现在，假设方程(8)的各个系数满足以下条件：

(H1) f是可测函数，对于任意的$x_i,y_i\in\mathbb{C}(i=1,2)$和$s,t\in[0,T]$，存在常数$\theta_i\ge 0,(i=1,2,3),0<\kappa\le 1$和$L_i\ge 0(i=1,2)$，使得

$$\left|f(t,x_1,y_1)\right|\le L_1\left(1+|x_1|+|y_1|\right);$$
$$\left|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_1)\right|\le L_2\left(1+|y_1|^{\theta_1}\right)|x_1-x_2|;$$
$$\left|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_1,y_2)\right|\le L_2|y_1-y_2|\left(1+|x_1|^{\theta_2}+|y_1|^{\theta_3}+|y_2|^{\theta_3}\right);$$
$$\left|f(t,x_1,y_1)-f(s,x_1,y_1)\right|\le L_2|t-s|^{\kappa}\left(1+|x_1|^{\theta_2}+|y_1|^{\theta_3}\right).$$

(H2) 对任意的$x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$，$s,t\in[0,T]$，存在常数$\beta\in(0,1]$，$L_i>0,i=3,4,5,6$使得

$$\left|\nabla_x\sigma_1(t,x_1)\right|\le L_3;\quad \left|\sigma_1(t,x_1)\right|\le L_6\left(1+|x|^{\gamma}\right);$$
$$\left|\nabla_x\sigma_1(t,x_1)-\nabla_x\sigma_1(t,x_2)\right|+\left|\sigma_1(t,x_1)-\sigma_1(t,x_2)\right|\le L_4|x_1-x_2|;$$
$$\left|\nabla_x\sigma_1(t,x_1)-\nabla_x\sigma_1(s,x_1)\right|+\left|\sigma_1(t,x_1)-\sigma_1(s,x_1)\right|\le L_5|t-s|^{\beta}.$$

(H3) 假设$\nabla g=\left(\nabla^{(1)}g,\nabla^{(2)}g,\nabla^{(3)}g\right)$和$\nabla\sigma_2=\left(\nabla^{(1)}\sigma_2,\nabla^{(2)}\sigma_2,\nabla^{(3)}\sigma_2\right)$是有界的。

(H4) 对于任意的$x\in\mathbb{C}$，$y_1,y_2,z_1,z_2\in\mathbb{R}^n$，存在$\lambda_i>0,i=1,2$，$\lambda_1>\lambda_2>0$且与$x$无关，使得

$$2\left\langle y_1-y_2,g(x,y_1,z_1)-g(x,y_2,z_2)\right\rangle+\left\|\sigma_2(x,y_1,z_1)-\sigma_2(x,y_2,z_2)\right\|^2\le-\lambda_1|y_1-y_2|^2+\lambda_2|z_1-z_2|^2,$$
$$2\left\langle y,g(x,y,z)\right\rangle+\left\|\sigma_2(x,y,z)\right\|\le-\lambda_3|y|^2+\lambda_4|z|^2+C\left(1+\|x\|_{\infty}^2\right).$$

(H5) 对于初值$X_0^{\varepsilon}=\xi\in\mathbb{C}$，存在$\lambda_5>0$，使得$\left|\xi(t)-\xi(s)\right|\le\lambda_5|t-s|$，$s,t\in[-\tau,0]$。

不难证明，在条件(H1)~(H3)和(H5)下，方程(8)存在唯一解：

$$\begin{cases} X^{\varepsilon}(t)=\xi(0)+\int_0^t f\left(s,X_s^{\varepsilon},Y_s^{\varepsilon}\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma_1\left(s,X^{\varepsilon}(s-\tau)\right)\mathrm{d}B_s^H, \\ Y^{\varepsilon}(t)=\eta(0)+\dfrac{1}{\varepsilon}\int_0^t g\left(X_s^{\varepsilon},Y^{\varepsilon}(s),Y^{\varepsilon}(s-\tau)\right)\mathrm{d}s+\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\sigma_2\left(X_s^{\varepsilon},Y^{\varepsilon}(s),Y^{\varepsilon}(s-\tau)\right)\mathrm{d}W_s, \\ X_0^{\varepsilon}=\xi\in\mathbb{C},Y_0^{\varepsilon}=\eta\in\mathbb{C},t\in[0,T]. \end{cases} \tag{9}$$

接下来，我们推导当$\varepsilon\to 0+$时，慢分量X_t^{ε}收敛于以下平均方程(利用随机平均原理，我们可以得到方程(8)的平均方程)的解：

$$\mathrm{d}\bar{X}(t)=\bar{f}\left(t,\bar{X}_t\right)\mathrm{d}t+\sigma_1\left(t,\bar{X}(t-\tau)\right)\mathrm{d}B_t^H,\ t\in[0,T],\ \bar{X}_0=\xi\in\mathbb{C}. \tag{10}$$

其中μ^x是相应冻结方程的转移半群$\left(P_t^x\right)_{t\ge 0}$的唯一不变测度。显然，在条件(H1)~(H5)下，方程(10)也有唯

一解$\left(\bar{X}(t)\right)_{t\geq-\tau}$ [27]。

下面，我们来介绍冻结方程。对于任意$t\in[0,T]$，固定慢变量$x\in\mathbb{C}$

$$\mathrm{d}Y(t)=g\left(x,Y(t),Y(t-\tau)\right)\mathrm{d}t+\sigma_2\left(x,Y(t),Y(t-\tau)\right)\mathrm{d}W_t,\quad Y_0=\eta\in\mathbb{C}. \tag{11}$$

在条件(H3)下，方程(11)有唯一的解$\left(Y(t)\right)_{t\geq-\tau}$ [22]。

在本部分最后，给出以下引理，这是证明本文结论的重要工具：

定义 2.7 设$\mathcal{F}_t$为$\left\{Y_r^{\chi,\eta},r\leq t\right\}$生成的$\sigma$-域。对$0\leq\zeta\leq s\leq T$，有

$$J(s,\zeta,\chi,\eta)=\mathscr{E}\left[\left\langle f\left(k\delta,\chi,Y_s^{\chi,\eta}\right)-\bar{f}(k\delta,\chi),f\left(k\delta,\chi,Y_\zeta^{\chi,\eta}\right)-\bar{f}(k\delta,\chi)\right\rangle\right], \tag{12}$$

此时，存在独立于s,ζ的常数$C,\rho>0$，使得$J(s,\zeta,\chi,\eta)\leq C\left(1+\|\chi\|_\infty^2+\|\eta\|_\infty^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2}(s-\zeta)}$。

证明 由式(12)，调用$Y_t^{\chi,\eta}$的马尔科夫性质，Hölder 不等式、条件(H1)和文献[22]，可以证明。

3. 主要结果

在本节，我们给出本文的主要结论：

定理 3.1 假设原始方程(8)和平均方程(10)都满足假设条件(H1)~(H5)，则慢分量X_t^ε均方收敛于平均方程的解$\bar{X}_t$。即对任意的$t\in[0,T]$，对于所有的$\varepsilon\in(0,1)$，有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathbb{E}\left[\left\|X^\varepsilon-\bar{X}\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}^2\right]=0.$$

证明 定理 3.1 的证明包括以下步骤：

Step1：我们给出方程(8)的解$\left(X^\varepsilon,Y^\varepsilon\right)$的估计。

首先，我们对快慢过程有如下估计：

定理 3.2 假设条件(H1)~(H5)成立，那么对任意$t\in[0,T]$，存在正常数 C，使得当$\varepsilon\in(0,1)$时，有

$$\mathbb{E}\left[\left\|X^\varepsilon\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}^2\right]\leq C.$$

