Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(3), 569-574
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.83063

Hans汉斯

Wiener Index of Complements of Line Graphs

Xiaohong Chen, Zhonghua Li, Xinhui An

College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang
Email: xhongchen0511@163.com, lizhonghua0868@126.com, xjaxh@163.com

Received: Mar. 5th, 2019; accepted: Mar. 20th, 2019; published: Mar. 27th, 2019

Abstract

Let G be a graph of size $q \geq 1$. The jump graph $J(G)$ of G is the complement of the line graph $L(G)$ of G. The Wiener index $W(G)$ of G is the sum of the distances between all pairs of vertices in G. In this paper, we determine the Wiener index of $J(G)$, where $J(G)$ is connected.

Keywords

Line Graphs, Jump Graph, Wiener Index

线图的补图的Wiener指标

陈小红，李中华，安新慧

新疆大学，数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐
Email: xhongchen0511@163.com, lizhonghua0868@126.com, xjaxh@163.com

收稿日期：2019年3月5日；录用日期：2019年3月20日；发布日期：2019年3月27日

摘　要

令G是一个边数不小于1的图。我们称图G的线图$L(G)$的补图为跳图，记作$J(G)$。图G的Wiener指标是图G中所有点对的距离之和。在本文中，我们确定了图$J(G)$的Wiener指标，其中图$J(G)$是连通的。

关键词

线图，跳图，Wiener指标

文章引用: 陈小红, 李中华, 安新慧. 线图的补图的 Wiener 指标[J]. 应用数学进展, 2019, 8(3): 569-574.
DOI: 10.12677/aam.2019.83063

1. 引言

本篇文章中所有的图都限定为无向的简单图。相关的术语和符号可以参考文献[1]。设 $G=(V(G),E(G))$ 是一个简单图，其中 $V(G)$ 是图 G 的顶点集，$E(G)$ 是图 G 的边集，我们分别用 $v(G)$ 和 $e(G)$ 记作 $|V(G)|$ 和 $|E(G)|$ 的阶。通常我们用 P_n 表示阶为 n 的路。对于 $V(G)$ 中的每一个点 v，用 $N_G(v)$ 表示与点 v 相邻的所有顶点的集合，称为 v 的邻点集。$d_G(v)=|N_G(v)|$ 称为点 v 的度数。一般地，我们用 $H\subseteq G$ 表示 H 是图 G 的一个子图或者表示 H 同构于 G 中的一个子图。

在一个连通图 G 中，记 $d_G(u,v)$ 为 G 中任意两个点 u 和 v 之间的距离(两点之间最短路的长度)，$W(G)$ 为图 G 的 Wiener 指标，定义为 $W(G)=\frac{1}{2}\sum_{u,v\in V(G)} d_G(u,v)$。

这个概念最初是由 Harry Wiener 在文献[2]中提到的。从那时起，许多研究者对 Wiener 指标进行了广泛的研究。关于一些 Wiener 指标的化学应用和数学研究的调查可以参考文献[3] [4]以及其中引用的参考资料。

$L(G)$ 为图 G 的线图，其中 $V(L(G))=E(G)$ 并且对于任意两个点在 $L(G)$ 中相邻当且仅当这两个点对应的边在 G 中相邻。$\overline{G}$ 为图 G 的补图，其中 $V(\overline{G})=V(G)$ 并且对于任意两个点 u 和 v 在 $\overline{G}$ 中相邻当且仅当 u 和 v 在 G 中不相邻。在文献[5]中 Chartrand 等研究者称线图的补图为跳图，记作 $J(G)$ 并且给出了一些跳图是哈密顿的充分条件。吴和孟在文献[6]中给出了一些哈密顿跳图的结构。我们可以在文献[7] [8] [9] [10]中查阅到线图的补图的更多结果。

在文献[5]中 Chartrand 等研究者证明了如果一个跳图 $J(G)$ 是连通的，则它的直径不超过 4。在文献[2]中吴和郭给出了跳图的直径 r 在 1 到 4 之间的原图 G 的结构。在本文中，我们将根据吴和郭的结果确定连通的跳图 $J(G)$ 的 Wiener 指标。

