Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(7), 850-856
Published Online October 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.67102

Hans汉斯

A New Error Bound for Linear Complementarity Problems for Weakly Chained Diagonally Dominant *B*-Matrices

Xia Jing, Lei Gao

School of Mathematics and Information Science, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji Shaanxi
Email: jingxia@bjwlxy.edu.cn, gaolei@bjwlxy.edu.cn

Received: Oct. 2nd, 2017; accepted: Oct. 16th, 2017; published: Oct. 24th, 2017

Abstract

In this paper, by the infinity norm bound of inverse matrix of weakly chained diagonally dominant *M*-matrices, we give a new error bound for the linear complementarity problem when the matrix involved is a weakly chained diagonally dominant *B*-matrix, which improves some existing ones. Numerical examples are given to show the corresponding results.

Keywords

***P*-Matrix, Weakly Chained Diagonally Dominant *B*-Matrix, Linear Complementarity Problem, Error Bound**

弱链对角占优*B*-矩阵线性互补问题误差界的新估计式

井　霞，高　磊

宝鸡文理学院，数学与信息科学学院，陕西　宝鸡
Email: jingxia@bjwlxy.edu.cn, gaolei@bjwlxy.edu.cn

收稿日期：2017年10月2日；录用日期：2017年10月16日；发布日期：2017年10月24日

摘　要

本文利用弱链对角占优*M*-矩阵逆矩阵无穷范数上界的估计式，结合不等式放缩技术，给出弱链对角占优

文章引用: 井霞, 高磊. 弱链对角占优 *B*-矩阵线性互补问题误差界的新估计式[J]. 应用数学进展, 2017, 6(7): 850-856.
DOI: 10.12677/aam.2017.67102

B-矩阵线性互补问题误差界的一个新估计式。数值算例表明，新估计式改进了现有的几个结果。

关键词

P-矩阵，弱链对角占优***B***-矩阵，线性互补问题，误差界

1. 引言

线性互补问题在力学、交通、经济、金融和控制等诸多领域具有广泛应用，如市场均衡问题、最优停止问题、期权定价问题、弹性接触问题和自由边界问题等[1] [2] [3] [4]。线性互补问题($LCP(M,q)$)是指求 $x\in R^n$ ，满足

$$x\ge 0,\ Mx+q\ge 0,\ (Mx+q)^{\mathrm{T}}x=0$$

其中 $M\in R^{n\times n}$ 为实矩阵，实向量 $q\in R^n$ 。众所周知，当矩阵 M 为 P-矩阵(所有主子式都是正的[1])时，$LCP(M,q)$ 不仅存在唯一解[2]，而且易于误差分析[4]。2006 年，陈小君等给出 P-矩阵线性互补问题的误差界[5]：

$$\|x-x^*\|_\infty\le\max_{d\in[0,1]^n}\left\|(I-D+DM)^{-1}\right\|_\infty\|r(x)\|_\infty \tag{1}$$

其中 $r(x)=\min\{x,Mx+q\}$ 为向量 x 与 $Mx+q$ 对应位置分量最小值，$D=diag(d_i)$ 。不难发现，求解误差界(1)中的最小化问题 $\max_{d\in[0,1]^n}\left\|(I-D+DM)^{-1}\right\|_\infty$ 十分困难。因此，近年来有众多专家和学者关注于误差界的估计问题，并给出了一些简单易算的估计式[6]-[13]。本文将研究 P-矩阵的一个重要子类——弱链对角占优 B-矩阵的线性互补问题的误差界估计问题，应用弱链对角占优 M-矩阵的逆矩阵无穷范数上界的估计式，得到弱链对角占优 B-矩阵线性互补问题误差界的一个新估计式。数值算例表明，新估计式改进了现有的几个结果。

2. 预备知识

令 $C^{n\times n}$ ($R^{n\times n}$)表示所有 n 阶复矩阵(实矩阵)构成的集合，指标集 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 。设 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ ，对任意的 $i,\ j,\ k\in N,\ i\ne j$ ，记

$$R_i(A)=\sum_{j\ne i}|a_{ij}|,\quad u_i(A)=\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|,$$

$$h_l^{(k-1)}=\sum_{j=k}^{l-1}|a_{lj}|\cdot\frac{h_j^{(k-1)}}{|a_{jj}|}+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}| \tag{2}$$

$$c_k=\max_{k\le i\le n}\left\{\frac{h_i^{(k-1)}}{|a_{ii}|}\right\},\ k=1,2,\cdots,n,$$

$$q_k(A)=\max_{1\le i\le n-k}\left\{\frac{|a_{i+k,k}|+\sum_{h=k+1,h\ne i+k}^{n}|a_{i+k,k}|c_k}{|a_{i+k,i+k}|}\right\},\ k=1,2,\cdots,n.$$

