Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(7), 61-68
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.147272

Hans汉斯

高阶数值导数的分数阶Landweber方法

李刚刚

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年5月30日；录用日期：2024年6月29日；发布日期：2024年7月18日

摘　要

本文研究高阶数值微分问题，这是一个经典的不适定问题。首先对问题的不适定性进行分析并给出条件稳定性结果，之后通过分数阶Landweber迭代方法给出正则解，最后在正则化参数的先验选取规则下，得到正则解和精确解之间的误差估计。

关键词

数值微分，分数阶Landweber迭代，不适定问题，误差估计

A Fractional Landweber Method for Higher-Order Numerical Derivatives

Ganggang Li

Collage of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 30th, 2024; accepted: Jun. 29th, 2024; published: Jul. 18th, 2024

Abstract

In the paper, we consider the higher-order numerical differentiation problem, which is a classical ill-posed problem. First, we discuss the ill-posed problem and provide the conditional stability results. Then, the regularized solution is obtained by the fractional Landweber iteration method. Finally, the error estimation of regularization solution and exact solution under the priori choice rules of the regularization parameter is generated.

Keywords

Numerical Differentiation, Fractional Landweber Iteration, Ill-Posed Problem, Error Estimation

文章引用: 李刚刚. 高阶数值导数的分数阶 Landweber 方法[J]. 理论数学, 2024, 14(7): 61-68.
DOI: 10.12677/pm.2024.147272

1. 引言

数值微分是一种近似计算函数的导数或高阶导数的方法。数值微分问题在科学研究和实际问题的应用中有着极其重要的作用，例如图像处理[1]、医学成像[2]、识别[3]、偏微分方程[4]等问题主要集中在求数值微分上。数值微分问题是经典的不适定问题，主要是因为输入数据的任意“小”的扰动可能会导致近似导数的任意“大”的误差，从而使数值导数变得无意义，因此许多学者致力于克服这个问题，并提出了许多计算方法。差分方法[5]-[8]是通过构造高精度有限差分格式来近似计算函数的导数，但该方法并没有消除数据误差的影响。Tikhonov 正则化方法[9] [10]是将数值微分问题转化为求解极小化泛函问题，通过在目标函数上加一个惩罚项，得到导数的稳定近似解。安抚方法[11]是将误差数据映射到问题的适位性类，并得到缓和数据，最终获得误差估计和最优的缓和参数。

分数阶 Landweber 方法最早是由 Klann、Maaß 和 Ramlau [12]提出的，考虑了一种基于滤波正则化技术求解线性逆问题的一般正则化方法。本文研究了高阶数值微分问题，并针对高阶数值微分问题构造了一个分数阶 Landweber 迭代正则化滤子函数，通过构造滤子函数得到正则解。与传统的 Landweber 方法相比，分数阶 Landweber 迭代正则化方法不仅减少了迭代次数，还克服了近似解过度光滑的问题[13]。

考虑函数 $f(x)\in L^2(\mathbb{R})$，设函数 f 的傅里叶变换为 $\hat{f}$，则：

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

对于函数 f 的 k 阶导数，用 $f^{(k)}(x)=\dfrac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}$ 进行表示，则有：

$$\widehat{f^{(k)}(x)}=(i\xi)^k\,\hat{f}(\xi), \tag{2}$$

则傅里叶逆变换为：

$$f^{(k)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(i\xi)^k\,\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{d}\xi. \tag{3}$$

从(2)或(3)的右边部分可知 $\left|(i\xi)^k\right|=|\xi|^k$ (其中 $|\xi|$ 是趋于无穷大的数值，一般不取 0)。在现实问题中，高阶数值导数的输入数据只能通过测量所得，这意味着测量数据中所含有的微小误差，会使得近似解具有较大差异，所以需要对不适定问题进行正则化处理。

因此对高阶数值微分问题，定义一个分数阶 Landweber 迭代正则化滤子函数：

$$F_{m,\gamma}(\xi)=\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^\gamma, \tag{4}$$