2. 主要内容

2.1. 预备知识

在文献[5]中 Chartrand 等人给出了下面的结果。

定理 2.1.1 [5]如果 $J(G)$ 是连通的，则 $diam(J(G))\le 4$。

在文献[2]中吴和郭根据上面的结果给出了下面的定理。

定理 2.1.2 [2]对于一个边数不小于 1 的图 G，如果 $J(G)$ 是连通的，则：

1) $diam(J(G))=1$ 当且仅当 $\Delta(J(G))=1$；

2) $diam(J(G))=4$ 当且仅当：

a) G 包含一个子图 C_4^+，C_4^+ 是由给 C_4 $(V(C_4)=\{u,v,w,x\})$ 中的点 u 加一个新的邻点，

b) 如果 G 中存在一条边关联 v 或 x，则这条边必须是 vx。此外，如果 $u,w\in E(G)$，则 $vx\in E(G)$，

c) G 中任意一条除 C_4 以外的边都与 u 关联；

3) $diam(J(G))=3$ 当且仅当：

a) G 包含 P_5，

b) 对于 G 中任意一条不在 P_5 上的边必有一个端点在 P_5 的 2 度顶点上，

c) 同时 G 不满足(2)中的情况；

4) $diam\left(J\left(G\right)\right)=2$，其他。

在本文，我们主要根据上面对线图的补图的刻画来计算线图的补图的 Wiener 指标。

2.2. 直径小于等于 2

引理 2.2.1 如果 $diam\left(J\left(G\right)\right)\le 2$，$e\left(G\right)=m$，$v\left(G\right)=n$，则 $W\left(G\right)=n\left(n-1\right)-m$。

证明：因为 $diam\left(J\left(G\right)\right)\le 2$，所以对于任意的点 $u,v\in V\left(G\right)$，u 和 v 之间的距离为 1 或 2。因此

$$W\left(G\right)=m+2\left(\binom{n}{2}-m\right)=n\left(n-1\right)-m.$$

定理 2.2.2 对于一个边数为 m 的图 G，如果 $diam\left(J\left(G\right)\right)\le 2$，则

$$W\left(J\left(G\right)\right)=\frac{1}{2}m\left(m-3\right)+\frac{1}{2}\sum_{v\in V\left(G\right)}d_G^2\left(v\right)$$

证明：因为 $e\left(J\left(G\right)\right)+e\left(L\left(G\right)\right)=\binom{m}{2}$，所以

$$e\left(J\left(G\right)\right)=\binom{m}{2}-e\left(L\left(G\right)\right)=\frac{1}{2}m\left(m-1\right)-e\left(L\left(G\right)\right),$$

其中 $e\left(L\left(G\right)\right)=\sum_{v\in V\left(G\right)}\binom{d_G\left(v\right)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{v\in V\left(G\right)}\left(d_G^2\left(v\right)-d_G\left(v\right)\right)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V\left(G\right)}d_G^2\left(v\right)-m$。

所以由引理 2.2.1 知：

$$\begin{aligned}W\left(J\left(G\right)\right)&=m\left(m-1\right)-e\left(J\left(G\right)\right)=\frac{1}{2}m\left(m-1\right)+e\left(L\left(G\right)\right)\\&=\frac{1}{2}m\left(m-3\right)+\frac{1}{2}\sum_{v\in V\left(G\right)}d_G^2\left(v\right)\end{aligned}.$$

2.3. 直径等于 3

由定理 2.1.2 知：当 $diam\left(J\left(G\right)\right)=3$，则图 G 的结构如图 1 所示。

令 V' 和 E' 分别作为 P_5 的顶点集和边集，且 $V'=\left\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\right\}$，$E'=\left\{e_1,e_2,e_3,e_4\right\}$。假设 $d_G\left(v_2\right)=d_2+2$，$d_G\left(v_3\right)=d_3+2$，$d_G\left(v_4\right)=d_4+2$ 并且 $\left|N_G\left(v_2\right)n\cap N_G\left(v_3\right)\right|=n_1$，$\left|N_G\left(v_3\right)n\cap N_G\left(v_4\right)\right|=n_2$，$\left|N_G\left(v_2\right)n\cap N_G\left(v_4\right)\right|=n_3$，显然 $n_1\le\min\left\{d_2,d_3\right\}$，$n_2\le\min\left\{d_3,d_4\right\}$，$n_3\le\min\left\{d_2,d_4\right\}$。

