Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(11), 1440-1445
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.711168

Mathematical Beauty in Teaching of Probability Theory

Yunshuo Chen, Qingqiong Jiang

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang Guizhou
Email: 1101217439@qq.com

Received: Oct. 28th, 2018; accepted: Nov. 19th, 2018; published: Nov. 26th, 2018

Abstract

Probability theory is the branch of mathematics concerned with probability, and is the analysis of random phenomena. It has a special way of thinking and studying, and with particular mathematical beauty. Based on mode of thinking and teaching content, this paper has described the mathematical beauty in teaching probability theory from five respects including abstract beauty, unified beauty, concise beauty, image beauty and analogy beauty.

Keywords

Probability Theory, Teaching, Mathematical Beauty

探寻概率论教学中的数学思维之美

陈云烁，姜晴琼

贵州民族大学数据科学与信息工程学院，贵州 贵阳
Email: 1101217439@qq.com

收稿日期：2018年10月28日；录用日期：2018年11月19日；发布日期：2018年11月26日

摘 要

概率论是研究客观世界随机现象数量规律的数学分支学科，它在思维方式和研究方法上有其特殊性，呈现出独有的数学美感。本文从数学思维的基本形式出发，结合概率论的教学内容与特点，从抽象美、和谐统一美、简约美、直觉形象美和类比美等五个方面探寻概率教学中的数学思维之美。

关键词

概率论，教学，数学思维美

文章引用: 陈云烁, 姜晴琼. 探寻概率论教学中的数学思维之美[J]. 应用数学进展, 2018, 7(11): 1440-1445.
DOI: 10.12677/aam.2018.711168

1. 引言

美，是客体作用于主体，使主体产生一种精神上愉悦的体验。英国数学家 G • H • 哈代说过："数学美可能很难定义，但它的确是一种真实的美"。我们在学习数学、应用数学的思维过程中，深刻地体会数学带给我们的这种难以定义却真实存在的美。大多数数学家认为数学美至少蕴含三个特性，即和谐性、简单性与奇异性[1]。

数学思维是人脑和数学对象交互作用并按照一般的思维规律认识数学本质和规律的理性活动。具体来说，数学思维就是以数和形及其结构关系为思维对象，以数学语言和符号为思维的载体，并以认识发现数学规律为目的的一种思维[2]。数学思维既从属于一般的人类思维，具有一般思维的特征；同时，由于数学及其研究方法的特点，数学思维又具有不同于一般思维的自身特点，表现在思维活动是按客观存在的数学规律进行的，具有数学的特点与操作方式。特别是作为思维载体，数学语言的简约性和数学形式的符号化、抽象化、结构化倾向，决定了数学思维具有不同于其他思维的独特之美。

概率论是研究和揭示客观世界随机现象数量规律性的数学分支学科。它是根据大量同类随机现象的统计规律，对随机现象出现某一结果的可能性作出一种客观的科学判断，对这种出现的可能性大小做出数量上的描述；比较这些可能性的大小、研究它们之间的联系，从而形成一整套数学理论和方法。概率论有别于其他数学学科，首先思维方式需要从确定性思维转变到随机性思维，其次观察、试验、调查是概率论这门学科研究方法的基石。正因为概率论在思维方式和研究方法上有它的特殊性，所以在教学活动中，它呈现出独有的数学美感和魅力。按照思维活动的性质特征划分，数学思维的基本形式有：抽象思维、逻辑思维、形象思维、猜想思维、直觉思维和灵感思维等[3]。本文从数学思维的基本形式出发，结合概率论的教学内容与特点，从以下五个方面探寻概率教学中的数学思维之美。

2. 概率中的思维之美

2.1. 抽象之美

数学理论的表述往往是抽象的，数学中的抽象美不太容易体验得到。数学思维的抽象美应该包含两个方面的内容：第一，我们不容易想象(或意想不到)的；第二，我们无法体验到(或与现实脱节)的[4]。在概率论中所得出的结果或有关的发展常常出乎意料、既引起了极大的惊诧、又引起了人们的赞赏与叹服、从而使人享受抽象之美。

