Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(6), 980-985
Published Online June 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.96116

Hans汉斯

Research on the Application of Block Matrix

Ziqian Yu

Northeast Forestry University, Harbin Heilongjiang
Email: ziqianyu_yu@163.com

Received: Jun. 8th, 2020; accepted: Jun. 23rd, 2020; published: Jun. 30th, 2020

Abstract

In advanced mathematics, block matrix is a very important concept. It can make the representation of matrix more simple and clear, and simplify the operation of matrix. In this paper, through the simple analysis of the calculation and proof of block matrix, we discuss the method of matrix with n-order special attribute, and use block matrix to describe the solution of linear system and its related content.

Keywords

Matrix, Determinant, Eigenvalue

分块矩阵的应用研究

于子倩

东北林业大学，黑龙江 哈尔滨
Email: ziqianyu_yu@163.com

收稿日期：2020年6月8日；录用日期：2020年6月23日；发布日期：2020年6月30日

摘 要

在高等数学中，分块矩阵是一个十分重要的概念，它可以使矩阵的表示更简单明了，使矩阵的运算简单化。本文通过对分块矩阵的计算和证明两个方面的简单分析，讨论了具有n阶特殊属性的矩阵的方法，使用块矩阵描述线性系统及其相关内容的解决方案。

关键词

矩阵，行列式，特征值

文章引用: 于子倩. 分块矩阵的应用研究[J]. 应用数学进展, 2020, 9(6): 980-985.
DOI: 10.12677/aam.2020.96116

1. 引言

在数学尤其高等代数的名词中，表示各区域间有关联的数据被称之为矩阵(英文名 Matrix)，举例比如统计数据。这个定义很好地解释了代码 Matrix 是用来制造世界数学的逻辑基础[1]。由方程组的系数和常数所构成的方阵是数学中的矩阵，在解决数学线性方程组的方法上用其会更方便直观。对于方程组，如下

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \tag{1.1}$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \tag{1.2}$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \tag{1.3}$$

我们可以构成一个矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

因为这些数字或字母定期地排列在一起，它的形状像矩形，所以数学家们将其称之为矩阵。在数学上，矩阵是一个矩形的行数组。矩阵由数字组成，或是更一般的由环中的元素组成。

作为数学工具之一的矩阵，它有其重要的实用价值，在很多学科中常见，比如：高等代数、统计分析、组合数学，以及线性规划等，在现实生活中，许多实际问题也都可以借用矩阵用于被抽出并执行，例如在事件表中常用的循环等。相对于矩阵的概念和性质[1] [2] [3]，矩阵的计算和应用更值得我们研究和学习[4] [5] [6] [7]。其中当矩阵的行数和列数相当大时，此时矩阵的计算和证明将是一个非常繁琐的过程，所以我们需要一个新的矩阵处理工具使这些问题有更好的解决方案[7] [8] [9] [10] [11]，所以解决高阶矩阵是矩阵相关内容的一个非常重要的部分。

本文将从计算和证明方面来探讨分块矩阵的应用。

2. 分块矩阵在计算方面的应用

2.1. 逆矩阵方面的应用

定理 2.1 [6]假设四分块方阵

$$P=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

B 是 r 阶，C 是 k 阶，当 B 与$(C-DB^{-1}A)$两个方阵是可逆的，那么 P 也是可逆的，

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} -\left(C-DB^{-1}A\right)^{-1}DB^{-1} & \left(C-DB^{-1}A\right)^{-1} \\ B^{-1}+B^{-1}A\left(C-DB^{-1}A\right)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A\left(C-DB^{-1}A\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

特例：

1) 当 $A=0, D=0$，B 与 C 都可逆时，有 $P^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

2) 当 $A=0, D\neq 0$，B 与 C 都可逆时，有 $P^{-1}=\begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

3) 当 $A\neq 0, D\neq 0$，B 与 C 都可逆时，有 $P^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$

定理 2.2 [6]设四分块方阵

$$Q=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

里面的 A 是一个 r 阶方阵，D 是一个 k 阶方阵，当 A 和($D-CA^{-1}B$)是可逆矩阵时，则 Q 是可逆矩阵，且

$$Q^{-1}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \\ -\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D-CAB\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

特例：

1) 当 $B=0, C=0$，A 与 D 都可逆时，有 $Q^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$

2) 当 $B\neq 0, C=0$，A 与 D 都可逆时，有 $Q^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$

3) 当 $B=0, C\neq 0$，A 与 D 都可逆时，有 $Q^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$

此结论参考定理 2.1。

例 2.1 求下列逆矩阵的值，其中

$$M=\begin{pmatrix} 0 & m_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{n-1} \\ m_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\left(m_i\neq 0, i=1,\cdots,n\right)$$

解：设

$$M=\begin{pmatrix} 0 & N \\ m_n & 0 \end{pmatrix}$$

其中

$$N=\begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{n-1} \end{pmatrix}$$

而

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & m_n^{-1} \\ N^{-1} & 0 \end{pmatrix}, N^{-1}=\begin{pmatrix} m_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$$