定理 2.3.1 对于一个边数为 m 的图 G，如果 $diam\left(J\left(G\right)\right)=3$，则

$$\begin{aligned}W\left(J\left(G\right)\right)=&d_2^2+d_3^2+d_4^2+d_2d_3+d_3d_4+d_2d_4+5\left(m-4\right)\\&-\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)+2\left(n_1+n_2\right)+2n_3+10\end{aligned},$$

其中 $m-4=d_2+d_3+d_4$ 且 $n_1+n_2+n_3\le m-4$。

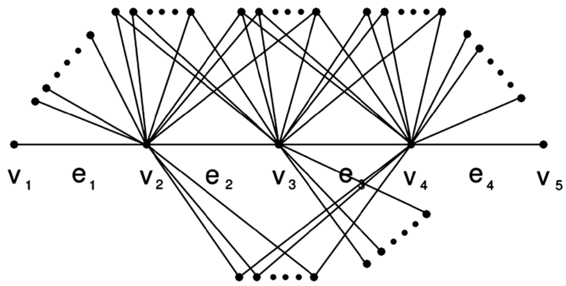

Figure 1. P_5^+

图 1. P_5^+

证明： 首先 $W(J(P_5)) = W(P_4) = 10$。

如果 $G \neq P_5$，对于任意边 $v_i x \in E(G)(i = 2,3,4)$ 且 $x \notin V'$，则在 $J(G)$ 中 $v_i x$ 到 $v_1 v_2$，$v_2 v_3$，$v_3 v_4$，$v_4 v_5$ 的距离之和为 6。令 $S = V(G) \setminus V'$ 且 $M = E(G) \setminus E'$。有

$$W(J(G)) = W(J(P_5)) + 6(m-4) + W(M),$$

其中 $W(M) = \sum_{i,j \in \{2,3,4\}, x,y \in S} d_{J(G)}(v_i x, v_j y)$。

现在我们来计算 $W(M)$：

对于任意边 $v_2 x, v_3 x \in E(G)$ 和 $v_3 y, v_4 y \in E(G)$ 其中 $x, y \in S$，则 $d_{J(G)}(v_2 x, v_3 x) = d_{J(G)}(v_3 y, v_4 y) = 2$。因此

$$W_{11} = \sum_{x \in S} d_{J(G)}(v_2 x, v_3 x) + \sum_{y \in S} d_{J(G)}(v_3 y, v_4 y) = 2(n_1 + n_2).$$

对于任意边 $v_2 x, v_4 x \in E(G)(x \in S)$，则 $d_{J(G)}(v_2 x, v_4 x) = 3$。因此

$$W_{12} = \sum_{x \in S} d_{J(G)}(v_2 x, v_4 x) = 3n_3.$$

对于任意边 $v_i x, v_j y \in E(G)(x, y \in S, i, j \in \{2,3,4\}$ 且 $i \neq j)$，则 $d_{J(G)}(v_i x, v_j y) = 1$。因此

$$W_{13} = \sum_{\substack{i,j \in \{2,3,4\}, i \neq j \\ x,y \in S, x \neq y}} d_{J(G)}(v_i x, v_j y) = d_2 d_3 + d_2 d_4 + d_3 d_4 - (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2).$$

对于任意边 $v_i x, v_i y \in E(G)(x, y \in S, i \in (2,3,4))$，则 $d_{J(G)}(v_i x, v_i y) = 2$。因此

$$W_{14} = \sum_{i \in \{2,3,4\}, x,y \in S} d_{J(G)}(v_2 x, v_4 y) = d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 - (d_2 + d_3 + d_4).$$