案例 1：蒲丰投针实验

1777 年的一天，法国科学家蒲丰家热闹非凡，客人到齐之后，70 岁高龄的蒲丰先生兴致勃勃的拿出一张纸来，纸上事先画好一条条等距离的平行线，又拿出准备好的一大把质量均匀的小针，这些小针是平行线距离的一半，蒲丰说："请诸位把这些小针一根一根的往纸上随便扔吧，奇妙的事情自然会出现"。客人们好奇的把这些小针一根根往纸上乱扔，蒲丰在在一旁专注观察并不停的记数。小针扔完了，把它收起来又扔，忙碌了近 1 小时，蒲丰宣布：大家共投针 2212 次，其中与平行线相交的有 704 次。

$$\frac{\text{投针总数}}{\text{针与平行线相交次数}}=\frac{2212}{704}\approx 3.142$$

总数 2212 与相交次数 704 的比值为 3.142，是圆周率的近似值。众宾客哗然，在这种纷繁杂乱的投

针场合出现了圆周率，这可是与圆半点也不沾边的呀，实在出乎人们的意料。蒲丰投针实验这段史实充分的体现了概率的抽象之美。

案例 2：生日问题

全班有 n 个同学，求：1) 至少有两个同学生日相同的概率 $P(A_n)$；2) 至少有一个同学与你的生日同一天的概率 $P(B_n)$ [5]。

对以上两个问题求解可得：

$P(A_n)=1-A_{365}^n/365^n$ ，由此公式，对不同的 n，有以下结果：

n	20	30	40	50	60	70	80
$P(A_n)$	0.411	0.706	0.891	0.970	0.994	0.999	0.9999

$P(B_n)=1-(364/365)^n$，由此公式，对不同的 n，有以下结果：

n	50	60	80	100	300	600	900
$P(B_n)$	0.128	0.152	0.197	0.240	0.561	0.807	0.915

一个有 30 人的班，我们有 70.6%的把握保证至少有两个同学生日相同，有 50、60 人的班，分别有 97%、99.4%的把握保证至少有两个同学生日相同.比较概率 $P(A_n)$和 $P(B_n)$，从中可以看出，300 人中与你的生日同一天的概率约为 0.561，900 人中与你的生日同一天的概率约为 0.915，但 50 人中至少有两个同学生日相同的概率为 0.97。这些结论和我们的直觉是不一致的。“生日问题”结论使人不解，是一个令人难以捉摸、难以凭空想象的例子。

以上例子给出的结论虽然我们想象起来很困难，但事实却正是如此，其结论都是经过严格的数学计算给出的，从中我们深刻体会了概率的抽象之美。

2.2. 和谐统一之美

概率中蕴含着丰富的辩证唯物主义思想，学生在学习的过程中可以感知到偶然与必然、确定与不确定、有限与无限、离散与连续的辨证统一之美。

案例 3：掷硬币试验

人们经过长期的实践知道，虽然随机事件在某次试验或观察中可能出现也可能不出现，但在大量试验中它却呈现出明显的统计规律性—频率稳定性。掷一枚硬币观察出现正面朝上的概率。在投掷过程中，出现的结果可能正面朝上，也可能反面朝上，由古典概型的知识我们知道结果出现正面朝上的概率都是 1/2。同样，通过实验我们可以得出硬币正面朝上的频率，频率是事件 A 发生的次数 n_A 与实验总次数 n 的比值，但是每次实验的结果都是不确定的，是随机的、偶然的。只有当 n 越来越大，即在大量重复试验时，正面朝上的频率值才会越来越逼近概率值 1/2，历史上有许多学者都做过此试验。

每次实验值只是偶然现象，只有当试验次数足够大时，其正面朝上的频率的极限值才反映了本质。变化中蕴涵着规律，得到了不变的常数 1/2，偶然中蕴涵着必然。

案例 4：贝特朗悖论

18、19 世纪，概率论在理论和应用方面取得了很多成果，但发展缓慢。19 世纪末，科学家们发现的一些概率论悖论。悖论的产生，违背了人类正确思维所遵循的基本规律。对素有严谨著称的数学，它实际上是一种荒诞的美，在荒诞中蕴含着真理，促使数学家们去思考，给人以启迪，给人以美感。其中最著名的是“贝特朗悖论”。1899 年法国学者贝特朗(J. Bertrand)指出：在半径为 R 的圆内随机选择弦，计算弦长超过圆内接正三角形边长的概率，根据“随机选择”含义的不同解释，可以得到不同的答案。这