其中，$m\ge 1$，$0<\beta<|\xi|^{2k}$，且 $\frac{1}{2}<\gamma\le 1$ 为分数阶参数，正则化参数为 $\alpha=\frac{1}{m}$ (也可称 m 为正则化参数)。当 $\gamma=1$ 时，则为传统的 Landweber 方法。之后将在引理 2.4 中证明滤子函数满足文献[4]中滤子函数的构造要求。

2. 预备引理

引理 2.1 设 $\frac{1}{2}<\gamma\le 1$，$0<\beta<|\xi|^{2k}$，$m\ge 1$，则有：

$$\sup_{\xi\in R}\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^\gamma |\xi|^k \le \beta^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

证明. 定义 $\tau^2 := \beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}$，则有：

$$\varphi(\tau)=\beta\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^{2\gamma}\tau^{-2}, \tag{6}$$

并且

$$\phi(\tau)=\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^{2\gamma}\tau^{-2}. \tag{7}$$

显然有 $\varphi(\tau)=\beta\phi(\tau)$。当 $\tau\in(0,1)$ 时，两个函数都连续。

根据文献[14]可知，当 $\frac{1}{2}<\gamma\le 1$ 时，且有 $\tau\in(0,1)$，因此：

$$\phi(\tau)\le m$$

所以有：

$$\sup_{\xi\in R}\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^\gamma |\xi|^k \le \beta^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}}.$$

引理 2.1 得证。

引理 2.2 对 $0<\beta<|\xi|^{2k}$， $p>k>0$，并且 $m\ge 1$，则有：

$$\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m |\xi|^{k-p} \le \left(\frac{p-k}{2k\beta}\right)^{\frac{p-k}{2k}} m^{\frac{k-p}{2k}}. \tag{8}$$

证明. 设 $x=\frac{1}{|\xi|^{2k}}$，则有：

$$f(x)=(1-\beta x)^m x^{\frac{p-k}{2k}}, \tag{9}$$

所以有：

$$f'(x)=(1-\beta x)^m x^{\frac{p-k}{2k}}\left(-\frac{m\beta}{1-\beta x}+\frac{p-k}{2kx}\right), \tag{10}$$

当 $f'(x)=0$ 时，由(10)式可得驻点 $x_0=\frac{p-k}{2k\beta m+(p-k)\beta}$，则有：

$$f(x)\le f(x_0)=\left(1-\frac{p-k}{2km+p-k}\right)^m\left(\frac{p-k}{2k\beta m+(p-k)\beta}\right)^{\frac{p-k}{2k}} \le \left(\frac{p-k}{2k\beta m}\right)^{\frac{p-k}{2k}} = \left(\frac{p-k}{2k\beta}\right)^{\frac{p-k}{2k}} m^{\frac{k-p}{2k}}.$$

引理 2.2 得证。

引理 2.3 [15]对于 $m>0$，$0\le\gamma\le1$，当 $|x|\le1$ 时，有 $\left|1-\left(1-x^m\right)^\gamma\right|\le|x|^m$。

引理 2.4 令 $0<\beta<|\xi|^{2k}$，$\frac{1}{2}<\gamma\le1$，正则化参数为 $\alpha=\frac{1}{m}$，则函数：

$$F_{m,\gamma}(\xi)=\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^\gamma, \tag{11}$$

满足以下性质：

1) 对一切 $\alpha>0$ 和 $\sigma:=\frac{1}{|\xi|^k}\in(0,+\infty)$ 成立 $\left|F_{m,\gamma}(\xi)\right|\le1$；

2) 存在函数 $c(\alpha)$ 使得对一切的 $\sigma:=\frac{1}{|\xi|^k}\in(0,+\infty)$ 成立 $\left|F_{m,\gamma}(\xi)\right|\le c(\alpha)\sigma$；

3) 对一切的 $\sigma:=\frac{1}{|\xi|^k}\in(0,+\infty)$ 成立 $\lim\limits_{\alpha\to0}F_{m,\gamma}(\xi)=1$。

证明. 显然，条件 1)、3)成立。对于条件 2)，通过引理 2.1 可得：

$$\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^\gamma\le(\beta m)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{|\xi|^k}=(\beta m)^{\frac{1}{2}}\sigma=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma,$$