综上所述：

$$\begin{aligned} W(M) &= W_{11} + W_{12} + W_{13} + W_{14} \\ &= d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_2 d_3 + d_2 d_4 + d_3 d_4 - (m-4). \\ &\quad -(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + 2(n_1 + n_2) + 3n_3 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} W(J(G)) &= d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_2 d_3 + d_2 d_4 + d_3 d_4 + 5(m-4) \\ &\quad -(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + 2(n_1 + n_2) + 3n_3 + 10 \end{aligned}.$$

2.4. 直径等于 4

由定理 2.1.2 知：当 $diam\left(J\left(G\right)\right)=4$，$G$ 有三种结构形式 G_n,H_n 和 F_n，如图 2 所示。

$$V\left(G_n\right)=\left\{u,v,w,x,y_1,\cdots,y_{n-4}\right\},\quad E\left(G_n\right)=\left\{uv,uw,wx,xu\right\}\cup\left\{uy_i\mid 1\le i\le n-4\right\}.$$

$$V\left(H_n\right)=\left\{u,v,w,x,y_1,\cdots,y_{n-4}\right\},\quad E\left(H_n\right)=\left\{uv,uw,wx,xu,vx\right\}\cup\left\{uy_i\mid 1\le i\le n-4\right\}.$$

$$V\left(F_n\right)=\left\{u,v,w,x,y_1,\cdots,y_{n-4}\right\},\quad E\left(F_n\right)=\left\{uv,uw,wx,xu,vx,uw\right\}\cup\left\{uy_i\mid 1\le i\le n-4\right\}.$$

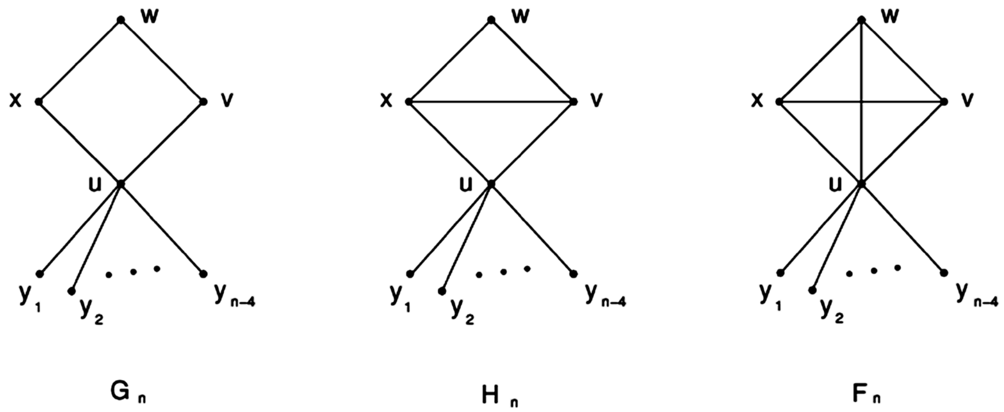

Figure 2. G_n,H_n and F_n
图 2. G_n,H_n 和 F_n

定理 2.4.1 对于一个点数为 n 的图 G，如果 $diam\left(J\left(G\right)\right)=3$，则

$$W\left(J\left(G\right)\right)=\begin{cases}n^2-3n+10, & 若G\cong G_n;\\ n^2-2n+11, & 若G\cong H_n;\\ n^2+23, & 若G\cong F_n.\end{cases}$$

证明： 对于任意图 G，如果 $G\cong G_n$，则对于任意边 $uy_i,uy_j\in E\left(G\right)\left(i,j\in\left\{1,2,\cdots,n-4\right\}且i\ne j\right)$，有 $d_{J(G)}\left(uy_i,uy_j\right)=2$。因此

$$W_{21}=\sum_{i,j\in\{1,2,\cdots,n-4\}}d_{J(G)}\left(uy_i,uy_j\right)=2\binom{n-4}{2}=n^2-9n+20.$$