证明 设$\Lambda:=\Lambda_\alpha\left(B^H\right)\vee1$，对任意的$\lambda\geq1$，首先，我们估计$\left\|X^\varepsilon\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t}$，由条件(H1)~(H2)、引理 2.4 和引理 2.5，有以下估计

$$\begin{aligned}
\left\|X^\varepsilon\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t}&:=\sup_{s\in[-\tau,t]}\mathrm{e}^{-\lambda s}\left|X^\varepsilon(s)\right|\leq\sup_{s\in[-\tau,0]}\mathrm{e}^{-\lambda s}\left|\xi(s)\right|+\sup_{s\in[0,t]}\mathrm{e}^{-\lambda s}\left|X^\varepsilon(s)\right|\\
&\leq\sup_{s\in[-\tau,0]}\mathrm{e}^{-\lambda s}\left|\xi(s)\right|+\sup_{s\in[0,t]}\mathrm{e}^{-\lambda s}\left(\left|\int_0^s f\left(r,X_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\right)\mathrm{d}r\right|+\left|\int_0^s\sigma_1\left(r,X^\varepsilon(r-\tau)\right)\mathrm{d}B_r^H\right|\right)\\
&\leq\|\xi\|_{\alpha,\infty(-\tau,0)}+C\sup_{0\leq s\leq t}\int_0^s\mathrm{e}^{-\lambda(s-r)}\left(1+\left\|X^\varepsilon\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t}\right)\mathrm{d}r\\
&\quad+\Lambda_\alpha\left(B^H\right)\sup_{0\leq s\leq t}\left(\int_0^s\mathrm{e}^{-\lambda(s-u+\tau)}\left[\left(1+\left\|X^\varepsilon\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t}\right)u^{-\alpha}+\left\|X^\varepsilon\right\|_{1,\lambda(\tau),t}\right]\mathrm{d}u\right)\\
&\leq K\Lambda\left(1+\lambda^{\alpha-1}\left\|X^\varepsilon\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t}+\lambda^{-1}\left\|X^\varepsilon\right\|_{1,\lambda(\tau),t}\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

其中常数$K>1$且与$\|\xi\|_{\alpha,\infty(-\tau,0)}$有关。

对于$\left\|X^\varepsilon\right\|_{1,\lambda(\tau),t}$，有

$$\begin{aligned}\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{1,\lambda(\tau),t} &:= \sup_{s\in[-\tau,t]} \mathrm{e}^{-\lambda s}\int_{-\tau}^{s}(s-r)^{-\alpha-1}\left|X^{\varepsilon}(s)-X^{\varepsilon}(r)\right|\mathrm{d}r \\ &\le \sup_{s\in[-\tau,0]} \mathrm{e}^{-\lambda s}\int_{-\tau}^{s}(s-r)^{-\alpha-1}\left|\xi(s)-\xi(r)\right|\mathrm{d}r + \sup_{s\in[0,t]} \mathrm{e}^{-\lambda s}\int_{-\tau}^{0}(-r)^{-\alpha-1}\left|\xi(0)-\xi(r)\right|\mathrm{d}r \\ &\quad + \sup_{s\in[0,t]} \mathrm{e}^{-\lambda s}\int_{-\tau}^{0}(s-r)^{-\alpha-1}\left|X^{\varepsilon}(r)-\xi(0)\right|\mathrm{d}r + \sup_{s\in[0,t]} \mathrm{e}^{-\lambda s}\int_{0}^{s}(s-r)^{-\alpha-1}\left|X^{\varepsilon}(s)-X^{\varepsilon}(r)\right|\mathrm{d}r \\ &=: \sum_{i=1}^{4}\mathbf{B}_i.\end{aligned} \tag{14}$$

接下来，我们分别估计 $\mathbf{B}_1$， $\mathbf{B}_2$， $\mathbf{B}_3$ 和 $\mathbf{B}_4$。对于 $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$，由条件(H5)，

$$\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2 \le \|\xi\|_{\alpha,\infty(-\tau,0)}. \tag{15}$$

对于 $\mathbf{B}_3$，由引理 2.4，可以得到

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_3 &\le \sup_{s\in[0,t]}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda s}}{s^{\alpha}}\left|X^{\varepsilon}(s)-\xi(0)\right| \le \sup_{s\in[0,t]}\frac{1}{s^{\alpha}}\int_0^s \mathrm{e}^{-\lambda(s-r)}\left(1+\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t}\right)\mathrm{d}r \\ &\quad + \Lambda_{\alpha}\left(B^H\right)C_{\alpha,\beta}\sup_{s\in[0,t]}\frac{1}{s^{\alpha}}\int_0^s \mathrm{e}^{-\lambda(s-u+\tau)}\left[\left(1+\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t}\right)u^{-\alpha}+\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{1,\lambda(\tau),t}\right]\mathrm{d}u \\ &\le \Lambda_{\alpha}\left(B^H\right)C_{\alpha,\beta}\sup_{s\in[0,t]}\int_0^s \mathrm{e}^{-\lambda(s-u+\tau)}\left[\left(1+\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t}\right)u^{-2\alpha}+(s-u)^{-\alpha}\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{1,\lambda(\tau),t}\right]\mathrm{d}u \\ &\le K\Lambda\left(1+\lambda^{2\alpha-1}\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t}+\lambda^{-\alpha}\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{1,\lambda(\tau),t}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

对于 $\mathbf{B}_4$，由引理 2.6，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_4 &\le \sup_{s\in[0,t]}\mathrm{e}^{-\lambda s}\int_0^s (s-r)^{-\alpha-1}\int_r^s f\left(u,X_u^{\varepsilon},Y_u^{\varepsilon}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}r + \sup_{s\in[0,t]}\mathrm{e}^{-\lambda s}\int_0^s (s-r)^{-\alpha-1}\left|\int_r^s \sigma_1\left(u,X^{\varepsilon}(u-\tau)\right)\mathrm{d}B_u^H\right|\mathrm{d}r \\ &\le \sup_{s\in[0,t]}\int_0^s \mathrm{e}^{-\lambda(s-r)}(s-r)^{-\alpha}\left(1+\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t}\right)\mathrm{d}r \\ &\quad + C\Lambda_{\alpha}\left(B^H\right)\sup_{s\in[0,t]}\left(\int_0^s \mathrm{e}^{-\lambda(s-u+\tau)}(s-u)^{-2\alpha}\left(1+\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t}\right)\mathrm{d}u + \int_0^s \mathrm{e}^{-\lambda(s-u+\tau)}(s-u)^{-\alpha}\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{1,\lambda(\tau),t}\mathrm{d}u\right).\end{aligned} \tag{17}$$

最后，将式(15)~(17)代入不等式(14)，得到

$$\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{1,\lambda(\tau),t} \le K\Lambda\left(1+\lambda^{2\alpha-1}\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t}+\lambda^{-\alpha}\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{1,\lambda(\tau),t}\right). \tag{18}$$

选取 $\lambda=(4K\Lambda)^{1/(1-\alpha)}$，由式(13)，得到

$$\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t} \le \frac{4}{3}K\Lambda\left(1+\lambda^{-1}\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{1,\lambda(\tau),t}\right). \tag{19}$$

将上式代入不等式(18)，进行简单变换，得到

$$\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{1,\lambda(\tau),t} \le \frac{3}{2}K\Lambda+2(K\Lambda)^{1/(1-\alpha)} \le C_{T,|\xi|}\Lambda^{1/(1-\alpha)}.$$

再将其代入不等式(19)，则 $\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{\infty,\lambda(\tau),t} \le C\Lambda^{1/(1-\alpha)}$。

因此，可以得到

$$\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{\alpha,\infty(\tau)} \le \mathrm{e}^{\lambda T}\left(\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{\infty,\lambda(\tau),T}+\left\|X^{\varepsilon}\right\|_{1,\lambda(\tau),T}\right) \le C\mathrm{e}^{\Lambda^{1/(1-\alpha)}}\left(1+\Lambda_{\alpha}^{1/(1-\alpha)}\left(B^H\right)\right).$$

由于 $0<1/(1-\alpha)<2$ 和引理 2.4 中的 $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\left(\Lambda_\alpha\left(B^H\right)\right)^g}\right]<\infty$，可以得到

$$\mathbb{E}\left[\left\|X^\varepsilon\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}^2\right]\le C.$$

定理 3.2 得证。

此外，同理可证

$$\left\|\hat{X}^\varepsilon\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}+\left\|\bar{X}\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}\le C\mathrm{e}^{C\Lambda_\alpha^{1/(1-\alpha)}\left(B^H\right)}\left(1+\Lambda_\alpha^{1/(1-\alpha)}\left(B^H\right)\right). \tag{20}$$

$$\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^\varepsilon\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}^2+\left\|\bar{X}\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}^2\right]\le C. \tag{21}$$

其次，慢过程有如下连续性：

定理 3.3 假设条件(H1)~(H5)成立，那么任意 $t\in[0,T]$，存在正常数 C，使得对足够小的 δ 和 $\varepsilon\in(0,1)$，有

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[\left\|X_t^\varepsilon-X_{t(\delta)}^\varepsilon\right\|_\infty^2\right]\le C\delta^{1-2\alpha}.$$