类悖论反映出概率的概念是以某种确定的实验为前提，这种实验有时由问题本身所明确规定，有时则不然。悖论的出现，说明概率的理论基础尚不够完美协调。为了实现其理论的和谐美[3]，1900 年夏，在世界数学家大会上，德国数学家希尔伯特(D. Hilbort)提出了建立概率公理系统的问题，引导了一批数学家投入了这方面的工作。这次概率发展史上的危机是由悖论而引起的，欲达到和谐，必先消除悖论。1933 年原苏联数学家柯尔莫哥洛夫(A. Kolmgorov)的著作《概率论基础》正式出版，给出了概率公理化的完整结构，对于这一漂亮、优美的公理系统，深刻的体现了数学思维的和谐美。

2.3. 简约之美

爱因斯坦说过：“美，本质上终究是简单性。”他还认为，只有借助数学，才能达到简单性的美学准则。只有既朴实清秀，又底蕴深厚，才称得上至美。

案例 5：相关系数

线性相关系数刻画了两个随机变量之间的线性关系强弱，拥有着无可比拟的简洁美，主要体现在两个方面：首先数学表达上，相关系数的取值是−1 到 1 之间的常数。如果相关系数为 1，即完全正相关。如果相关系数为−1，即完全负相关。相关系数的绝对值越接近 1，变量间的相关程度就越高；相关系数的绝对值越接近 0，变量间的相关程度就越低。其次，相关系数的简约美体现在其不受变量量纲的影响。通过相关系数我们可以得到身高和体重之间的相关性，虽然它们的单位分别是米和千克。相关系数完成了一件非常神奇的事情：将大量芜杂无序、量纲不同的复杂数据加工成一个简洁、优雅的描述性数据。

美国哥伦比亚大学张寿武教授说：“我觉得数学最妙的地方是：正确是基于简单的理由，而不是复杂的理由。数学与科学和文学一样，能够留下来的东西是最简单的。”用相关系数描述随机变量之间的线性关系，异常简单，简单就会产生魅力，简单就可以大大地增加本身的存在价值。

2.4. 直觉形象之美

直觉思维是一种高度省略、简化、浓缩的方式洞察问题实质的思维，其主要特征是能在一瞬间迅速解决问题[2]。在概率学习中，我们常常能体验到这种美。

案例 6：高尔顿钉板试验

经典的高尔顿钉板试验，是英国统计学家高尔顿设计的用来研究随机现象的模型，它的模型如图 1。图中黑点表示钉在板上的一颗钉子，它们彼此的距离均相等，上一层的每一颗的水平位置恰好位于下一

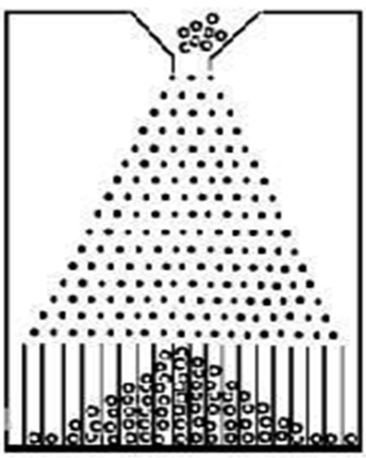

Figure 1. Galton nail board test
图 1. 高尔顿钉板试验

层的两颗正中间。从入口处放进一个直径略小于两颗钉子之间的距离的小圆玻璃球，当小圆球向下降落过程中，碰到钉子后皆以 1/2 的概率向左或向右滚下，于是又碰到下一层钉子。如此继续下去，直到滚到底板的一个格子内为止。把许许多多同样大小的小球不断从入口处放下，当小球的数目足够大，小球落入各个格子中的频率趋于稳定。随着小球的数目逐渐增多，你的心灵会感到一种愉快的惊奇：逐渐增多的小球在底板堆成的形状越来越接近一条钟形曲线，即正态曲线(中间高，两头低，呈左右对称的古钟型)。经历了高尔顿钉板试验，借助直观图形，我们看到了秩序，看到了分明，看到了稳定，就是直觉思维的一个历程。这个思维历程给人形象且直观的美感。在体验这种美的同时，我们认识了正态分布、正态曲线的特点及曲线所表示的意义。