定义 1 [14]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in C^{n\times n}$，若对任意的 $i\in N$，有

$$\left|a_{ii}\right|\ge R_i\left(A\right),$$

且对每个 $i\notin J\left(A\right)=\left\{i\in N:\left|a_{ii}\right|>R_i\left(A\right)\right\}\ne\phi$ 存在非零元素链 $a_{ii_1},a_{i_1i_2},\cdots,a_{i_rj}$ 满足 $j\in J\left(A\right)$，则称 A 为弱链对角占优矩阵。

定义 2 [15]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$，记 $M=B^{+}+C$，其中

$$B^{+}=\left[b_{ij}\right]=\begin{pmatrix} m_{11}-r_1^{+} & \cdots & m_{1n}-r_1^{+} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1}-r_n^{+} & \cdots & m_{nn}-r_n^{+} \end{pmatrix},\quad r_i^{+}=\max\left\{0,m_{ij}\,|\,j\ne i\right\}, \tag{3}$$

若 B^{+} 为弱链对角占优矩阵且所有的主对角元素皆为正，则称 A 为弱链对角占优矩阵。

文献[15]给出结果：设 $M=\left[m_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 B-矩阵，记 $M=B^{+}+C$，其中 $B^{+}=\left[b_{ij}\right]$ 形如(3)式，则

$$\max_{d\in[0,1]^n}\left\|\left(I-D+DM\right)^{-1}\right\|_\infty\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\left\{\bar{\beta}_i,1\right\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{b_{jj}}{\bar{\beta}_j}, \tag{4}$$

其中 $\bar{\beta}_i=b_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}\left|b_{ij}\right|>0$ 且 $\prod_{j=1}^{0}\frac{b_{jj}}{\bar{\beta}_j}=1$。

为了给出本文结论，先介绍几个预备引理：

引理 1 [16]：设 $A=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵，$u_kq_k<1,k=1,\cdots,n$，则

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty\le\max\left\{\frac{1}{a_{11}\left(1-u_1q_1\right)}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}\left(1-u_iq_i\right)}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{u_j\left(A\right)}{1-u_j\left(A\right)q_j\left(A\right)}\right],\right.$$
$$\left.\sum_{i=2}^{n}\frac{q_1}{a_{11}\left(1-u_1q_1\right)}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{q_i}{a_{ii}\left(1-u_iq_i\right)}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{1-u_jq_j}\right]\right\},$$

其中 $u_j\left(A\right)$，$q_j\left(A\right)$ 如(2)式所定义。

引理 2 [11]：设 $\gamma>0$ 和 $\eta\ge0$，则对任意的 $x\in\left[0,1\right]$，有

$$\frac{1}{1-x-\gamma x}\le\frac{1}{\min\left\{\gamma,1\right\}},\quad\frac{\eta x}{1-x+\gamma x}\le\frac{\eta}{\gamma}.$$

3. 主要结果

本节给出弱链对角占优 B-矩阵线性互补问题误差界新的上界估计式，并和现有结果进行比较。首先给出一个引理：

引理 3：设矩阵 $M=\left[m_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 主对角元全为正，记 $M=B^{+}+C$，其中 B^{+} 形如(3)式。令 $B_D=I-D+DB^{+}=\left[\bar{b}_{ij}\right]$，则对任意的 $k=1,2,\cdots,n$，$l=k,k+1,\cdots,n$ 有

$$\frac{h_l^{(k-1)}\left(B_D^{+}\right)}{\left|\bar{b}_{ll}\right|}\le\frac{h_l^{(k-1)}\left(B^{+}\right)}{\left|b_{ll}\right|}, \tag{5}$$