证明 首先，我们估计 $X^\varepsilon(t)-X^\varepsilon(s)$。对于任意的 $t,s\in[0,T]$，存在正常数 C，使得

$$\begin{aligned}\left|X^\varepsilon(t)-X^\varepsilon(s)\right|&\le\left|\int_s^t f\left(r,X_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\right)\mathrm{d}r\right|+\left|\int_s^t\sigma_1\left(r,X^\varepsilon(r-\tau)\right)\mathrm{d}B_r^H\right|\\&\le C\left(1+\left\|X^\varepsilon\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}\right)|t-s|\\&\quad+C\Lambda_\alpha\left(B^H\right)\left(\int_{s-\tau}^{t-\tau}\left(\left(1+\left\|X^\varepsilon\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}\right)(r-s)^{-\alpha}\mathrm{d}r+\int_{s-\tau}^{v}\left|X^\varepsilon(v)-X^\varepsilon(u)\right|(v-u)^{-\alpha-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right)\right)\\&\le C\left(1+\Lambda_\alpha\left(B^H\right)\right)\left(1+\left\|X^\varepsilon\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}\right)|t-s|^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

其次，小区间长度为 $\delta:=\dfrac{\tau}{N}<1$ (N 为某一固定的正整数)。对任意的 $t\in[0,T]$ 和 $\theta\in[-\tau,0]$，存在常数 $k,m\ge0$，若 $t\in[k\delta,(k+1)\delta]$ 和 $\theta\in[-(m+1)\delta,-m\delta]$，则 $t+\theta\in[(k-m-1)\delta,(k+1-m)\delta]$ 和 $t(\delta)+\theta\in[(k-m-1)\delta,(k-m)\delta]$。对于 $\mathscr{E}\left[\left\|X_t^\varepsilon-X_{t(\delta)}^\varepsilon\right\|_\infty^2\right]$，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left\|X_t^\varepsilon-X_{t(\delta)}^\varepsilon\right\|_\infty^2\right]&\le\mathbb{E}\left[\sum_{m=0}^{N-1}\sup_{\theta\in[-(m+1)\delta,-m\delta]}\left|X^\varepsilon(t+\theta)-X^\varepsilon(t(\delta)+\theta)\right|^2\right]\\&\le N\max_{m=0,\cdots,N-1}\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in[-(m+1)\delta,-m\delta]}\left|X^\varepsilon(t+\theta)-X^\varepsilon(t(\delta)+\theta)\right|^2\right]\\&=:N\max_{m=0,\cdots,N-1}J(t,m,\delta).\end{aligned}$$

为了完成定理 3.3 的证明，我们只需证明 $J(t,m,\delta)\le C\delta^{2(1-\alpha)}$。

因此，我们讨论以下三种情况：

情况 1： 当 $m\le k-1$ 时，根据 Hölder 不等式，引理 3.1，条件(H1)和(H2)，存在正常数 C，使得

$$J(t,m,\delta)\le C\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in[-(m+1)\delta,-m\delta]}\left|\int_{k\delta+\theta}^{t+\theta}f\left(r,X_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\right)\mathrm{d}r+\int_{k\delta+\theta}^{t+\theta}\sigma_1\left(r,X^\varepsilon(r-\tau)\right)\mathrm{d}B_r^H\right|^2\right]$$
$$\le C\delta\mathbb{E}\left[\int_{k\delta-(m+1)\delta}^{t-m\delta}\left|f\left(r,X_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\right)\right|^2\mathrm{d}r\right]+C\mathbb{E}\left[\left|\int_{k\delta-(m+1)\delta}^{t-(m+1)\delta}\sigma_1\left(r,X^\varepsilon(r-\tau)\right)\mathrm{d}B_r^H\right|^2\right]$$
$$+C\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in[-(m+1)\delta,-m\delta]}\left|\int_{t-(m+1)\delta}^{t+\theta}\sigma_1\left(r,X^\varepsilon(r-\tau)\right)\mathrm{d}B_r^H\right|^2\right]$$
$$+C\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in[-(m+1)\delta,-m\delta]}\left|\int_{k\delta-(m+1)\delta}^{k\delta+\theta}\sigma_1\left(r,X^\varepsilon(r-\tau)\right)\mathrm{d}B_r^H\right|^2\right]$$
$$\le C\delta^2+C\delta^{2(1-\alpha)}\mathbb{E}\left[\left(1+\Lambda_\alpha\left(B^H\right)\right)^2\left(1+\left\|X^\varepsilon\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}\right)^2\right]\le C\delta^{2(1-\alpha)}.$$

情况 2：当 $m\ge k-1$ 时，由条件(H5)，存在正常数 C，使得

$$\left|X^\varepsilon(t+\theta)-X^\varepsilon\left(t(\delta)+\theta\right)\right|^2=\left|\xi(t+\theta)-\xi\left(t(\delta)+\theta\right)\right|^2\le C\delta^2.$$

情况 3：当 $m=k$ 时，由 Hölder 不等式，条件(H1)和(H2)，存在正常数 C，使得

$$J(t,m,\delta)=\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in[-(m+1)\delta,-m\delta]}\left|X^\varepsilon(t+\theta)-X^\varepsilon\left(t_\delta+\theta\right)\right|^2\right]$$
$$\le C\delta^2+C\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in[-(m+1)\delta,-m\delta]}\left|X^\varepsilon(t+\theta)-X^\varepsilon\left(t(\delta)+\theta\right)\right|^2 1_{\{t+\theta>0\}}\right]$$
$$\le C\delta^2+C\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in[-t,-k\delta]}\left|\int_0^{t+\theta}f\left(r,X_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\right)\mathrm{d}r\right|^2\right]+C\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in[-t,-k\delta]}\left|\int_0^{t+\theta}\sigma_1\left(r,X^\varepsilon(r-\tau)\right)\mathrm{d}B_r^H\right|^2\right]$$
$$\le C\delta^{2(1-\alpha)}.$$

综上所述，$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[\left\|X_t^\varepsilon-X_{t(\delta)}^\varepsilon\right\|_\infty^2\right]\le C\delta^{1-2\alpha}$。

定理 3.3 得证。

参考文献[22]中定理 3.1 和文献[23]中引理 3.10 的证明，易得如下结论：

定理 3.4 假设条件(H1)~(H5)成立，那么对任意 $t\in[0,T]$，存在正常数 C，使得

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[\left\|Y_t^\varepsilon\right\|_\infty^2\right]\le C.$$

Step2：根据文献[9]，我们先构造辅助过程 $\left(\hat{X}_t^\varepsilon,\hat{Y}_t^\varepsilon\right)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$，再对区间 $[0,T]$ 进行分割，令小区间长度为 $\delta:=\frac{\tau}{N}<1$。对于过程 $\hat{Y}_t^\varepsilon$，令它的初值 $\hat{Y}_0^\varepsilon=Y_0^\varepsilon=\eta\in\mathbb{C}$，对 $t\in\left[k\delta,\min\left\{(k+1)\delta,T\right\}\right]$，$k\ge0$ 并满足方程

$$\hat{Y}^\varepsilon(s)=\hat{Y}^\varepsilon(k\delta)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{k\delta}^t g\left(X_{k\delta}^\varepsilon,\hat{Y}^\varepsilon(s),\hat{Y}^\varepsilon(s-\tau)\right)\mathrm{d}s+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{k\delta}^t\sigma_2\left(X_{k\delta}^\varepsilon,\hat{Y}^\varepsilon(s),\hat{Y}^\varepsilon(s-\tau)\right)\mathrm{d}W_s,$$

其中 $X_{k\delta}^\varepsilon$ 和 $Y_{k\delta}^\varepsilon$ 分别为在 $k\delta$ 时的慢变量和快变量的解过程。令 $\lfloor\bullet\rfloor$ 表示取整函数，并定义 $t\in[0,T]$ 时，对于过程 $\hat{X}_t^\varepsilon$ 满足方程

$$\hat{X}^\varepsilon(t)=\xi+\int_0^t f\left(s(\delta),X_{s(\delta)}^\varepsilon,\hat{Y}_s^\varepsilon\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma_1\left(s,X^\varepsilon(s-\tau)\right)\mathrm{d}B_s^H.\tag{22}$$

其中 $s(\delta)=\left\lfloor\frac{s}{\delta}\right\rfloor\delta$ 表示处于点 s 右端并且距离其最近的分点。

现在，我们来估计 $X_t^\varepsilon - \hat{X}_t^\varepsilon$ 和 $Y_t^\varepsilon - \hat{Y}_t^\varepsilon$ 这两项。