案例 7：山羊和汽车

1991 年 1 月 31 日，美国《Parade》杂志的 M.塞望小姐主持的专栏刊登了如下题目："有三扇门(如图 2)，其中有一扇门的后面是一辆汽车，另两扇门的后面则是山羊。你可以猜一次，猜中羊可以牵走羊，猜中汽车可以开走汽车。现在假如你选了某扇门(例如 1 号门)，主持人把无车的一扇门打开(例如 3 号门)。此时，请问：你是否要换 2 号门？"[6]答案无非是两种：换与不换。两种答案来源于两种直觉。一种直觉：这三扇门的后面有车的可能是一样的，都是 1/3，所以不必换别的门。另一种直觉：车在 1 号门的概率是 1/3，车在 2 号和 3 号门后面的概率是 2/3。主持人既然把 3 号门打开了，那里没有车，所以 2 号门后面有车的概率是 2/3，所以应该换。在这两种直觉思维火花的碰撞下，抓住契机，让学生分两组来试验。第一组玩 100 次这个游戏，坚持一开始的选择；第二组也玩 100 次此游戏，每次都在打开一扇有羊的门之后改变最初的选择。不论是选择换与不换的人，在试验过程中，都带着直觉的想象在寻找着真理。当一切顿悟，直觉之美散发出它特有的芬芳。

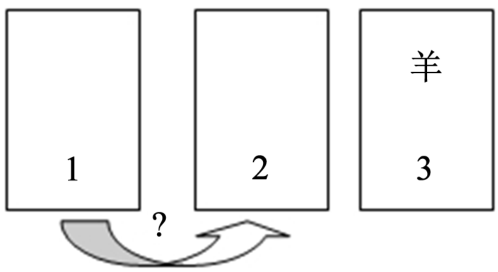

Figure 2. Monty Hall problem
图 2. 三门问题

2.5. 类比之美

在概率教学中经常会使用类比法。例如随机事件与集合的类比、离散型随机变量与连续型随机变量的类比等。

案例 8：一维均匀分布与多维均匀分布(如下表)

	一维均匀分布	多维均匀分布
	$X\sim U(a,b)$	$X\sim U(D)$
背景	(a,b)为实数集是的区间，长度为 $b-a$	D 是平面上的有界区域，面积为 S_D
密度函数	$f(x)=\begin{cases}1/(a-b), a<x<b\\0, \quad 其他\end{cases}$	$f(x,y)=\begin{cases}1/S_D, (x,y)\in D\\0, \quad 其他\end{cases}$
性质	X 落在(a,b)内任一小区间的概率与小区间的位置无关，只与其长度成正比。	X 落在 D 内任一小区域 G 的概率与区域 G 的位置、形状。无关，只与其面

3. 意义

数学思维美不只是一种形式美，它更多的体现在学习数学、应用数学的思维过程中所表现出来的一种理性之美。法国著名数学家庞卡莱曾经说过：“数学的优美感，不过就是问题的解答适合我们心灵需要而产生的一种满足。”在概率的学习、应用等思维过程中，我们时刻在追求着这种满足与愉悦，品尝数学思维之美，犹如欣赏伟大的数学艺术精品一样。

教师在概率教学中要善于去发现美、挖掘美和传递美，充分发挥数学思维美的独特魅力。利用数学思维美去打动学生，不仅能够激发学习的最佳动机、改变概率学习的枯燥局面，而且也可以使概率理论获得更丰富的内涵和更广泛的应用。

基金项目

贵州民族大学科研基金资助项目(2017YB070)，贵州民族大学网络安全与大数据应用训练中心(20161113006)。

参考文献

[1] 吴开朗. 数学美学[M]. 南宁: 广西教育出版社, 2000.
[2] 曹才翰, 章建跃. 中学数学教学概论[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2008.
[3] 任樟辉. 数学思维理论[M]. 南宁: 广西教育出版社, 2000.
[4] 吴振奎, 刘舒强. 数学中的美[M]. 天津: 天津教育出版社, 1997.
[5] 何书元. 概率引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.
[6] 张奠者, 刘萍, 等. 大千世界的随机现象[M]. 南宁: 广西教育出版社, 2000.