故有：

$$\left|F_{m,\gamma}(\xi)\right|\le c(\alpha)\sigma,$$

其中，$c(\alpha)=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$，则条件 2)成立。

3. 问题的不适定性分析与条件稳定性结果

在本节中，主要讨论分析了数值微分的不适定性，并根据文献[4]给出条件稳定性结果。为了得到精确解和正则解之间的误差估计，假设精确数据函数 $f(x)\in L^2(\mathbb{R})$ 与测量数据函数 $f_\delta(x)\in L^2(\mathbb{R})$ 满足：

$$\|f_\delta-f\|\le\delta. \tag{12}$$

其中，$\|\cdot\|$ 表示 L^2 范数，$\delta>0$ 表示噪声水平。这表明我们在计算高阶数值导数时，测量数据所带来的误差当中的高频成分被放大，甚至可能会被破坏掉，使得计算无意义，这意味着高阶数值导数的计算不能仅依赖于测量数据。所以需要将不适定问题进行正则化处理，此时，我们对精确数据施加一个先验界，对任意 $p\ge0$，定义 Sobolev 空间 $H^p(\mathbb{R})$ 的范数为：

$$\|f\|_p:=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\xi^2\right)^p\left|\hat{f}(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}\le E, \tag{13}$$

其中，$E>0$ 是一个常数。

定理 3.1 假设先验界(12)成立，则条件稳定性结果如下：

$$\left\|f^{(k)}(x)\right\|\le E^{\frac{k}{p}}\left\|\hat{f}\right\|^{1-\frac{k}{p}}. \tag{14}$$

证明. 通过(2)式，并使用 Holder 不等式，可得：

$$\begin{aligned}\left\|f^{(k)}(x)\right\|^2 &= \left\||\xi|^k \hat{f}(\xi)\right\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|\xi|^{2k}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|\xi|^{2k}\left|\hat{f}(\xi)\right|^{\frac{2k}{p}}\left|\hat{f}(\xi)\right|^{\frac{2(p-k)}{p}} \mathrm{d}\xi \\ &\le \left(\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|^{2p}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{k}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{p-k}{p}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|^{2p}\left(1+\xi^2\right)^{-p}\left(1+\xi^2\right)^{p}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{k}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{p-k}{p}} \\ &\le \left(\sup_{\xi\in R}|\xi|^{2p}\left(1+\xi^2\right)^{-p}\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|^{2p}\left(1+\xi^2\right)^{p}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{k}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{p-k}{p}} \\ &\le E^{\frac{2k}{p}}\sup_{\xi\in R}|\xi|^{\frac{2k(p-p)}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{p-k}{p}} \\ &= E^{\frac{2k}{p}}\left\|\hat{f}(\xi)\right\|^{\frac{2(p-k)}{p}},\end{aligned} \tag{15}$$

所以有：

$$\left\|f^{(k)}(x)\right\| \le E^{\frac{k}{p}}\left\|\hat{f}\right\|^{1-\frac{k}{p}},$$

定理 3.1 证毕。

注 3.1 正则化参数的后验选取规则是在条件稳定性结果的基础上建立的，所以只给出条件稳定性结果。

在第 4 节将引入分数阶 Landweber 迭代正则化方法，并给出相应的误差估计。

4. 正则化方法及误差估计

在本节中，主要使用分数阶 Landweber 正则化方法解决高阶数值微分的不适定性，并给出了先验正则化参数规则选取下的误差估计。

通过带噪声的数据表示分数阶 Landweber 正则化解：

$$R\left(\widehat{f_{\delta,m}^{(k)}(x)}\right) = \left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^\gamma |\xi|^k \hat{f}_\delta(\xi), \tag{16}$$

其傅里叶逆变换为：

$$R\left(f_{\delta,m}^{(k)}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^\gamma |\xi|^k \hat{f}_\delta(\xi)\mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{d}\xi. \tag{17}$$

不带噪声的精确数据的分数阶 Landweber 正则化解为：

$$R\left(\widehat{f_{m}^{(k)}(x)}\right) = \left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^\gamma |\xi|^k \hat{f}(\xi), \tag{18}$$

其傅里叶逆变换为：

$$R\left(f_m^{(k)}(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^{\gamma}|\xi|^k\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi. \tag{19}$$