参考文献[22]中定理 4.2 和文献[23]中引理 3.9 的证明，易得如下结论：

定理 3.5 假设(H1)~(H5)成立，那么对任意 $t \in [0,\tau)$，存在正常数 C 和独立于 ε 的 $\beta > 0$，使得对足够小的 δ 和 $\varepsilon \in (0,1)$，有

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[\left\|Y_t^\varepsilon - \hat{Y}_t^\varepsilon\right\|_\infty^2\right] \le C\varepsilon^{-1}\delta^{1-2\alpha}\mathrm{e}^{\beta\frac{\delta}{\varepsilon}}.$$

接下来，我们估计 $\hat{X}^\varepsilon - X^\varepsilon$，得到以下引理：

定理 3.6 假设条件(H1)~(H5)成立，那么对任意 $t \in [0,T]$，存在正常数 C 和独立于 ε 的 $\beta > 0$，使得对足够小的 δ 和 $\varepsilon \in (0,1)$，有

$$\mathscr{E}\left[\left\|\hat{X}^\varepsilon - X^\varepsilon\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^2\right] \le C\delta^2\left(1+\delta^{-1-2\alpha}\left(1+\varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{\beta\frac{\delta}{\varepsilon}}\right)\right).$$

证明 根据方程(8)和方程(22)，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^\varepsilon - X^\varepsilon\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^2\right] &\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left|\hat{X}^\varepsilon(t) - X^\varepsilon(t)\right|^2\right] \\
&\quad + C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha-1}\left|\hat{X}^\varepsilon(t) - X^\varepsilon(t) - \hat{X}^\varepsilon(s) + X^\varepsilon(s)\right|\mathrm{d}s\right)^2\right] \\
&\quad + C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\int_{-\tau}^0 (t-s)^{-\alpha-1}\left|\hat{X}^\varepsilon(t) - X^\varepsilon(t) - \hat{X}^\varepsilon(s) + X^\varepsilon(s)\right|\mathrm{d}s\right)^2\right] \\
&=: \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3.
\end{aligned}$$

首先，对于第一项 $\mathbf{D}_1$ 和第二项 $\mathbf{D}_2$，由条件(H1)~(H2)，引理 2.6，定理 3.3 和定理 3.5 可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 &\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|\int_0^t \left(f\left(s, X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon\right) - f\left(s, X_s^\varepsilon, \hat{Y}_s^\varepsilon\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_\alpha^2\right] \\
&\quad + C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|\int_0^t \left(f\left(s, X_s^\varepsilon, \hat{Y}_s^\varepsilon\right) - f\left(s, X_{s(\delta)}^\varepsilon, \hat{Y}_s^\varepsilon\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_\alpha^2\right] \\
&\quad + C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|\int_0^t \left(f\left(s, X_{s(\delta)}^\varepsilon, \hat{Y}_s^\varepsilon\right) - f\left(s(\delta), X_{s(\delta)}^\varepsilon, \hat{Y}_s^\varepsilon\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_\alpha^2\right] \\
&\le C\int_0^T \left(\mathbb{E}\left[\left\|Y^\varepsilon - \hat{Y}_{s(\delta)}^\varepsilon\right\|_\infty^2 + \left\|X^\varepsilon - X_{s(\delta)}^\varepsilon\right\|_\infty^2\right]\right)\mathrm{d}s + C\delta^2 \\
&\le C\delta^2\left(1+\delta^{-1-2\alpha}\left(1+\varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{\beta\frac{\delta}{\varepsilon}}\right)\right).
\end{aligned}$$

其次，对于第三项 $\mathbf{D}_3$，有

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_3 &\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\int_{-\tau}^0 (t-s)^{-\alpha-1}\left|\hat{X}^\varepsilon(t) - X^\varepsilon(t) - \hat{X}^\varepsilon(0) + X^\varepsilon(0)\right|\mathrm{d}s\right)^2\right] \\
&\quad + C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\int_{-\tau}^0 (-s)^{-\alpha-1}\left|\hat{X}^\varepsilon(0) - X^\varepsilon(0) - \xi(0) + \xi(0)\right|\mathrm{d}s\right)^2\right] \\
&\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\int_{-\tau}^0 (t-s)^{-\alpha-1}\left|\hat{X}^\varepsilon(t) - X^\varepsilon(t)\right|\mathrm{d}s\right)^2\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} t^{-2\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left|\int_0^t\left(f\left(s,X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon\right)-f\left(s,X_s^\varepsilon,\hat{Y}_s^\varepsilon\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right] \\
&\quad + C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} t^{-2\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left|\int_0^t\left(f\left(s,X_s^\varepsilon,\hat{Y}_s^\varepsilon\right)-f\left(s,X_{s(\delta)}^\varepsilon,\hat{Y}_s^\varepsilon\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right] \\
&\quad + C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} t^{-2\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left|\int_0^t\left(f\left(s,X_{s(\delta)}^\varepsilon,\hat{Y}_s^\varepsilon\right)-f\left(s(\delta),X_{s(\delta)}^\varepsilon,\hat{Y}_s^\varepsilon\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right] \\
&\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} t^{1-2\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t\left(\left\|X_s^\varepsilon-X_{s(\delta)}^\varepsilon\right\|_\infty^2+\left\|Y_s^\varepsilon-\hat{Y}_s^\varepsilon\right\|_\infty^2\right)\mathrm{d}s\right]+C_{\alpha,T}\delta^2 \\
&\le C\delta^2\left(1+\delta^{-1-2\alpha}\left(1+\varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{\beta\frac{\delta}{\varepsilon}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

综上所述，

$$
\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}_s^\varepsilon-X^\varepsilon\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^2\right]\le C\delta^2\left(1+\delta^{-1-2\alpha}\left(1+\varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{\beta\frac{\delta}{\varepsilon}}\right)\right).
$$

定理 3.6 得证。

Step3：对 $\hat{X}^\varepsilon-\bar{X}$ 进行估计。

对 $\forall R>1$，我们定义以下停时 τ_R：

$$
\tau_R := inf\left\{t\ge 0:\left\|B^H\right\|_{\alpha,0,t}\ge R\right\}\wedge T. \tag{17}
$$

定理 3.7 假设(H1)~(H5)成立，那么对任意 $t\in[0,T]$，存在正常数 C 和独立于 ε 的 $\beta>0$，使得对足够小的 δ 和 $\varepsilon\in(0,1)$，有

$$
\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^\varepsilon-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^2\right]\le C\delta^2\left(1+\delta^{-1-2\alpha}\left(1+\varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{\beta\frac{\delta}{\varepsilon}}\right)\right)+C\left(\delta+\varepsilon\delta^{-1}\right)+C\sqrt{R^{-1}\mathscr{E}\left[\left\|B^H\right\|_{\alpha,0,T}^2\right]}.
$$

证明由方程(8)和方程(22)，有

$$
\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^\varepsilon-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^2\right]\le \mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^\varepsilon-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^2\mathbf{1}_{\{\tau_R<T\}}\right]+\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^\varepsilon-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^2\mathbf{1}_{\{\tau_R\ge T\}}\right]. \tag{23}
$$

对于不等式(23)右侧的第一项，根据切比雪夫不等式，可得

$$
\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^\varepsilon-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^2\mathbf{1}_{\{\tau_R<T\}}\right]\le\left(\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^\varepsilon-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^4\right]\right)^{1/2}\left(\mathbb{P}\left(\tau_R<T\right)\right)^{1/2}.
$$

很容易得到 $\mathbb{P}\left(\tau_R<T\right)\le\mathbb{P}\left(\left\|B^H\right\|_{\alpha,0,T}\ge R\right)\le R^{-1}\mathbb{E}\left[\left\|B^H\right\|_{\alpha,0,T}^2\right]$。

根据文献[25]中的引理 7.5 中 $\lim_{R\to\infty}R^{-1}\mathbb{E}\left[\left\|B^H\right\|_{\alpha,0,T}^2\right]=0$，可以得到

$$
\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^\varepsilon-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^2\mathbf{1}_{\{\tau_R<T\}}\right]\le C\sqrt{R^{-1}\mathbb{E}\left[\left\|B^H\right\|_{\alpha,0,T}^2\right]}.
$$