其中 $h_l^{(k-1)}$ 如(2)式所定义。

证明：下面利用数学归纳法证明(5)式成立。

情形一：$k=1$，此时 $l=1,2,\cdots,n$。

当 $l=1$ 时，

$$\frac{h_1^{(0)}\left(B_D^+\right)}{\left|\bar{b}_{11}\right|}=\frac{d_1\sum_{j=2}^{n}\left|b_{1j}\right|}{1-d_1+d_1 b_{11}}\le\frac{\sum_{j=2}^{n}\left|b_{1j}\right|}{b_{11}}=\frac{h_1^{(0)}\left(B^+\right)}{\left|b_{11}\right|},$$

假设当 $l=i\left(2<i<n\right)$ 时，$\frac{h_i^{(0)}\left(B_D^+\right)}{\left|\bar{b}_{ii}\right|}\le\frac{h_i^{(0)}\left(B^+\right)}{\left|\bar{b}_{ii}\right|}$ 式成立，现证 $l=i+1$ 时(5)式也成立，利用引理 2 易证

$$\frac{h_{i+1}^{(0)}\left(B_D^+\right)}{\left|\bar{b}_{i+1,i+1}\right|}=\frac{\sum_{j=k}^{n}\frac{\left|\bar{b}_{i+1,j}\right|}{\left|\bar{b}_{jj}\right|}\cdot h_j^{(0)}\left(B_D^+\right)+\sum_{j=i+2}^{n}\left|\bar{b}_{i+1,j}\right|}{\left|\bar{b}_{i+1,i+1}\right|}\le\frac{h_{i+1}^{(0)}\left(B^+\right)}{\left|b_{i+1,i+1}\right|}.$$

因此，对于 $l=1,2,\cdots,n$，有 $\frac{h_l^{(0)}\left(B_D^+\right)}{\left|\bar{b}_{ll}\right|}\le\frac{h_l^{(0)}\left(B^+\right)}{\left|b_{11}\right|}$。

情形二：当 $k=2,3,\cdots,n$ 时，同理可证(5)式成立。

综合情形一与情形二，结论成立。

定理 1：设 $M\in R^{n\times n}$ 是弱链对角占优 B-阵，$M=B^++C$，其中 $B^+=\left[b_{ij}\right]$ 形如(3)式。若 $u_k\left(B^+\right)q_k\left(B^+\right)<1$，$k=1,\cdots,n$，则

$$\begin{aligned}&\max_{d\in[0,1]^n}\left\|\left(I-D+DM\right)^{-1}\right\|_\infty\\&\le\left(n-1\right)\cdot\max\left\{\frac{1}{\min\left\{\alpha_1\left(B^+\right),1\right\}}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\min\left\{\alpha_i\left(B^+\right),1\right\}}\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{jj}\cdot u_j\left(B^+\right)}{\alpha_i\left(B^+\right)}\right],\right.\\&\qquad\left.\frac{q_1\left(B^+\right)}{\min\left\{\alpha_1\left(B^+\right),1\right\}}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{q_i\left(B^+\right)}{\min\left\{\alpha_i\left(B^+\right),1\right\}}\cdot\prod_{j=1}^{i-1}\frac{b_{jj}}{\alpha_j\left(B^+\right)}\right]\right\}\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $\alpha_i\left(B^+\right)=b_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}\left|b_{ij}\right|\cdot q_i\left(B^+\right)$，$q_i\left(B^+\right)$ 由(2)式所给。

证明：令 $M_D=I-D+DM$，则

$M_D=I-D+DM=I-D+D\left(B^++C\right)=B_D^++C_D$，其中 $B_D^+=I-D+DB^+$，$C_D=DC$。由文献[15]中的定理 2 知，B_D^+ 是弱链严格对角占优 M-阵

$$\left\|M_D^{-1}\right\|_\infty\le\left(n-1\right)\cdot\left\|\left(B_D^+\right)^{-1}\right\|_\infty.\tag{7}$$

由引理 1 知

$$\begin{aligned}\left\|\left(B_D^+\right)^{-1}\right\|_\infty\le\max&\left\{\frac{1}{\bar{b}_{11}\left[1-u_1\left(B_D^+\right)q_1\left(B_D^+\right)\right]}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\bar{b}_{ii}\left[1-u_i\left(B_D^+\right)q_i\left(B_D^+\right)\right]}\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{u_j\left(B_D^+\right)}{1-u_j\left(B_D^+\right)q_j\left(B_D^+\right)}\right],\right.\\&\left.\frac{q_1\left(B_D^+\right)}{\bar{b}_{11}\left[1-u_1\left(B_D^+\right)q_1\left(B_D^+\right)\right]}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{q_i\left(B_D^+\right)}{\bar{b}_{ii}\left[1-u_i\left(B_D^+\right)q_i\left(B_D^+\right)\right]}\cdot\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{1-u_j\left(B_D^+\right)q_j\left(B_D^+\right)}\right]\right\}.\end{aligned}$$