需要注意的是，其中 $m\geq 1$ 为正则化参数，$0<\beta<|\xi|^{2k}$，且 $\frac{1}{2}<\gamma\leq 1$ 为分数阶参数。当 $\gamma=1$ 时，便是 Landweber 迭代方法。

下面将给出先验选取规则下的误差估计结果。

定理 4.1 假设高阶数值微分问题满足条件(12)和(13)，选取正则化参数为 $m(\delta)=\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2k}{p}}$，其中 $p>1$ 且 $p>k$ (k 为正整数)，则收敛估计为：

$$\left\|f^{(k)}(x)-R\left(f_{\delta,m}^{(k)}(x)\right)\right\|\leq\left[\left(\frac{p-k}{2k\beta}\right)^{\frac{p-k}{2k}}+\beta^{\frac{1}{2}}\right]E^{\frac{k}{p}}\delta^{1-\frac{k}{p}}. \tag{20}$$

证明. 通过三角不等式可知：

$$\left\|f^{(k)}(x)-R\left(f_{\delta,m}^{(k)}(x)\right)\right\|\leq\left\|f^{(k)}(x)-R\left(f_m^{(k)}(x)\right)\right\|+\left\|R\left(f_m^{(k)}(x)\right)-R\left(f_{\delta,m}^{(k)}(x)\right)\right\|. \tag{21}$$

首先证明第一部分，根据(13)式可得：

$$\begin{aligned}\left\|f^{(k)}(x)-R\left(f_n^{(k)}(x)\right)\right\|&=\left\|\widehat{f^{(k)}(x)}-R\left(\widehat{f_m^{(k)}(x)}\right)\right\|\\&=\left\||\xi|^k\hat{f}-\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^{m\gamma}\right]|\xi|^k\hat{f}\right\|\\&=\left\|\left[1-\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^{\gamma}\right]|\xi|^k\hat{f}\right\|\\&=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left[1-\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^{\gamma}\right]|\xi|^k\right|^2\left|\hat{f}(\xi)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left[1-\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^{\gamma}\right]|\xi|^k\right|^2\left(1+\xi^2\right)^p\left(1+\xi^2\right)^{-p}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leq\sup_{\xi\in R}A(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\xi^2\right)^p\left|\hat{f}(\xi)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leq\sup_{\xi\in R}A(\xi)E,\end{aligned} \tag{22}$$

其中，

$$A(\xi)=\left[1-\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^m\right]^{\gamma}\right]|\xi|^k\left(1+\xi^2\right)^{-\frac{p}{2}}. \tag{23}$$

根据引理 2.2 和引理 2.3，可得：

$$A(\xi)\le\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^{m}|\xi|^{k}\left(1+\xi^{2}\right)^{-\frac{p}{2}}\le\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^{m}|\xi|^{k-p}\le\left(\frac{p-k}{2k\beta}\right)^{\frac{p-k}{2k}}m^{\frac{k-p}{2k}}. \tag{24}$$

结合(22)和(24)式，可得：

$$\left\|f^{(k)}(x)-R\left(f_{m}^{(k)}(x)\right)\right\|\le\left(\frac{p-k}{2k\beta}\right)^{\frac{p-k}{2k}}m^{\frac{k-p}{2k}}E. \tag{25}$$

接下来证明第二部分，根据引理 2.1 及(12)式，可以得到：

$$\begin{aligned}\left\|R\left(f_{m}^{(k)}(x)\right)-R\left(f_{\delta,m}^{(k)}(x)\right)\right\|&=\left\|R\left(\widehat{f_{m}^{(k)}(x)}\right)-R\left(\widehat{f_{\delta,m}^{(k)}(x)}\right)\right\|\\&\le\left\|\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^{m}\right]^{\gamma}|\xi|^{k}\left(\hat{f}-\hat{f}_{\delta}\right)\right\|\\&\le\delta\sup_{\xi\in R}\left[1-\left(1-\beta\frac{1}{|\xi|^{2k}}\right)^{m}\right]^{\gamma}|\xi|^{k}\\&\le\beta^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}\delta.\end{aligned} \tag{26}$$