对于不等式(23)右侧的第二项，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^{2}\mathbf{1}_{D}\right] \le\; & C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left|\hat{X}^{\varepsilon}(t)-\bar{X}(t)\right|^{2}\mathbf{1}_{D}\right] \\
& +C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\int_{0}^{t}(t-s)^{-\alpha-1}\left|\hat{X}^{\varepsilon}(t)-\bar{X}(t)-\hat{X}^{\varepsilon}(s)+\bar{X}(s)\right|\mathrm{d}s\right)^{2}\mathbf{1}_{D}\right] \\
& +C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\int_{-\tau}^{0}(t-s)^{\alpha+1}\left|\hat{X}^{\varepsilon}(t)-\bar{X}(t)-\hat{X}^{\varepsilon}(s)+\bar{X}(s)\right|\mathrm{d}s\right)^{2}\mathbf{1}_{D}\right] \\
=:\; & \mathbf{B}_{1}+\mathbf{B}_{2}+\mathbf{B}_{3},
\end{aligned}
$$

其中 $D:=\left\{\left\|B^{H}\right\|_{\alpha,0,T}\le R\right\}$。

对于前两项 $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$，有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{1}+\mathbf{B}_{2} \le\; & C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|\int_{0}^{t}\left(f\left(s(\delta),X_{s(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_{s}^{\varepsilon}\right)-\bar{f}\left(s(\delta),X_{s(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_{\alpha}^{2}\mathbf{1}_{D}\right] \\
& +C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|\int_{0}^{t}\left(\bar{f}\left(s(\delta),X_{s(\delta)}^{\varepsilon}\right)-\bar{f}\left(s,X_{s(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_{\alpha}^{2}\mathbf{1}_{D}\right] \\
& +C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|\int_{0}^{t}\left(\bar{f}\left(s,X_{s(\delta)}^{\varepsilon}\right)-\bar{f}\left(s,X_{s}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_{\alpha}^{2}\mathbf{1}_{D}\right] \\
& +C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|\int_{0}^{t}\left(\bar{f}\left(s,X_{s}^{\varepsilon}\right)-\bar{f}\left(s,\hat{X}_{s}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_{\alpha}^{2}\mathbf{1}_{D}\right] \\
& +C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|\int_{0}^{t}\left(\bar{f}\left(s,\hat{X}_{s}^{\varepsilon}\right)-\bar{f}\left(s,\bar{X}_{s}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}s\right\|_{\alpha}^{2}\mathbf{1}_{D}\right] \\
& +C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|\int_{0}^{t}\left(\sigma_{1}\left(s,\hat{X}^{\varepsilon}(s-\tau)\right)-\sigma_{1}\left(s,\bar{X}(s-\tau)\right)\right)\mathrm{d}B_{s}^{H}\right\|_{\alpha}^{2}\mathbf{1}_{D}\right] \\
& +C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left\|\int_{0}^{t}\left(\sigma_{1}\left(s,X^{\varepsilon}(s-\tau)\right)-\sigma_{1}\left(s,\hat{X}^{\varepsilon}(s-\tau)\right)\right)\mathrm{d}B_{s}^{H}\right\|_{\alpha}^{2}\mathbf{1}_{D}\right] \\
=:\; & \sum_{i=1}^{7}\mathbf{C}_{i}.
\end{aligned}
$$

第一项 $\mathbf{C}_1$ 可写成

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_{1} \le\; & C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_{0}^{t}\left(f\left(s(\delta),X_{s(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_{s}^{\varepsilon}\right)-\bar{f}\left(s(\delta),X_{s(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}s\right|^{2}\right] \\
& +C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_{0}^{t}(t-s)^{-\alpha-1}\left|\int_{s}^{t}\left(f\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_{s}^{\varepsilon}\right)-\bar{f}\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}r\right|\mathrm{d}s\right)^{2}\right] \\
=:\; & \mathbf{C}_{11}+\mathbf{C}_{12}.
\end{aligned}
$$

对于 $\mathbf{C}_{11}$，由条件(H1)和基本不等式，有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_{11} \le\; & C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor-1}\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\left(f\left(k\delta,X_{k\delta}^{\varepsilon},\hat{Y}_{s}^{\varepsilon}\right)-\bar{f}\left(k\delta,X_{k\delta}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}s\right|^{2}\right] \\
& +C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_{\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor\delta}^{t}\left(f\left(s(\delta),X_{s(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_{s}^{\varepsilon}\right)-\bar{f}\left(s(\delta),X_{s(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}s\right|^{2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le C\delta^2 + C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor-1}\left|\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\left(f\left(k\delta,X_{k\delta}^{\varepsilon},\hat{Y}_s^{\varepsilon}\right)-\overline{f}\left(k\delta,X_{k\delta}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right]\\
&\le C\delta^2 + \frac{C}{\delta^2}\max_{0\le k\le\left\lfloor\frac{T}{\delta}\right\rfloor-1}\mathbb{E}\left[\left|\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\left(f\left(k\delta,X_{k\delta}^{\varepsilon},\hat{Y}_s^{\varepsilon}\right)-\overline{f}\left(k\delta,X_{k\delta}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}s\right|^2\right]\\
&\le C\delta^2 + C\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\max_{0\le k\le\left\lfloor\frac{T}{\delta}\right\rfloor-1}\int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}}\int_{\zeta}^{\frac{\delta}{\varepsilon}}J_k\left(s,\zeta\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}
$$

对于 $\mathbf{C}_{12}$，根据 Hölder 不等式和 $\alpha\in(1-H,1/2)$，可以得到

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_{12} &\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t(t-s)^{-\alpha-1}\left|\int_s^t\left(f\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_s^{\varepsilon}\right)-\overline{f}\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}r\right|\mathrm{d}s\right)^2\right]\\
&\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-s)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\times\int_0^t(t-s)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\left|\int_s^t\left(f\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_r^{\varepsilon}\right)-\overline{f}\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}r\right|^2\mathrm{d}s\right]\\
&\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-s)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\left|\int_s^t\left(f\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_r^{\varepsilon}\right)-\overline{f}\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}r\right|^2\mathbf{1}_{l^c}\,\mathrm{d}s\right]\\
&\quad+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-s)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\left|\int_s^t\left(f\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_r^{\varepsilon}\right)-\overline{f}\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}r\right|^2\mathbf{1}_l\,\mathrm{d}s\right]\\
&=:\mathbf{C}_{121}+\mathbf{C}_{122}.
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{1}$ 是一个指示函数，$l:=\left\{t<\left(\left\lfloor\frac{s}{\delta}\right\rfloor+2\right)\delta\right\}$ 和 $l^c:=\left\{t\ge\left(\left\lfloor\frac{s}{\delta}\right\rfloor+2\right)\delta\right\}$。

由(H1)和条件 $\lfloor\lambda_1\rfloor-\lfloor\lambda_2\rfloor\le\lambda_1-\lambda_2+1$，当 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge0$ 时，则

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_{121} &\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-s)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\left|\int_s^{\left(\left\lfloor\frac{s}{\delta}\right\rfloor+1\right)\delta}\left(f\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_r^{\varepsilon}\right)-\overline{f}\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}r\right|^2\mathbf{1}_{l^c}\,\mathrm{d}s\right]\\
&\quad+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-s)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\left|\int_{t(\delta)}^t\left(f\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_r^{\varepsilon}\right)-\overline{f}\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}r\right|^2\mathbf{1}_{l^c}\,\mathrm{d}s\right]\\
&\quad+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-s)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\left(\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{s}{\delta}\right\rfloor-1\right)\sum_{k=\left\lfloor\frac{s}{\delta}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor-1}\left|\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\left(f\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_r^{\varepsilon}\right)-\overline{f}\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}r\right|^2\mathbf{1}_{l^c}\,\mathrm{d}s\right]\\
&\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-s)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\left(\left(\left\lfloor\frac{s}{\delta}\right\rfloor+1\right)\delta-s\right)\left|\int_s^{\left(\left\lfloor\frac{s}{\delta}\right\rfloor+1\right)\delta}\left(f\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_r^{\varepsilon}\right)-\overline{f}\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}r\right|^2\mathbf{1}_{l^c}\,\mathrm{d}s\right]\\
&\quad+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-s)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\left(t-\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor\delta\right)\left|\int_{t(\delta)}^t\left(f\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_r^{\varepsilon}\right)-\overline{f}\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}r\right|^2\mathbf{1}_{l^c}\,\mathrm{d}s\right]\\
&\quad+C\delta^{-1}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-t(\delta))^{\frac{1}{2}-\alpha}\sum_{k=\left\lfloor\frac{s}{\delta}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor-1}\left|\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\left(f\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon},\hat{Y}_r^{\varepsilon}\right)-\overline{f}\left(r(\delta),X_{r(\delta)}^{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{d}r\right|^2\mathbf{1}_{l^c}\,\mathrm{d}s\right]\\
&\le C\delta+C\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\max_{0\le k\le\left\lfloor\frac{T}{\delta}\right\rfloor-1}\int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}}\int_{\zeta}^{\frac{\delta}{\varepsilon}}J_k\left(s,\zeta\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}
$$