由引理 2 和引理 3，得

$$u_i\left(B_D^+\right)=\frac{\sum\limits_{j=i+1}^{n}\left|b_{ij}\right|d_i}{1-d_i+b_{ii}d_i}\le\frac{\sum\limits_{j=i+1}^{n}\left|b_{ij}\right|}{b_{ii}}=u_i\left(B^+\right),$$

$$\begin{aligned}q_k\left(B_D^+\right)&=\max_{1\le i\le n-k}\left\{\frac{\left|\bar{b}_{i+k,k}\right|+\sum\limits_{h=k+1,h\ne i+k}^{n}\left|\bar{b}_{i+k,h}\right|\cdot\bar{c}_k}{\left|\bar{b}_{i+k,i+k}\right|}\right\}\\&\le\max_{1\le i\le n-k}\frac{d_{i+k}\left[\left|b_{i+k,k}\right|+\sum\limits_{h=k+1,h\ne i+k}^{n}\left|b_{i+k,h}\right|\cdot c_k\right]}{1-d_{i+k,i+k}+d_{i+k,i+k}\left|b_{i+k,i+k}\right|}\\&\le\max_{1\le i\le n-k}\left\{\frac{\left|b_{i+k,k}\right|+\sum\limits_{h=k+1,h\ne i+k}^{n}\left|b_{i+k,h}\right|\cdot c_k}{\left|b_{i+k,i+k}\right|}\right\}=q_k\left(B^+\right)\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{b}_{ii}\left[1-u_i\left(B_D^+\right)\cdot q_i\left(B_D^+\right)\right]}&=\frac{1}{\bar{b}_{ii}-\bar{b}_{ii}\cdot u_i\left(B_D^+\right)\cdot q_i\left(B_D^+\right)}\\&\le\frac{1}{\bar{b}_{ii}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}\left|\bar{b}_{ij}\right|\cdot q_i\left(B^+\right)}\\&\le\frac{1}{\min\left\{b_{ii}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}\left|b_{ij}\right|\cdot q_i\left(B^+\right),1\right\}}\\&=\frac{1}{\min\left\{\alpha_i\left(B^+\right),1\right\}}\end{aligned},$$

及

$$\frac{1}{1-u_j\left(B_D^+\right)\cdot q_j\left(B_D^+\right)}\le\frac{b_{jj}}{b_{jj}-\sum\limits_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|\cdot q_j\left(B^+\right)}=\frac{b_{jj}}{\alpha_j\left(B^+\right)}.$$

则

$$\left\|\left(B_D^+\right)^{-1}\right\|_\infty\le\max\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\min\left\{\alpha_1\left(B^+\right),1\right\}}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{\min\left\{\alpha_i\left(B^+\right),1\right\}}\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{jj}\cdot u_j\left(B^+\right)}{\alpha_i\left(B^+\right)}\right],\\&\frac{q_1\left(B^+\right)}{\min\left\{\alpha_1\left(B^+\right),1\right\}}+\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{q_i\left(B^+\right)}{\min\left\{\alpha_i\left(B^+\right),1\right\}}\cdot\prod_{j=1}^{i-1}\frac{b_{jj}}{\alpha_j\left(B^+\right)}\right]\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

由(7)式和(8)式可知，(6)式成立。

4. 数值算例

例：考虑弱链对角占优 B-矩阵[15]：

$$M=\begin{bmatrix}1.5 & 0.2 & 0.4 & 0.5\\ -0.1 & 1.5 & 0.5 & 0.1\\ 0.5 & -0.1 & 1.5 & 0.1\\ 0.4 & 0.4 & 0.8 & 1.8\end{bmatrix},$$

令 $M=B^{+}+C$，其中

$$B^{+}=\begin{bmatrix}1 & -0.3 & -0.1 & 0\\ -0.6 & 1 & 0 & -0.4\\ 0 & -0.6 & 1 & -0.4\\ -0.4 & -0.4 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