所以

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/m_n \\ 1/m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/m_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

2.2. 行列式计算方面的应用

定理 2.3 [6]设矩阵

$$H=\begin{bmatrix} P_1 & & \cdots & P \\ 0 & P_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & P_s \end{bmatrix}$$

其中 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 均为方阵，则 $|H|=|P_1||P_2|\cdots|P_s|$。

例 2.2 计算下列行列式的值

$$|P|=\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & z \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & z & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & z & \cdots & x & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & \cdots & 0 & x & 0 \\ z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解：令

$$A=\begin{bmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{bmatrix}=D,\ B=\begin{bmatrix} & & & z \\ & & z & \\ & \iddots & & \\ z & & & \end{bmatrix}=C$$

则

$$|P|=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|$$

因为

$$\begin{aligned} & D-CA^{-1}B \\ & =\begin{bmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} & & & z \\ & & z & \\ & \iddots & & \\ z & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^{-1} & & & \\ & x^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & & z \\ & & z & \\ & \iddots & & \\ z & & & \end{bmatrix} \\ & =\begin{bmatrix} x-z^2x^{-1} & & & \\ & x-z^2x^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-z^2x^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$|P| = x^n\left(x - z^2x^{-1}\right)^n = \left(x^2 - z^2\right)^n$$

2.3. 矩阵特征值方面的应用

定理 2.4 [6]假设 n 阶矩阵 A，λ 是数字，如果有非零解向量的方程 $Ax = \lambda x$，那么命名 λ 为 A 的一个特征值，与特征值 λ 对应的特征向量就是相应的非零解向量 X。

定理 2.5 [6]设 n 阶矩阵 A, A 的特征矩阵是 $\lambda I - A$，其中含有未知量 λ，λ 的 n 次多项式就是行列式 $|\lambda I - A|$，也叫做 A 的特征多项式，A 的特征方程是 $|\lambda I - A| = 0$，λ 是特征值，是 $|\lambda I - A| = 0$ 的根，因此还叫做特征根。假设 λ 是 $|\lambda I - A| = 0$ 的 n_1 重根，那么 λ 就为 A 的 n_1 重特征根(值)。

定理 2.6 [6]幂等矩阵 A 与

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_r \end{bmatrix}$$

相似，其中 $r = R(A)$。

1) 当 $R(A) = 0$ 时，即 $A = 0$，结论显然成立。

2) 设 $0 < r < n$，非零不可逆矩阵 A，因为 $A^2 = A$，所以有可逆矩阵 P，

$$P^{-1}AP = P^{-1}A_1P + P^{-1}A_2P, r = R(A)$$

3. 分块矩阵在证明方面的应用

例 3.1 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，A_s 是从中取 s 行构成的矩阵为 B，则

$$R(A_s) \geq R(A) + s - m$$

证明：不妨假设 A 的前 s 行命为 A_s，而 $m - s$ 行的小矩阵叫做 B，则显然有

$$R(A+B) \leq R(A) + R(B)$$

于是

$$R\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} = R(A_s) + m - s$$

例 3.2 设 T 为 $m \times n$ 阶矩阵，且 $R(T) = r, r > 0$，证明 T 可分解成两个秩为 r 的 $m \times r, r \times n$ 阶矩阵的乘积。

证明：因为 $R(T) = r$，即会有 m 阶可逆矩阵 P 与 n 阶可逆矩阵 Q，所以有

$$T = P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = P\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}Q = T_1T_2$$

其中

$$T_1 = P\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}Q$$

且

$$R(T_1) = R(T_2) = r.$$

参考文献

[1] 居余马. 线性代数[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

[2] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编. 高等代数[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[3] 王祖朝, 褚宝增. 线性代数[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2008.

[4] 黄承绪, 徐德余. Jordan 标准形与矩阵最小多项式[J]. 绵阳师范高等专科学校学报, 1994(S1): 27-29.

[5] 王超亚. 分块矩阵的若干初等运算及应用[J]. 计算机光盘软件与应用, 2013(5): 161-162.

[6] 王莲花, 李念伟, 梁志新. 分块矩阵在行列式计算中的应用[J]. 河南教育学院学报(自然科学卷), 2005, 14(3): 12-15.

[7] 曾聃, 徐运阁. 矩阵的逆及秩的降阶方法[J]. 大学数学, 2019, 35(5): 117-121.

[8] 曹重光. 体上分块矩阵群逆的某些结果[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2001(3): 5-7.

[9] Ma, C. (2019) Normal Completions of Block Partial Matrices. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **50**, 353-363. https://doi.org/10.1007/s13226-019-0330-y

[10] Gumus, M., Liu, J.Z., Raouafi, S. and Tam, T.-Y. (2018) Positive Semi-Definite 2 × 2 Block Matrices and Norm Inequalities. *Linear Algebra and Its Applications*, **551**, 83-91. https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.03.046

[11] Mosić, D. and Djordjević, D.S. (2018) Block Representations of the Generalized Drazin Inverse. *Applied Mathematics and Computation*, **331**, 200-209. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.03.027