对于 $\mathbf{C}_{122}$，设 $j:=\left\{\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor>1\right\}$ 和 $j^c:=\left\{\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor\le1\right\}$，由条件(H1)和 $t-s<\left\lfloor\frac{s}{\delta}\right\rfloor\delta-s+2\delta\le2\delta$，有

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{122} \le & C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^{\left(\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor-1\right)\delta}(t-s)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\left|\int_s^t\left(f\left(r(\delta),X^\varepsilon_{r(\delta)},\hat{Y}^\varepsilon_r\right)-\bar{f}\left(r(\delta),X^\varepsilon_{r(\delta)}\right)\right)\mathrm{d}r\right|^2\mathbf{1}_{j\cap l}\,\mathrm{d}s\right]\\
&+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_{\left(\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor-1\right)\delta}^{t}(t-s)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\left|\int_s^t\left(f\left(r(\delta),X^\varepsilon_{r(\delta)},\hat{Y}^\varepsilon_r\right)-\bar{f}\left(r(\delta),X^\varepsilon_{r(\delta)}\right)\right)\mathrm{d}r\right|^2\mathbf{1}_{j\cap l}\,\mathrm{d}s\right]\\
&+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-s)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\left|\int_s^t\left(f\left(r(\delta),X^\varepsilon_{r(\delta)},\hat{Y}^\varepsilon_r\right)-\bar{f}\left(r(\delta),X^\varepsilon_{r(\delta)}\right)\right)\mathrm{d}r\right|^2\mathbf{1}_{j^c\cap l}\,\mathrm{d}s\right]\\
\le & C\delta^2\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^{\left(\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor-1\right)\delta}(t-s)^{-\alpha+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{j\cap l}\,\mathrm{d}s\right)+C\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_{\left(\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor-1\right)\delta}^{t}(t-s)^{-\alpha+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{j\cap l}\,\mathrm{d}s\right)\\
&+C\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(t-s)^{-\alpha+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{j^c\cap l}\,\mathrm{d}s\right]\\
\le & C\delta^{\frac{3}{2}-\alpha}.
\end{aligned}$$

因此，$\mathbf{C}_1 \le C_{\alpha,T}\dfrac{\varepsilon^2}{\delta^2}\max_{0\le k\le\left\lfloor\frac{T}{\delta}\right\rfloor-1}\int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}}\int_\zeta^{\frac{\delta}{\varepsilon}}J_k(s,\zeta)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\zeta$。

其中$0\le\zeta\le s\le\dfrac{\delta}{\varepsilon}$，$J_k(s,\zeta)=\mathbb{E}\left[\left\langle f\left(k\delta,X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{s\varepsilon+k\delta}\right)-\bar{f}\left(k\delta,X^\varepsilon_{k\delta}\right),f\left(k\delta,X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{\zeta\varepsilon+k\delta}\right)-\bar{f}\left(k\delta,X^\varepsilon_{k\delta}\right)\right\rangle\right]$。(24)

下面，我们来估计$J_k(s,\zeta)$：对$\hat{Y}^\varepsilon(t)$作时间尺度变换，即对固定的k和$s\in[0,\delta]$，

$$\begin{aligned}
\hat{Y}^\varepsilon(s+k\delta)&=\hat{Y}^\varepsilon(k\delta)+\int_{k\delta}^{s+k\delta}g\left(X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon(r),\hat{Y}^\varepsilon(r-\tau)\right)\mathrm{d}r+\int_0^{s/\varepsilon}\sigma_2\left(X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon(r),\hat{Y}^\varepsilon(r-\tau)\right)\mathrm{d}W_r\\
&=\hat{Y}^\varepsilon(k\delta)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s g\left(X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon(r+k\delta),\hat{Y}^\varepsilon(r+k\delta-\tau)\right)\mathrm{d}r\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^s\sigma_2\left(X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon(r+k\delta),\hat{Y}^\varepsilon(r+k\delta-\tau)\right)\mathrm{d}W^*_r,
\end{aligned}\tag{25}$$

其中$W^*_t=W_{t+k\delta}-W_{k\delta}$。对于固定的$\varepsilon>0$和$r\ge0$，设$Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}(r/\varepsilon+\theta)=\hat{Y}^\varepsilon(r+k\delta+\theta)$，$\theta\in[-\tau,0]$。令$\bar{W}_t$是布朗运动且与$W_t$独立。构建过程$Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}$

$$\begin{aligned}
Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}(s/\varepsilon)&=\hat{Y}^\varepsilon(k\delta)+\int_0^{s/\varepsilon}g\left(X^\varepsilon_{k\delta},Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}(r),Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}(r-\tau)\right)\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^{s/\varepsilon}\sigma_2\left(X^\varepsilon_{k\delta},Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}(r),Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}(r-\tau)\right)\mathrm{d}\bar{W}_r\\
&=\hat{Y}^\varepsilon(k\delta)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s g\left(X^\varepsilon_{k\delta},Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}(r/\varepsilon),Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}(r/\varepsilon-\tau)\right)\mathrm{d}r\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^s\sigma_2\left(X^\varepsilon_{k\delta},Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}(r/\varepsilon),Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}(r/\varepsilon-\tau)\right)\mathrm{d}\tilde{W}^\varepsilon_r,
\end{aligned}\tag{26}$$

其中$\tilde{W}^\varepsilon_t=\sqrt{\varepsilon}\bar{W}_{t/\varepsilon}$。

结合(25)和(26)，可得$\left(X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{s+k\delta}\right)\sim\left(X^\varepsilon_{k\delta},Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}_{s/\varepsilon}\right)$，$s\in[0,\delta)$，这里~表示同分布。

对于当$s\in[0,\delta)$时，由不等式(24)，有

$$J_k(s,\zeta)=\mathbb{E}\left[\left\langle f\left(k\delta,X^\varepsilon_{k\delta},Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}_s\right)-\bar{f}\left(k\delta,X^\varepsilon_{k\delta}\right),f\left(k\delta,X^\varepsilon_{k\delta},Y^{X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}}_\zeta\right)-\bar{f}\left(k\delta,X^\varepsilon_{k\delta}\right)\right\rangle\right].$$

设$\mathcal{M}^\varepsilon_{k\delta}$是由$X^\varepsilon_{k\delta},\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}$生成的$\sigma$-代数，它与$\left\{Y^{\chi,\eta}_r:r\ge0\right\}$独立。由文献[28]中的定理 7.1.2，再结合引理 2.7，可以得到$J_k(s,\zeta)\le C\left(1+\mathbb{E}\left[\left\|X^\varepsilon_{k\delta}\right\|^2_\infty\right]+\mathbb{E}\left[\left\|\hat{Y}^\varepsilon_{k\delta}\right\|^2_\infty\right]\right)\mathrm{e}^{-\frac{\rho}{2}(s-\zeta)}$。

因此，对于 $\mathbf{C}_1$， $\mathbf{C}_1 \le C\left(\varepsilon\delta^{-1}+\delta\right)$。

通过定理 3.6，估计 $\sum_{i=2}^{5} C_i$，可以得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{5}\mathbf{C}_i \le{}& C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\left|\bar{f}\left(s(\delta),X^{\varepsilon}_{s(\delta)}\right)-\bar{f}\left(s,X^{\varepsilon}_{s(\delta)}\right)\right|^2 \mathrm{d}s\mathbf{1}_D\right]\\
&+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\left|\bar{f}\left(s,X^{\varepsilon}_{s(\delta)}\right)-\bar{f}\left(s,X^{\varepsilon}_{s}\right)\right|^2 \mathrm{d}s\mathbf{1}_D\right]\\
&+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\left|\bar{f}\left(s,X^{\varepsilon}_{s}\right)-\bar{f}\left(s,\hat{X}^{\varepsilon}_{s}\right)\right|^2 \mathrm{d}s\mathbf{1}_D\right]\\
&+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t (t-s)^{-2\alpha}\left|\bar{f}\left(s,\hat{X}_{s}\right)-\bar{f}\left(s,\bar{X}^{\varepsilon}_{s}\right)\right|^2 \mathrm{d}s\mathbf{1}_D\right]\\
\le{}& C\delta^2\left(1+\delta^{-1-2\alpha}\left(1+\varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{\beta\frac{\delta}{\varepsilon}}\right)\right)+C\lambda^{\alpha-1}\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|^2_{\alpha,\lambda(\tau)}\mathbf{1}_D\right].
\end{aligned}$$