将(25)和(26)式带入(21)式，可以得到：

$$\left\|f^{(k)}(x)-R\left(f_{\delta,m}^{(k)}(x)\right)\right\|\le\left(\frac{p-k}{2k\beta}\right)^{\frac{p-k}{2k}}m^{\frac{k-p}{2k}}E+\beta^{\frac{1}{2}}E^{\frac{k}{p}}\delta^{1-\frac{k}{p}}.$$

选取正则化参数 $m(\delta)=\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2k}{p}}$，则可以得到收敛估计为：

$$\left\|f^{(k)}(x)-R\left(f_{\delta,m}^{(k)}(x)\right)\right\|\le\left[\left(\frac{p-k}{2k\beta}\right)^{\frac{p-k}{2k}}+\beta^{\frac{1}{2}}\right]E^{\frac{k}{p}}\delta^{1-\frac{k}{p}}.$$

定理 4.1 证毕。

5. 结论

本文提出了一种分数阶 Landweber 迭代正则化方法来分析高阶数值微分的不适定问题。通过分数阶 Landweber 迭代格式的构造，给出数值微分问题的正则解。最后在正则化参数的先验选取规则下，得到正则解和精确解之间的误差估计。

参考文献

[1] Wang, Y. and Liu, J. (2018) On the Edge Detection of an Image by Numerical Differentiations for Gray Function. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 2466-2479. https://doi.org/10.1002/mma.4752

[2] Liu, J.J., Seo, J.K., Sini, M. and Woo, E.J. (2007) On the Conductivity Imaging by MREIT: Available Resolution and Noisy Effect. *Journal of Physics*: *Conference Series*, **73**, Article ID: 012013. https://doi.org/10.1088/1742-6596/73/1/012013

[3] Hanke, M. and Scherzer, O. (1998) Error Analysis of an Equation Error Method for the Identification of the Diffusion Coefficient in a Quasi-Linear Parabolic Differential Equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **59**, 1012-1027. https://doi.org/10.1137/s0036139997331628

[4] 刘继军. 不适定问题的正则化方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[5] Qu, R. (1996) A New Approach to Numerical Differentiation and Integration. *Mathematical and Computer Modelling*, **24**, 55-68. https://doi.org/10.1016/s0895-7177(96)00164-1

[6] Anderssen, R.S. and Hegland, M. (1999) For Numerical Differentiation, Dimensionality Can Be a Blessing! *Mathematics of Computation*, **68**, 1121-1141. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-99-01033-9

[7] Luo, X.J. and Chen, Z.Y. (2006) Differentiation of Approximately Specified Functions. *Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities*, **1**, 76-82.

[8] Ramm, A.G. and Smirnova, A.B. (2001) On Stable Numerical Differentiation. *Mathematics of Computation*, **70**, 1131-1154. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-01-01307-2

[9] Cullum, J. (1971) Numerical Differentiation and Regularization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **8**, 254-265. https://doi.org/10.1137/0708026

[10] Wang, Y.B., Jia, X.Z. and Cheng, J. (2002) A Numerical Differentiation Method and Its Application to Reconstruction of Discontinuity. *Inverse Problems*, **18**, 1461-1476. https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/6/301

[11] Hao, D.N. (1994) A Mollification Method for Ill-Posed Problems. *Numerische Mathematik*, **68**, 469-506. https://doi.org/10.1007/s002110050073

[12] Klann, E., Maaß, P. and Ramlau, R. (2006) Two-Step Regularization Methods for Linear Inverse Problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **14**, 583-607. https://doi.org/10.1515/156939406778474523

[13] Han, Y., Xiong, X. and Xue, X. (2019) A Fractional Landweber Method for Solving Backward Time-Fractional Diffusion Problem. *Computers & Mathematics with Applications*, **78**, 81-91. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.02.017

[14] Klann, E. and Ramlau, R. (2008) Regularization by Fractional Filter Methods and Data Smoothing. *Inverse Problems*, **24**, Article ID: 025018. https://doi.org/10.1088/0266-5611/24/2/025018

[15] Wang, J., Zhou, Y. and Wei, T. (2013) Two Regularization Methods to Identify a Space-Dependent Source for the Time-Fractional Diffusion Equation. *Applied Numerical Mathematics*, **68**, 39-57. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2013.01.001