由(4)式得

$$\max_{d\in[0,1]^4}\left\|\left(I-D+DM\right)^{-1}\right\|_\infty \le 41.1111,$$

由文献[17]中的(5)式得

$$\max_{d\in[0,1]^4}\left\|\left(I-D+DM\right)^{-1}\right\|_\infty \le 38.6334,$$

由应用定理 1 中的(6)式得

$$\max_{d\in[0,1]^4}\left\|\left(I-D+DM\right)^{-1}\right\|_\infty \le 10.4724\,.$$

显然，(7)式优于(4)式和文献[17]中的(5)式。

基金项目

陕西省自然科学基础研究计划项目(2017JQ3020)；陕西省高校科协青年人才托举基金(20160234)；宝鸡文理学院重点项目(ZK2017095, ZK2017021)。

参考文献 (References)

[1] Chen, X. and Xiang, S. (2007) Perturbation Bounds of *P*-Matrix Linear Complementarity Problems. *SIAM Journal on Optimization*, **18**, 1250-1265. https://doi.org/10.1137/060653019

[2] Cottle, R.W., Pang, J. and Stone, R E. (1992) The Linear Complementarity Problem. Academic Press, San Diego, 1-20.

[3] Murty, K.G. (1998) Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming. Heldermann Verlag, Berlin, 5-18.

[4] 黎稳, 郑华. 线性互补问题的数值分析[J]. 华南师范大学学报: 自然科学版, 2015, 47(3): 1-9.

[5] Chen, X. and Xiang, S. (2006) Computation of Error Bounds for *P*-Matrix Linear Complementarity Problem. *Mathematical Programming*, **106**, 513-525. https://doi.org/10.1007/s10107-005-0645-9

[6] Chen, T., Li, W., Wu, X., and Vong, S. (2015) Error Bounds for Linear Complementarity Problems of *MB*-Matrices. *Numerical Algorithms*, **70**, 341-356. https://doi.org/10.1007/s11075-014-9950-9

[7] Dai, P. (2011) Error Bounds for Linear Complementarity Problems of *DB*-Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **434**, 830-840. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.09.049

[8] Dai, P., Lu C. and Li Y. (2013) New Error Bounds for Linear Complementarity Problem with an *SB*-Matrix. *Numerical Algorithms*, **64**, 741-757.

[9] García-Esnaola, M. and Peña, J.M. (2012) Error Bounds for Linear Complementarity Problems Involving B^S-Matrices. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 1379-1383. https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.12.006

[10] García-Esnaola, M. and Peña, J.M. (2016) *B*-Nekrasov Matrices and Error Bounds for Linear Complementarity Problems. *Numerical Algorithms*, **72**, 435-445. https://doi.org/10.1007/s11075-015-0054-y

[11] Li, C. and Li, Y. (2016) Note on Error Bounds for Linear Complementarity Problems for *B*-Matrices. *Applied Mathematics Letters*, **57**, 108-113.

[12] Li, C. and Li, Y. (2016) Weakly Chained Diagonally *B*-Matrices and Error Bounds for Linear Complementarity Problems. *Numerical Algorithms*, **73**, 985-998. https://doi.org/10.1007/s11075-016-0125-8

[13] Li, C., Gan, M.T. and Yang, S.R. (2016) A New Error Bounds for Linear Complementarity Problems for *B*-Matrices. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **31**, 476-484. https://doi.org/10.13001/1081-3810.3250

[14] Shivakumar, P.N. and Chew, K.H. (1974) A Sufficient Condition for Nonvanishing of Determinants. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **43**, 63-66. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1974-0332820-0

[15] Li, C. and Li, Y. (2016) Weakly Chained Diagonally Dominant *B*-Matrices and Error Bounds for Linear Complementarity Problems. *Numerical Algorithms*, **73**, 985-998. https://doi.org/10.1007/s11075-016-0125-8

[16] 刘新，杨晓英．弱链对角占优 *M*-矩阵 *A* 的 $\|A^{-1}\|_\infty$ [J]．河南科学, 2014, 4: 491-495.

[17] 孙德淑．弱链对角占优 *B*-矩阵线性互补问题的误差界估计[J]．西南师范大学学报：自然科学版, 2017, 42: 25-31.