对于任意边 $uy_i,uv,ux\in E\left(G\right)\left(i\in\left\{1,2,\cdots,n-4\right\}\right)$，则 $d_{J(G)}\left(uy_i,uv\right)=d_{J(G)}\left(uy_i,ux\right)=2$。因此

$$W_{22}=\sum_{i\in\{1,2,\cdots,n-4\}}d_{J(G)}\left(uy_i,uv\right)+\sum_{i\in\{1,2,\cdots,n-4\}}d_{J(G)}\left(uy_i,ux\right)=2\times2\left(n-4\right)=4n-16.$$

对于任意边 $uy_i,wv,wx\in E\left(G\right)\left(i\in\left\{1,2,\cdots,n-4\right\}\right)$，显然 $d_{J(G)}\left(uy_i,wv\right)=d_{J(G)}\left(uy_i,wx\right)=1$。因此

$$W_{23}=\sum_{i\in\{1,2,\cdots,n-4\}}d_{J(G)}\left(uy_i,wv\right)+\sum_{i\in\{1,2,\cdots,n-4\}}d_{J(G)}\left(uy_i,wx\right)=2\times\left(n-4\right)=2n-8.$$

同理，$d_{J(G)}\left(ux,xw\right)=d_{J(G)}\left(uv,vw\right)=3$，$d_{J(G)}\left(ux,uv\right)=4$，$d_{J(G)}\left(wv,wx\right)=2$，$d_{J(G)}\left(wx,uv\right)=d_{J(G)}\left(ux,vw\right)=1$。

综上所述：

$$\begin{aligned}W(M) &= W_{21}+W_{22}+W_{23}+d_{J(G)}(ux,xw)+d_{J(G)}(uv,vw)+d_{J(G)}(ux,uv)\\&\quad+d_{J(G)}(wv,wx)+d_{J(G)}(wx,uv)+d_{J(G)}(ux,vw)\\&=n^2-n+20+4n-16+2n-8+2\times3+4+2+2\times1\\&=n^2-3n+10\end{aligned}.$$

根据上面的方法我们得到，若 $G\cong H_n$ 或 $G\cong F_n$，有

$$W(J(G))=\begin{cases}n^2-2n+11, & 若G\cong H_n;\\ n^2+23, & 若G\cong F_n.\end{cases}$$

基金项目

国家自然科学基金青年科学基金(NO. 11801487)。

参考文献

[1] Dobrynin, A.A., Entringer, R. and Gutman, I. (2001) Wiener Index of Trees: Theory and Applications. *Acta Applicandae Mathematicae*, **66**, 211-249. https://doi.org/10.1023/A:1010767517079

[2] An, X. and Wu, B. (2007) Hamiltonicity of Complements of Middle Graphs. *Discrete Mathematics*, **307**, 1178-1184. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.07.028

[3] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. American Elsevier, New York, Macmillan, London. https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2

[4] Chen, X., Liu, J., Xie, D. and Meng, J. (2016) Edge Connectivity and Super Edge-Connectivity of Jump Graphs. *Information and Optimization Sciences*, **37**, 233-246. https://doi.org/10.1080/02522667.2015.1103062

[5] Chartrand, G., Hevia, H., Jarrett, E.B. and Schultz, M. (1997) Subgraph Distances in Graphs Defind by Edge Transfers. *Discrete Mathematics*, **170**, 63-79. https://doi.org/10.1016/0012-365X(95)00357-3

[6] Gutman, I. and Körtvelyesia, T. (1995) Wiener Indices and Molecular Surfaces. *Zeitschrift für Naturforschung*, **50**, 669-671.

[7] Knor, M., Skrekovski, R. and Tepeh, A. (2015) Mathematical Aspects of Wiener Index. *Graphs and Combinatorics*, **29**, 1403-1416.

[8] Wu, B. and Meng, J. (2004) Hamiltonian Jump Graphs. *Discrete Mathematics*, **289**, 95-106. https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.09.003

[9] Wu, B. and Guo, X. (2001) Diameters of Jump Graphs and Self-Complementary Jump Graphs. *Graph Theory Notes of New York*, **40**, 31-34.

[10] Wu, B., Liu, X. and Guo, X. (2008) Super-Connected and Hyper-Connected Jump Graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, **85**, 1765-1769. https://doi.org/10.1080/00207160701600069