对于 $\mathbf{C}_6$，有

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_6 \le{}& C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[(t-r)^{-2\alpha}+r^{-\alpha}\right]\left\|\hat{\sigma}_1\left(r,\hat{X}^{\varepsilon}(r-\tau)\right)-\sigma_1\left(r,\bar{X}(r-\tau)\right)\right\|^2_{\alpha}\mathbf{1}_D\mathrm{d}r\right]\\
\le{}& C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[(t-r)^{-2\alpha}+r^{-\alpha}\right]\left|\hat{\sigma}_1\left(r,\hat{X}^{\varepsilon}(r-\tau)\right)-\sigma_1\left(r,\bar{X}(r-\tau)\right)\right|^2\mathbf{1}_D\mathrm{d}r\right]\\
&+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[(t-r)^{-2\alpha}+r^{-\alpha}\right]\left(\int_0^r (t-u)^{-\alpha-1}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\left|\sigma_1\left(r,\hat{X}^{\varepsilon}(r-\tau)\right)-\sigma_1\left(r,\bar{X}^{\varepsilon}(r-\tau)\right)-\sigma_1\left(u,\hat{X}^{\varepsilon}(u-\tau)\right)+\sigma_1\left(u,\bar{X}(u-\tau)\right)\right|\mathrm{d}u\right)^2\mathbf{1}_D\mathrm{d}r\right]\\
=:{}&\mathbf{G}_{61}+\mathbf{G}_{62}.
\end{aligned}$$

对于 $\mathbf{C}_{61}$，通过 Hölder 不等式，

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{61} \le{}& C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-r)}\left[(t-r)^{-2\alpha}+r^{-\alpha}\right]\sup_{q\in[-\tau,r]}\mathrm{e}^{-\lambda r}\left|\hat{X}^{\varepsilon}(u)-\bar{X}(u)\right|^2\mathbf{1}_D\mathrm{d}r\right]\\
\le{}& C\lambda^{2\alpha-1}\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|^2_{\alpha,\lambda(\tau)}\mathbf{1}_D\right].
\end{aligned}$$

根据(H2)和文献[25]的引理 7.1，存在正常数 C，使得

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma(t_1,x_1)-\sigma(t_2,x_2)-\sigma(t_1,x_3)+\sigma(t_2,x_4)\right|\\
&\le C|x_1-x_2-x_3+x_4|+C|x_1-x_3||t_2-t_1|^{\beta}+C|x_1-x_3|\left(|x_1-x_2|^{\gamma}+|x_3-x_4|^{\gamma}\right).
\end{aligned}$$

对于 $\mathbf{C}_{62}$，有

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{62} \le{}& C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_{-\tau}^{t-\tau}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[(t-s-\tau)^{-2\alpha}+(s+\tau)^{-\alpha}\right]\times\left(\int_{-\tau}^{s}\frac{\left|\hat{X}^{\varepsilon}(s)-\bar{X}(s)-\hat{X}^{\varepsilon}(u)+\bar{X}(u)\right|}{(s-u)^{\alpha+1}}\mathrm{d}u\right)^2\mathbf{1}_D\mathrm{d}s\right]\\
&+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_{-\tau}^{t-\tau}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[(t-s-\tau)^{-2\alpha}+(s+\tau)^{-\alpha}\right]\times\left(\left|\hat{X}^{\varepsilon}(s)-\bar{X}(s)\right|\int_{-\tau}^{s}\frac{\left|\hat{X}^{\varepsilon}(s)-\hat{X}^{\varepsilon}(u)\right|^{\gamma}}{(s-u)^{1+\alpha}}\mathrm{d}u\right)^2\mathbf{1}_D\mathrm{d}s\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_{-\tau}^{t-\tau}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[(t-s-\tau)^{-2\alpha}+(s+\tau)^{-\alpha}\right]\times\left(\left|\hat{X}^{\varepsilon}(s)-\bar{X}(s)\right|\int_{-\tau}^{s}\frac{\left|\bar{X}(s)-\bar{X}(u)\right|^{\gamma}}{(s-u)^{1+\alpha}}\mathrm{d}u\right)^{2}\mathbf{1}_D\,\mathrm{d}s\right]\\
&\le C\mathbb{E}\int_{-\tau}^{t-\tau}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[(t-s-\tau)^{-2\alpha}+(s+\tau)^{-\alpha}\right]\times\left(1+\Delta\left(\hat{X}^{\varepsilon}\right)+\Delta\left(\bar{X}\right)\right)^{2}\left\|\hat{X}^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^{2}\mathbf{1}_D\,\mathrm{d}s\right],
\end{aligned}
$$

其中 $\Delta\left(\hat{X}^{\varepsilon}\right)=\sup\limits_{s\in[-\tau,T]}\int_{-\tau}^{s}\frac{\left|\hat{X}^{\varepsilon}(s)-\hat{X}(u)\right|^{\gamma}}{(s-u)^{\alpha+1}}\mathrm{d}u$ 和 $\Delta\left(\bar{X}\right)=\sup\limits_{s\in[-\tau,T]}\int_{-\tau}^{s}\frac{\left|\bar{X}(s)-\bar{X}(u)\right|^{\gamma}}{(s-u)^{\alpha+1}}\mathrm{d}u$。

由引理 3.4，在 $\left\|B^H\right\|_{\alpha,0,T}\le R$ 的条件下，存在正常数 C，使得

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(\hat{X}^{\varepsilon}\right)+\Delta\left(\bar{X}\right)&\le C\Lambda_{\alpha}^{\gamma}\left(B^H\right)\left[\left(1+\left\|\hat{X}^{\varepsilon}\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}\right)^{\gamma}+\left(1+\left\|\bar{X}\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}\right)^{\gamma}\right]\sup_{s\in[-\tau,T]}\int_{-\tau}^{s}(s-r)^{(1-\alpha)\gamma-1-\alpha}\mathrm{d}r\\
&\le C\Lambda_{\alpha}^{\gamma}\left(B^H\right)\left(1+\left\|\hat{X}^{\varepsilon}\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}^{\gamma}+\left\|\bar{X}\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}^{\gamma}\right)\le C.
\end{aligned}
$$

其中 $(1-\alpha)\gamma-\alpha>0$ 且 $\alpha\in(0,\gamma/2)$。

因此，可得 $\mathbf{C}_6\le\mathbf{C}_{61}+\mathbf{C}_{62}\le C\lambda^{2\alpha-1}\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^{2}\mathbf{1}_D\right]$。

同理，$\mathbf{C}_7$ 的估计如下 $\mathbf{C}_7\le C\lambda^{2\alpha-1}\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^{\varepsilon}-X\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^{2}\mathbf{1}_D\right]$。

同理，$\mathbf{B}_3$ 的估计为

$$
\mathbf{B}_3\le C\left(\varepsilon\delta^{-1}+\delta\right)+C\lambda^{2\alpha-1}\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^{2}\mathbf{1}_D\right]+C\delta^{2}\left(1+\delta^{-1-2\alpha}\left(1+\varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{\beta\frac{\delta}{\varepsilon}}\right)\right).
$$

综上所述，

$$
\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^{2}\right]\le C\delta^{2}\left(1+\delta^{-1-2\alpha}\left(1+\varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{\beta\frac{\delta}{\varepsilon}}\right)\right)+C\left(\delta+\varepsilon\delta^{-1}\right)+C\sqrt{R^{-1}\mathbb{E}\left[\left\|B^H\right\|_{\alpha,0,T}^{2}\right]}.
$$

引理 3.7 得证。

Step4：对 $X^{\varepsilon}-\bar{X}$ 进行估计。

应用基本不等式，由式(8)和(12)可以得到

$$
\mathbb{E}\left[\left\|X^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^{2}\right]\le 2\mathbb{E}\left[\left\|X^{\varepsilon}-\hat{X}^{\varepsilon}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^{2}\right]+2\mathbb{E}\left[\left\|\hat{X}^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^{2}\right].
$$

根据定理 3.6 和定理 3.7，有

$$
\mathbb{E}\left[\left\|X^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}^{2}\right]\le C\delta^{2}\left(1+\delta^{-1-2\alpha}\left(1+\varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{\beta\frac{\delta}{\varepsilon}}\right)\right)+C\left(\delta+\varepsilon\delta^{-1}\right)+C\sqrt{R^{-1}\mathbb{E}\left[\left\|B^H\right\|_{\alpha,0,T}^{2}\right]}.
$$

综上所述，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|X^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|_{\alpha,\infty(\tau)}^{2}\right]&\le\mathrm{e}^{\lambda T}\mathbb{E}\left[\left\|X^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|_{\alpha,\lambda(\tau)}^{2}\right]\\
&\le C\delta^{2}\left(1+\delta^{-1-2\alpha}\left(1+\varepsilon^{-1}\mathrm{e}^{\beta\frac{\delta}{\varepsilon}}\right)\right)+C\left(\delta+\varepsilon\delta^{-1}\right)+C\sqrt{R^{-1}\mathbb{E}\left[\left\|B^H\right\|_{\alpha,0,T}^{2}\right]}.
\end{aligned}
$$

取 $\delta=\varepsilon(-\ln\varepsilon)^{1/2}$，当 $R\to\infty$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\left\|X^{\varepsilon}-\bar{X}\right\|^{2}_{\alpha,\infty(\tau)}\right]=0.$$

综上所述，即证明了定理 3.1。

4. 结束语

在本篇论文中，我们研究了由分数布朗运动驱动的非自治双尺度随机时滞微分方程的平均原理，其中该方程的慢分量由 Hurst 参数 $H\in(1/2,1)$ 的分数布朗运动驱动，快分量由布朗运动驱动。首先，我们使用广义 Stieltjes 积分对快慢过程进行估计，得到方程(2.1)的解 $\left(X^{\varepsilon},Y^{\varepsilon}\right)$ 的矩估计。其次，我们利用 Khasminskii 技巧，构造了辅助过程 $\left(\hat{X}_t^{\varepsilon},\hat{Y}_t^{\varepsilon}\right)$，估计了 $X_t^{\varepsilon}-\hat{X}_t^{\varepsilon}$ 和 $Y_t^{\varepsilon}-\hat{Y}_t^{\varepsilon}$ 这两项。然后，基于快方程的指数遍历性，我们引入停时序列来控制分数布朗运动的大小进而估计辅助过程 $\hat{X}_t^{\varepsilon}$ 与平均方程解 $\bar{X}_t$ 之间的误差。最后，证明了慢分量 X_t^{ε} 在均方意义下收敛于平均方程的解 $\bar{X}_t$。

基金项目

长安大学中央高校基本科研业务费专项资金资助(CHD300102122113)，陕西省自然科学基础研究计划项目(2023-JC-QN-0009)。

参考文献

[1] Larter, R., Steinmetz, C.G. and Aguda, B.D. (1988) Fast-Slow Variable Analysis of the Transition to Mixed-Mode Oscillations and Chaos in the Peroxidase Reaction. *Journal of Chemical Physics*, **89**, 6506-6514. https://doi.org/10.1063/1.455370

[2] Chow, P.L. (1973) Thermoelastic Wave Propagation in a Random Medium and Some Related Problems. *International Journal of Engineering Science*, **11**, 953-971. https://doi.org/10.1016/0020-7225(73)90010-4

[3] Krauskopf, B., Osinga, H.M. and Galan-Vioque, J. (2007) Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems: Path Following and Boundary Value Problems. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6356-5

[4] Dubbeldam, J.L. and Krauskopf, B. (1999) Self-Pulsations of Lasers with Saturable Absorber: Dynamics and Bifurcations. *Optics Communications*, **159**, 325-338. https://doi.org/10.1016/S0030-4018(98)00568-9

[5] Bogoliubov, N.N. and Mitropolsky, Y.A. (1961) Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations. Gordon and Breach Science Publishers, New York.

[6] Gikhman, I.I. (1947) A Method of Constructing Random Process. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, **58**, 961-964.

[7] Volosov, V.M. (1962) Averaging in Systems of Ordinary Differential Equations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **108**, 3-126. https://doi.org/10.1070/RM1962v017n06ABEH001130

[8] Besjes, J.G. (1968) On the Asymptotic Methods for Non-Linear Differential Equations. *Journal of Mecanique*, **8**, 357-372.

[9] Khasminskii, R.Z. (1968) On the Principle of Averaging the Itô Stochastic Differential Equations. *Kybernetika*, **4**, 260-279.

[10] Freidlin, M.I. and Wentzell, A.D. (1998) Random Perturbation of Dynamical Systems. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0611-8

[11] Freidlin, M.I. and Wentzell, A.D. (2006) Long-Time Behavior of Weakly Coupled Oscillators. *Journal of Statistical Physics*, **123**, 1311-1337. https://doi.org/10.1007/s10955-006-9133-8

[12] Golec, J. and Ladde, G. (1990) Averaging Principle and Systems of Singularly Perturbed Stochastic Differential Equations. *Journal of Statistical Mechanics*, **31**, 1116-1123. https://doi.org/10.1063/1.528792

[13] Givon, D., Kevrekidis, I.G. and Kupferman, R. (2006) Strong Convergence of Projective Integration Schemes for Singularly Perturbed Stochastic Differential Systems. *Communications in Mathematical Sciences*, **4**, 707-729. https://doi.org/10.4310/CMS.2006.v4.n4.a2

[14] Cerrai, S. and Freidlin, M. (2009) Averaging Principle for A Class of Stochastic Reaction-Diffusion Equations. *Probability Theory and Related Fields*, **144**, 137-177. https://doi.org/10.1007/s00440-008-0144-z

[15] Fu, H.B. and Duan, J.Q. (2011) An Averaging Principle for Two Time-Scales Stochastic Partial Differential Equations. *Stochastics and Dynamics*, **11**, 353-367. https://doi.org/10.1142/S0219493711003346

[16] Fu, H.B. and Liu, J.C. (2011) Strong Convergence in Stochastic Averaging for Two Time-Scales Stochastic Partial Differential Equations. *The Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **384**, 70-86. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.02.076

[17] Xu, J. (2017) L^p-Strong Convergence of the Averaging Principle for Slow-Fast SPDEs with Jumps. *The Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **445**, 342-373. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.07.058

[18] Xu, Y., Pei, B. and Guo, R. (2015) Stochastic Averaging for Slow-Fast Dynamical Systems with Fractional Brownian Motion. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, **20**, 2257-2267. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.2257

[19] 郭蓉. 分数阶时滞微分方程的随机平均法[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2019, 42(2): 300-306.

[20] Mao, W., You, S., Wu, X. and Mao, X. (2015) On the Averaging Principle for Stochastic Delay Differential Equations with Jumps. *Advances in Difference Equations*, **2015**, Article No. 70. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0411-0

[21] Wang, P.G. and Xu, Y. (2020) Averaging Method for Neutral Stochastic Delay Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motion. *Journal of Function Spaces*, **2020**, Article ID: 5212690. https://doi.org/10.1155/2020/5212690

[22] Bao, J., Song, Q., Yin, G. and Yuan, C. (2017) Ergodicity and Strong Limit Results for Two-Time-Scale Functional Stochastic Differential Equations. *Stochastic Analysis and Applications*, **35**, 1030-1046. https://doi.org/10.1080/07362994.2017.1349613

[23] Han, M., Xu, Y., Pei, B. and Wu, J.L. (2022) Two-Time-Scale Stochastic Differential Delay Equations Driven by Multiplicative Fractional Brownian Noise: Averaging Principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **510**, Article ID: 126004. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126004

[24] Zähle, M. (1998) Integration with Respect to Fractal Functions and Stochastic Calculus. I. *Probability Theory and Related Fields*, **111**, 333-374. https://doi.org/10.1007/s004400050171

[25] Nualart, D. and Răşcanu, A. (2002) Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motion. *Collectanea Mathematica*, **53**, 55-81.

[26] Atienza, M.J., Lu, K. and Schmalfuß, B. (2010) Random Dynamical Systems for Stochastic Partial Differential Equations Driven by a Fractional Brownian Motion. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, **14**, 473-493. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2010.14.473

[27] Shevchenko, G. (2013) Mixed Stochastic Delay Differential Equations. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, **89**, 181-195. https://doi.org/10.1090/S0094-9000-2015-00944-3

[28] Oksendal, B. (2003) Stochastic Differential Equations. 6th Edition, Springer, Berlin.